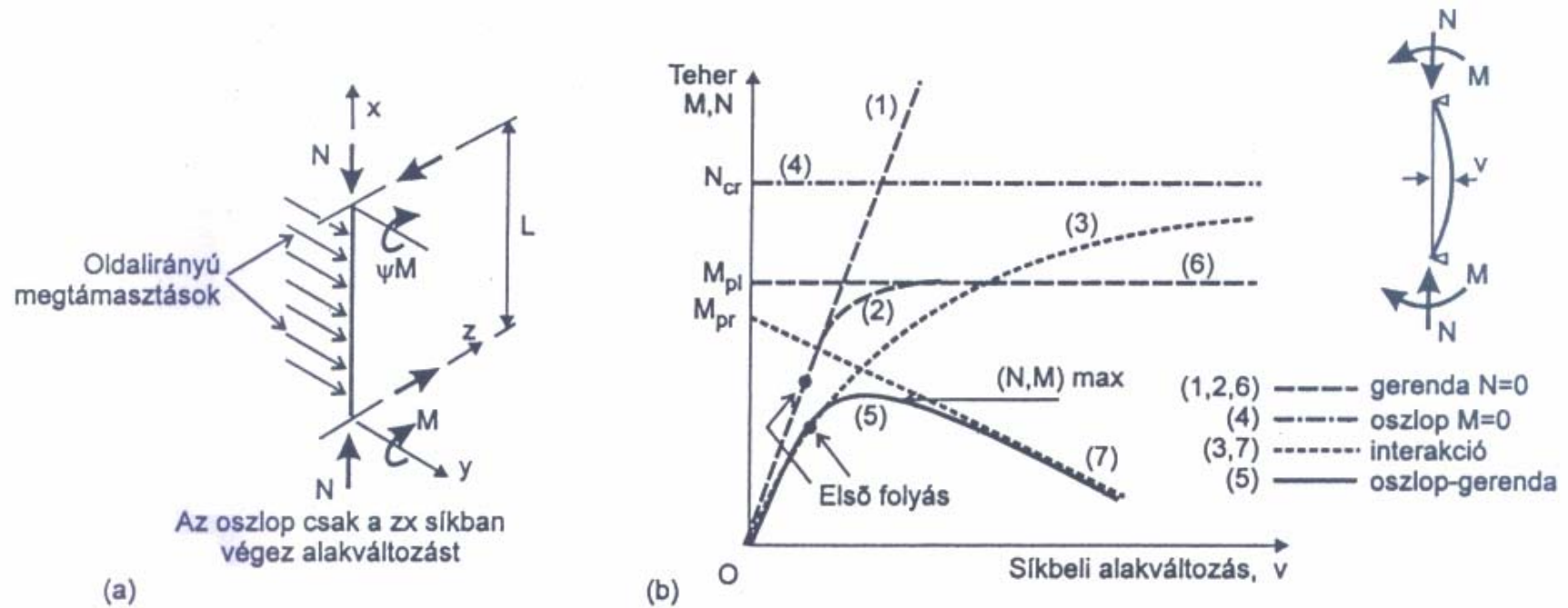


# 4. Előadás

## **Szerkezeti elemek teherbírásvizsgálata összetett terhelés esetén:**

- interakciós formulák elméleti alapjai
- kísérleti vizsgálatok szerepe

# 1. A nyomott-hajlított elemek síkbeli viselkedése



1. ábra: Nyomott-hajlított elemek síkbeli viselkedése

## 1.1. A keresztmetszet viselkedése

### 1.1.1. Hajlítás és normálerő 1. és 2. osztályú keresztmetszetek esetén

Ha megengedjük a teljes képlékenyedés kialakulását, akkor egyidejű normálerő és hajlítónyomaték esetén a tönkremenetel feltétele (2. ábra) az alábbi alakban adható meg.

(a) eset: Ha  $y_n \leq (h - t_f) / 2$ , akkor a semleges tengely a gerincben van, és

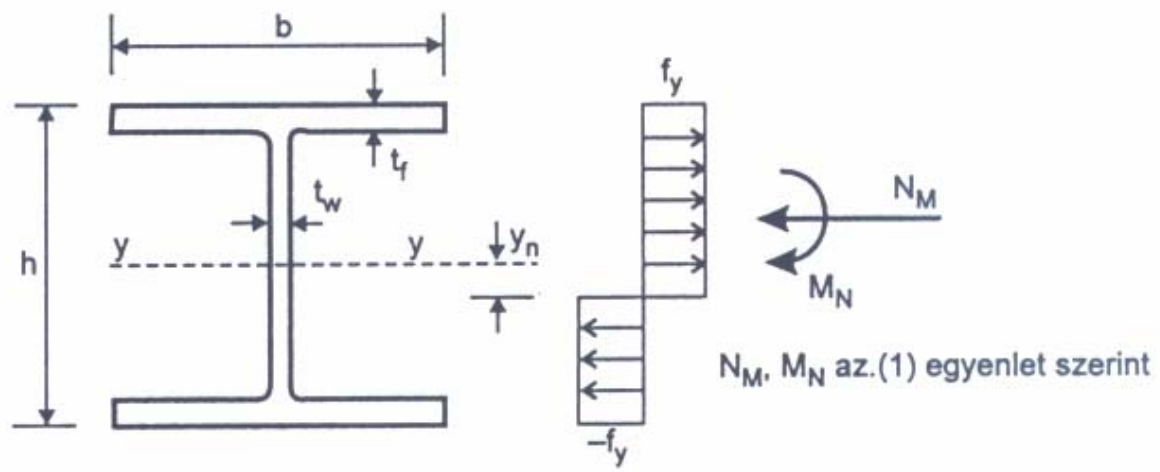
$$N_M = 2f_y t_w y_n ;$$

$$M_N = f_y b t_f (h - t_f) + f_y \left[ \left( \frac{h - 2t_f}{2} \right)^2 - y_n^2 \right] t_w . \quad (1)$$

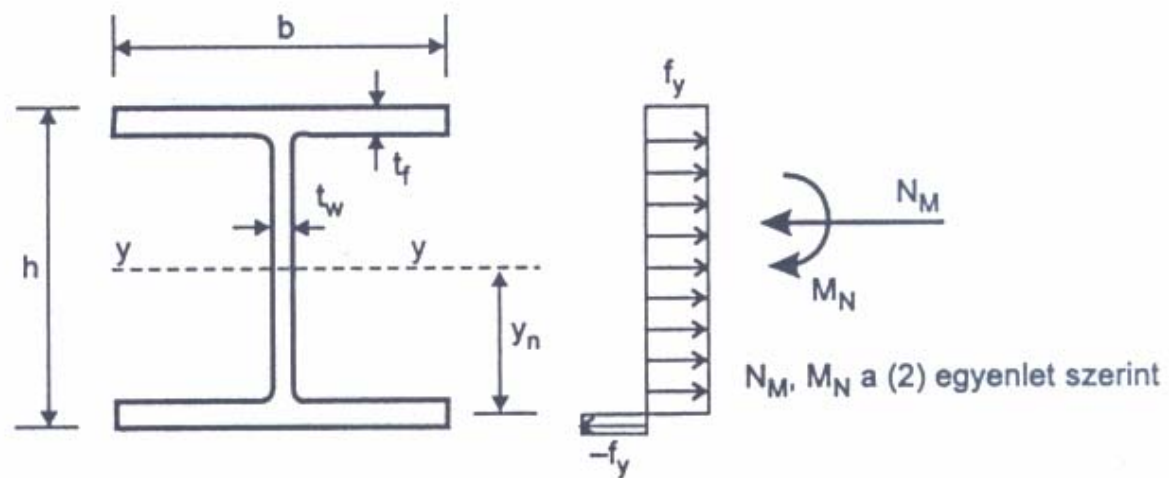
(b) eset: Ha  $y_n > (h - t_f) / 2$ , akkor a semleges tengely az övben van, és

$$N_M = f_y \left[ t_w (h - 2t_f) + 2b \left( t_f - \frac{h}{2} + y_n \right) \right] ;$$

$$M_N = f_y b \left( \frac{h}{2} - y_n \right) (h - y_n) t_f . \quad (2)$$



(a)  $y_n < (h - 2t_f) / 2$



(b)  $y_n > (h - 2t_f) / 2$

2. ábra: Teljes képlékenyedés normálerő és nyomaték hatására

A 3. *ábra* az (1) és (2) egyenleteket hasonlítja össze az Eurocode 3 által használt közelítő képletekkel [EC3: 5.4.8.1.]:

$$M_{Ny.Rd} = M_{pl.y} (1 - n) / (1 - 0,5a), \text{ de } M_{Ny.Rd} \leq M_{ply.Rd}, \quad (3)$$

ahol  $n = N_{Sd} / N_{pl,Rd}$  a normálerő és az  $f_y \cdot A$  nagyságú, teljes képlékenyedést okozó teher hányadosa, továbbá  $a = (A - 2bt_f) / A \leq 0,5$ .

Azokra a keresztmetszetekre, amelyekben nincsenek csavarlyukak, a z tengely körüli hajlítás esetén a következő közelítések alkalmazhatóak [EC3: 5.4.8.1.]:

- ha  $n \leq a$ :

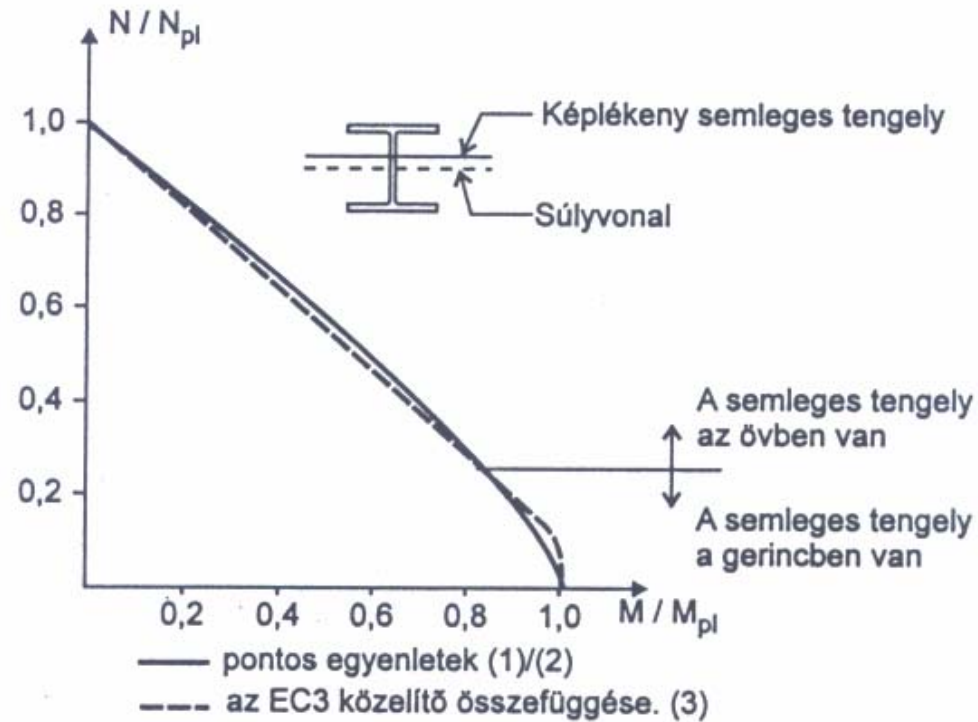
$$M_{Nz.Rd} = M_{pl.z.Rd};$$

- ha  $n > a$ :

$$M_{Nz.Rd} = M_{pl.z.Rd} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{n - a}{1 - a} \right)^2 \right],$$

ahol  $n = N_{Sd} / N_{pl,Rd}$ , továbbá  $a = (A - 2bt_f) / A$ , de  $a \leq 0,5$ .

Néhány gyakori keresztmetszeti alakra további közelítő összefüggéseket az 1. táblázat tartalmaz.  $M_N$  értéke természetesen egyik esetben sem haladhatja meg  $M_{pl}$  értéket.



3. ábra: A teljes képlékenyedéshez tartozó kölcsönhatási görbe – HEA 450 szelvény, erős tengely körüli hajlítás

### 1.1.2. Hajlítás és normálerő 3. osztályú keresztmetszetek esetén

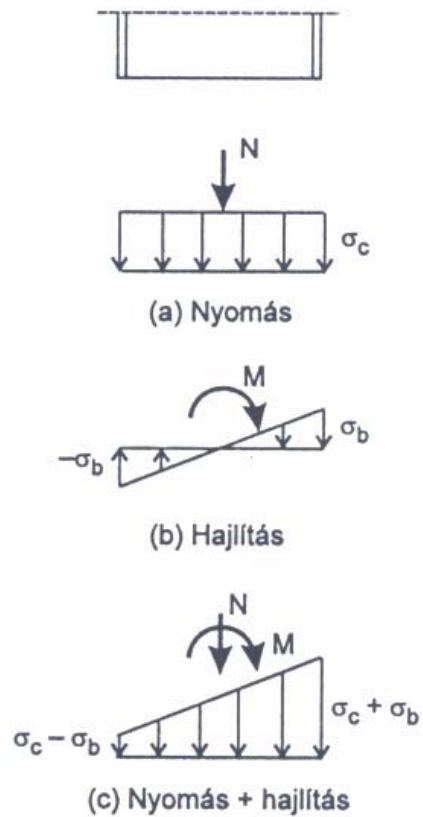
A 4. ábra egy H szelvényű oszlop valamely keresztmetszetét mutatja, amelyben a nyomóerő és az  $y$  tengely körüli hajlítónyomaték a 4.a–b ábrákon bemutatott egyenletes és változó feszültségeloszlást okozza.

Rugalmas viselkedés esetén a szuperpozíció elve alkalmazható, így a két feszültségeloszlás egyszerűen összeadható (4.c ábra). Az első folyás tehát a keresztmetszet szélső szálában alakul ki, a maximális nyomófeszültség helyén. A feltétel így írható:

$$f_y = \sigma_c + \sigma_b,$$

ahol

- $f_y$  az anyag folyáshatára,
- $\sigma_c = N / A$  a nyomóerőből származó feszültség,
- $\sigma_b = \frac{Mh/2}{I}$  a nyomatékból származó maximális nyomófeszültség, ahol  $h$  a szelvény teljes magassága,  $I$  pedig az  $y$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték.



4. ábra: Nyomott-hajlított keresztmetszet rugalmas viselkedése

A 3. osztályba tartozó keresztmetszet akkor felel meg, ha a  $\sigma_{x.Ed}$  maximális normálfeszültség kielégíti az alábbi feltételt [EC3: 5.4.8.2.]:

$$\sigma_{x.Ed} \leq f_{yd},$$

ahol  $f_{yd} = f_y / \gamma_{M0}$ .



### 1.1.3. Hajlítás és normálerő 4. osztályú keresztmetszetek esetén

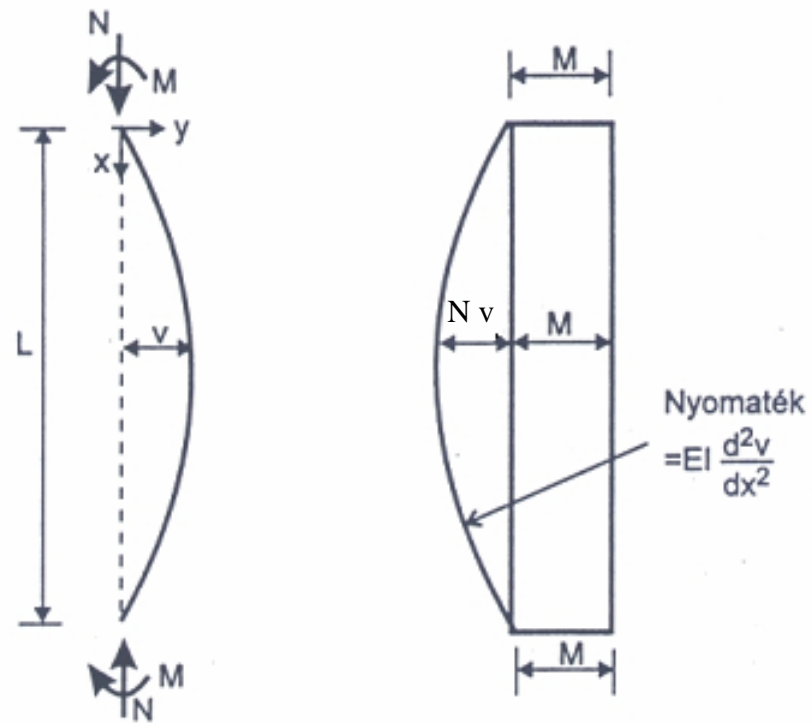
A 4. osztályba tartozó keresztmetszet akkor felel meg, ha a nyomott lemezelemek hatékony szélességével az EC3 5.3.2. szakasz (2) bekezdése szerint számított maximális normálfeszültség kielégíti a következő feltételt [EC3: 5.4.8.3.]:

$$\sigma_{x.Ed} \leq f_{yd},$$

ahol  $f_{yd} = f_y / \gamma_{M0}$ .

## 1.2. Globális stabilitás

A keresztmetszeti viselkedés előző fejezetben bemutatott kezelése nem foglalkozott azzal, hogy pontosan hogyan állítottuk elő a vizsgált keresztmetszetre működő  $M$  nyomatékot. Az 5. ábra a nyomott-hajlított elem oldalirányú alakváltozását mutatja egyidejű nyomás és egyenlő nagyságú, ellentétes előjelű végnyomatékok hatására.



5. ábra: Elsődleges és másodlagos hajlítónyomaték

A hajlítónyomatéki igénybevétel az elem bármely keresztmetszetében két tag összegének tekinthető, ahol

- az első tag az elsődleges  $M$  nyomatékból származik,
- a második pedig a másodlagos  $N \cdot v$  nyomatékból.

A probléma rugalmas vizsgálata megadja a középpont legnagyobb eltolódását [5]:

$$v_{\max} = \frac{M}{N} \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{P_{Ey}} - 1}, \quad (4)$$

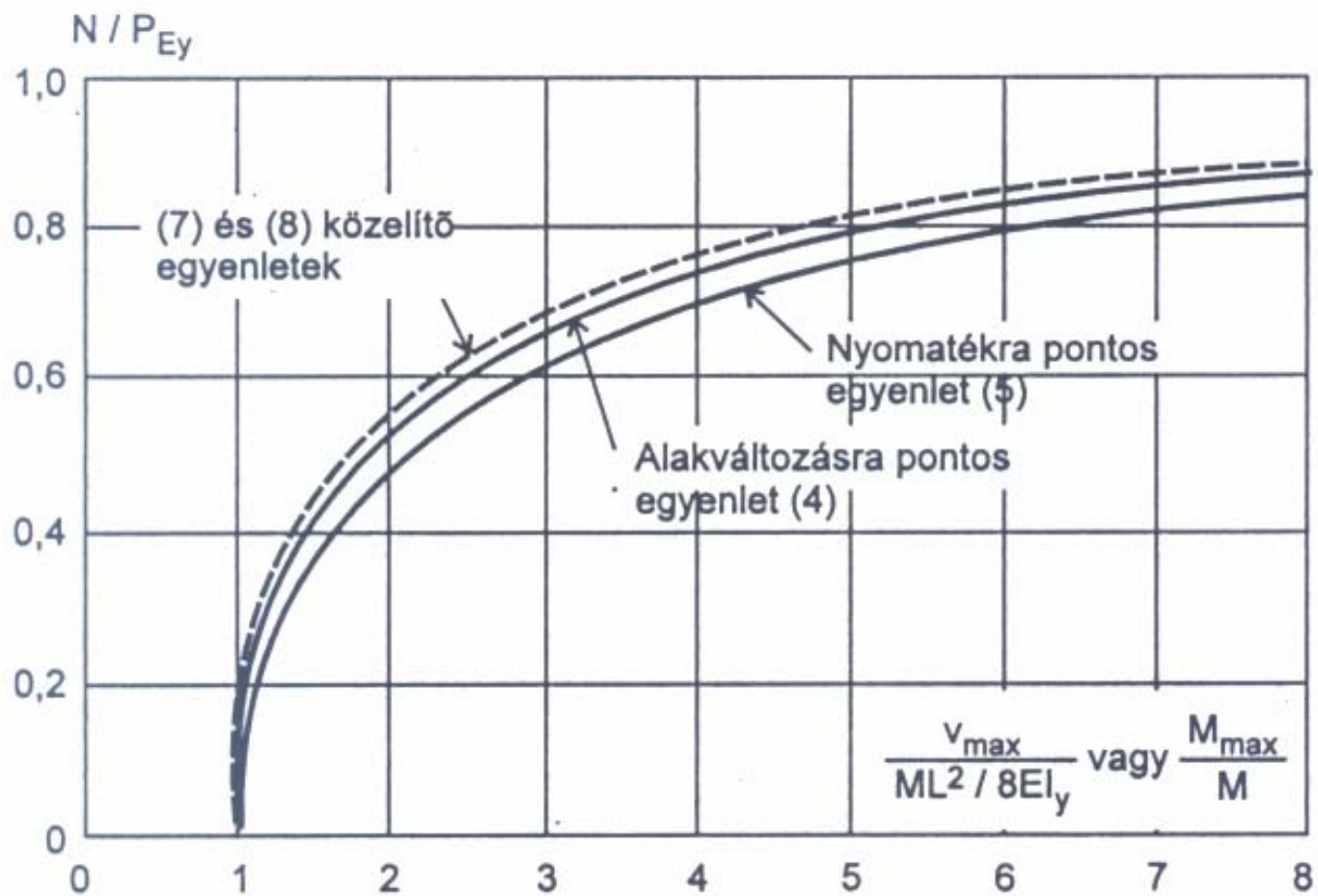
ahol

$$P_{Ey} = \frac{\pi^2 EI_y}{L^2}$$

az Euler-féle kritikus teher erős tengely körüli kihajlás esetén, míg a maximális nyomaték:

$$M_{\max} = M \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{P_{Ey}}}. \quad (5)$$

Az  $M$  nyomaték előzőek szerinti szorzótényezője mindkét egyenletben helyettesíthető, hiszen mind az önállóan működő végnyomatékokból származó elsőrendű eltolódást, mind pedig a klasszikus hajlítási elméletből számítható elsőrendű  $M$  nyomatékot közelítőleg a következő tényezővel kell szorozni:



6. ábra: Egyenlő végnyomatékkal terhelt nyomott-hajlított elemek maximális eltolódása és nyomatéka

$$\frac{1}{1 - N/P_{Ey}} \quad (6)$$

Ezt mutatja a 6. ábra. Ekkor:

$$v_{\max} = \frac{ML^2}{8EI_y} \frac{1}{1 - N/P_{Ey}}; \quad (7)$$

$$M_{\max} = M \frac{1}{1 - N/P_{Ey}}. \quad (8)$$

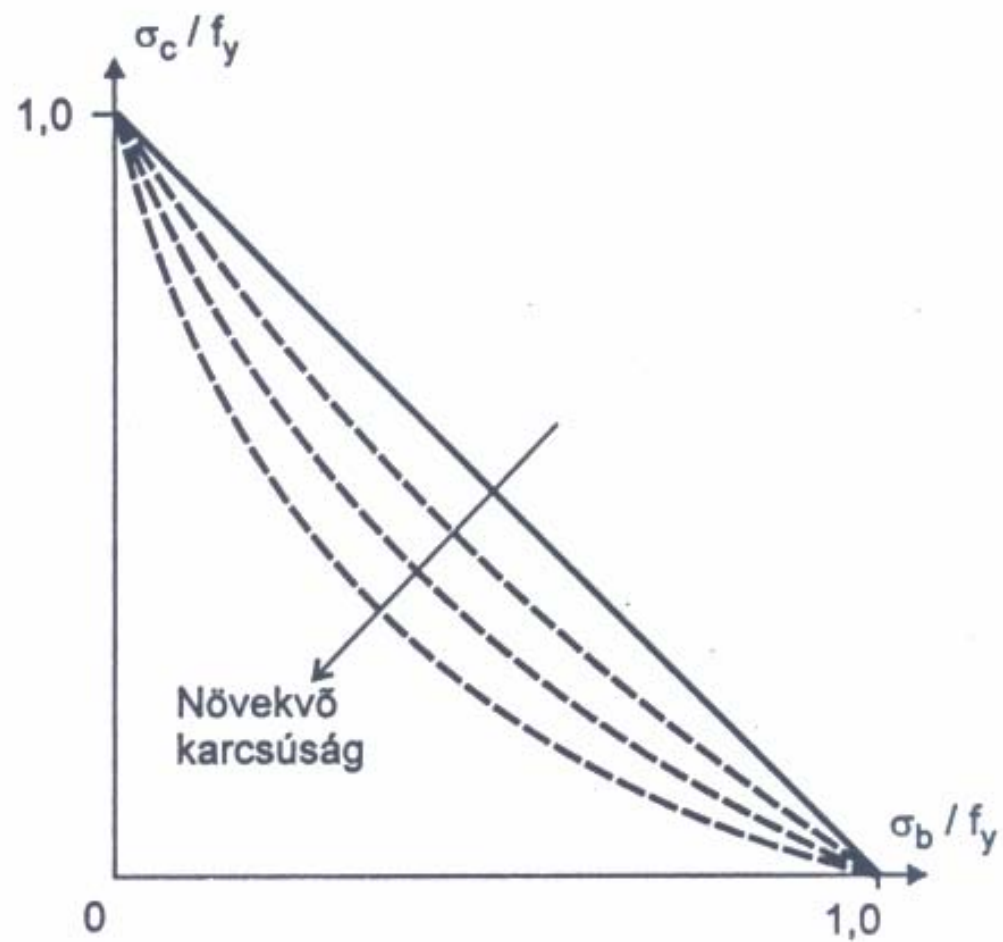
Míthogy a maximális rugalmas feszültség:

$$\sigma_{\max} = \sigma_c + \sigma_b \frac{M_{\max}}{M}, \quad (9)$$

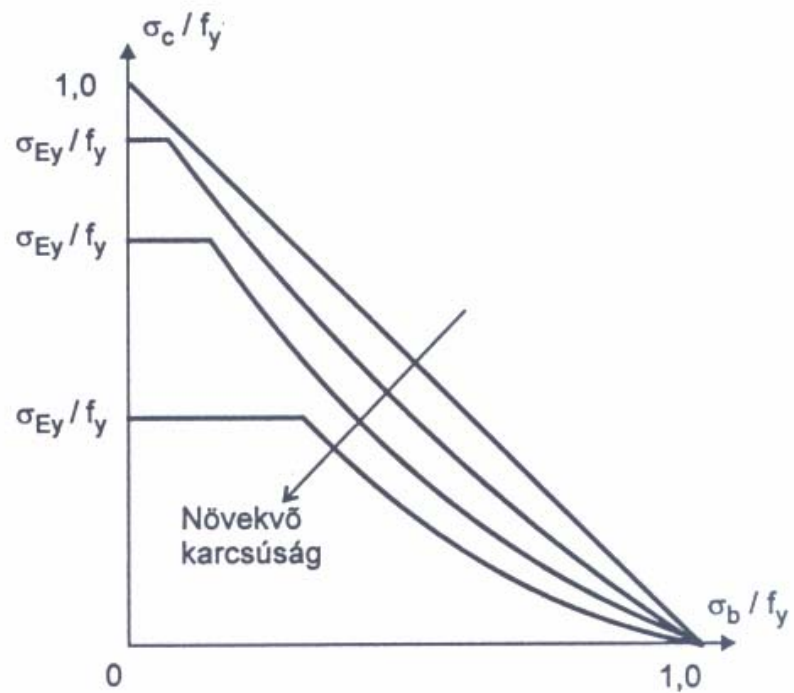
a (9) egyenlet a következő alakban írható:

$$\frac{\sigma_c}{f_y} + \frac{\sigma_b}{f_y(1 - N/P_{Ey})} = 1,0. \quad (10)$$

A (10) egyenletből különböző  $P_{Ey}$  értékek esetén meghatározhatók a folyást okozó összetartozó  $\sigma_c$  és  $\sigma_b$  értékek ( $P_{Ey}$  az  $L/r_y$  karcsúságtól függ). Ez egy görbesereget ad, amelyet a 7. ábra szemléltet. Az ábrán látható, hogy amennyiben  $\sigma_b$  zérushoz tart,  $\sigma_c$  az anyag  $f_y$  folyási szilárdságához közelít. Ez azt jelenti, hogy a (10) egyenlet nem tartalmazza a tiszta nyomás hatására  $\sigma_{Ey}$  feszültségnél bekövetkező kihajlás lehetőségét:



7. ábra: A (10) egyenlet alakja



8. ábra: A (10) és (11) egyenletek kombinációja

$$\sigma_{Ey} = \frac{P_{Ey}}{A} = \frac{\pi^2 EI_y}{AL^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_y^2}. \quad (11)$$

Mindkét feltétel figyelembevételét a (10) és a (11) egyenlet együttes alkalmazása biztosítja, (8. ábra).

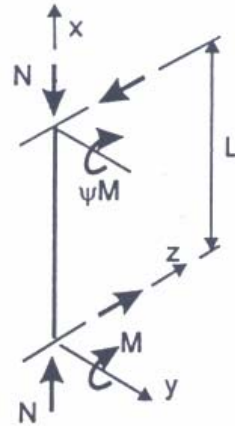
## 2. Nyomott-hajlított elemek kifordulása

Ha egy oldalirányban nem megtámasztott gerendát az erősebb tengelye körül hajlítunk (*10. ábra*), akkor oldalirányú kitéréssel és elcsavarodással járó stabilitásvesztés következhet be, a síkbeli vizsgálat által jóslott maximális terhelésnél lényegesen kisebb teherszinten. Ez a kifordulás létrejöhet az elem rugalmas állapotában (lásd a *11. ábra* 1. görbéjét), vagy bizonyos fokú képlékenyedés után (2. görbe), a melyet a fellépő hajlítás és nyomás okoz.

### 2.1. Kifordulás

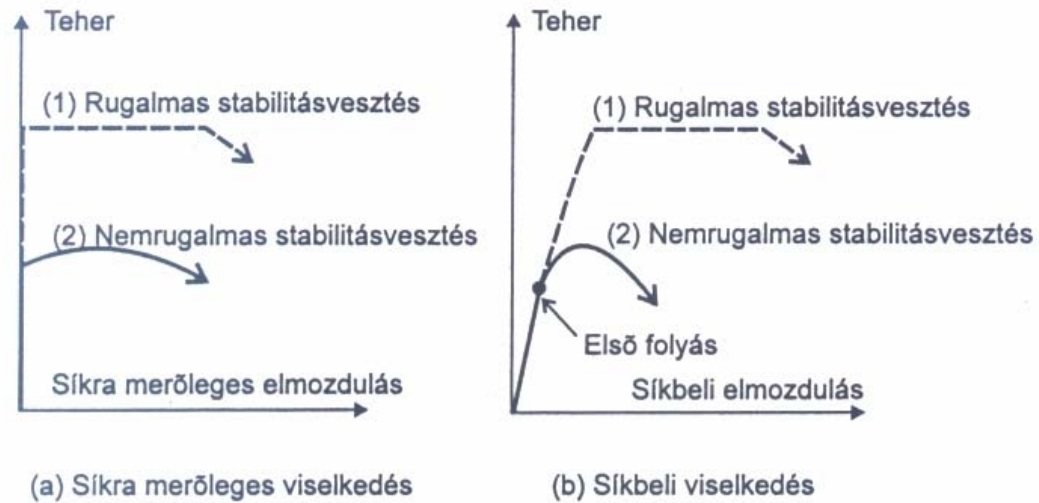
Tekintsük egy oldalirányban nem megtámasztott, erősebb tengelye körül hajlított nyomott-hajlított elem kifordulási viselkedését. Feltételezve, hogy a viselkedés rugalmas, és a terhelési és megtámasztási viszonyok a *12. ábra* szerintiek, a normálerő és a hajlítónyomaték kritikus kombinációi Chen és Atsuta megoldásából nyerhetők:





Az oszlop a  $xz$  síkban végez alakváltozást, majd kifordul, az  $yx$  síkban létrejövő alakváltozással és az  $x$  tengely körüli elcsavarodással.

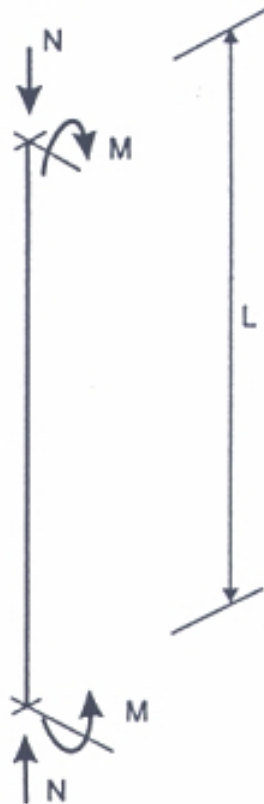
10. ábra: Kifordulási viselkedés



(a) Síkra merőleges viselkedés

(b) Síkbeli viselkedés

11. ábra: Nyomott-hajlított elemek kifordulása



A végtámaszok megakadályozzák az oldalirányú elmozdulást és elcsavarodást, de nem gátolják az elfordulást és vetemedést

12. ábra: A kifordulás alapesete

$$\frac{M^2}{i_0^2 P_{Ez} P_{E0}} = \left(1 - \frac{N}{P_{Ez}}\right) \left(1 - \frac{N}{P_{E0}}\right), \quad (15)$$

ahol

- $i_0 = \sqrt{\frac{I_y + I_z}{A}}$  a poláris inerciasugár;
- $P_{Ez} = \frac{\pi^2 EI_z}{L^2}$  a gyengébb tengelyre vonatkozó kritikus teher;
- $P_{E0} = \frac{GI_t}{i_0^2} \left( 1 + \frac{\pi^2 EI_w}{GI_t L^2} \right)$  a tisztán elcsavarodó kihajláshoz tartozó kritikus teher.

Ha  $N$  tart zérushoz, akkor a (15) egyenlet a gerenda kifordulásának összefüggésére redukálódik, míg ha  $M$  tart zérushoz, akkor az oszlop síkbeli kihajlási ( $P_{Ez}$ ) vagy tisztán elcsavarodó kihajlási ( $P_{E0}$ ) képletét adja. Az első esetben  $M$  kritikus értéke a következőre adódik:

$$M_{cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_w}{L^2 GI_t}}, \quad (16)$$

ahol

- $EI_z$  a gyenge tengelyre vonatkozó hajlítási merevség,
- $GI_t$  a csavarási merevség,
- $EI_w$  az öblösödési merevség.

A (15) egyenlet levezetésénél nem vették figyelembe, hogy a síkbeli nyomatékok megnőhetnek amiatt, hogy a normálerő egy síkbeli alakváltozást szenvedett tartóra működik. Ezt közelítőleg az

$$\frac{M}{1 - N/P_{Ey}}$$

szorzótényezővel lehet figyelembe venni. Következésképpen a (15) egyenlet a következőképpen módosítható:

$$\frac{M^2}{i_0^2 P_{Ez} P_{E0}} = \left(1 - \frac{N}{P_{Ey}}\right) \left(1 - \frac{N}{P_{Ez}}\right) \left(1 - \frac{N}{P_{E0}}\right). \quad (17)$$

Figyelembe véve  $P_{Ey}$ ,  $P_{Ez}$  és  $P_{E0}$  relatív nagyságát, és az egyenletet átrendezve a következő közelítést kapjuk:

$$\frac{N}{P_{Ez}} + \frac{1}{1 - N/P_{Ey}} \frac{M}{i_0 \sqrt{P_{Ez} P_{E0}}} = 1 \quad (18)$$

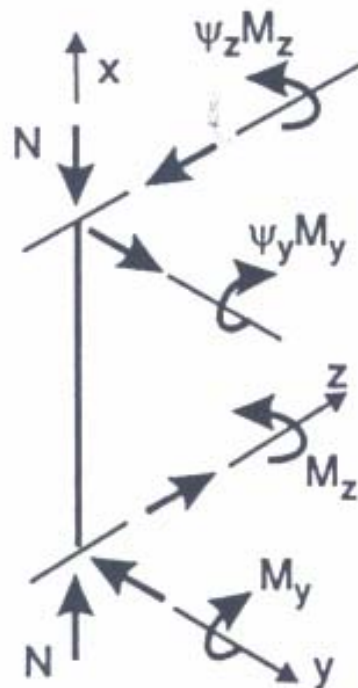
vagy

$$\frac{N}{P_{Ez}} + \frac{1}{1 - N/P_{Ey}} \frac{M}{M_{cr}} = 1. \quad (19)$$

### 3. Nyomott-hajlított elemek kéttengelyű hajlítás esetén

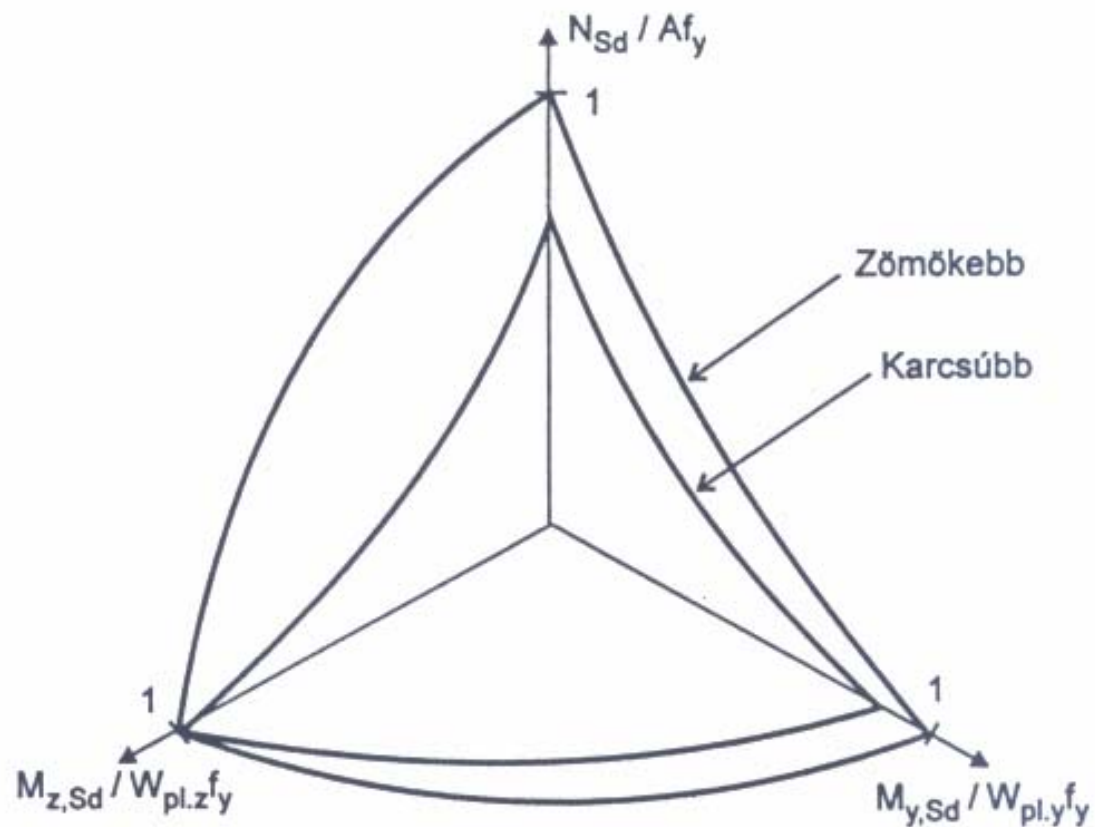
A teljes háromdimenziós eset vizsgálata, még az egyszerű rugalmas módon is, rendkívül összetett, és nem állnak rendelkezésre zárt képletek. A megfelelő tervezési eljárás kérdésének analitikus megközelítése helyett célravezetőbb, ha a viselkedésre vonatkozó megfontolásokból és az egyszerűbb esetekre már kidolgozott módszerekből indulunk ki (14. ábra).

A 15 ábra diagramos formában mutatja be a tervezési követelményt. Az  $N-M_z$  és  $N-M_y$  tengelyek a két, már vizsgált egytengelyű esetnek felelnek meg. Az  $M_z$  és  $M_y$  nyomatékok kölcsönhatása a vízszintes síknak felel meg. Amikor mindhárom terhelési komponens ( $N$ ,  $M_y$  és  $M_z$ ) egyaránt jelen van, a létrejövő interakció valahol a diagram által bemutatott háromdimenziós térben helyezkedik el. Bármely, a határfelületen belül elhelyezkedő pont biztonságos teherkombinációt jelent.



Az oszlop alakváltozást végez a zx és yx síkban, és elcsavarodik az x-tengely körül

14. ábra: Kéttengelyű hajlítás



15. ábra: Interakciós diagram kéttengelyű hajlítás esetén

## Az Eurocode 3 eljárása

### Állandó keresztmetszetű hajlított és nyomott rudak [prEN 1993-1-1:2002, 6.3.3]

Hajlított és tengelyirányban nyomott rudaknak ki kell elégíteni:

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_y N_{Rk}} + k_{yy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{yz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

$$\frac{N_{Ed}}{\chi_z N_{Rk}} + k_{zy} \frac{M_{y,Ed} + \Delta M_{y,Ed}}{\chi_{LT} \frac{M_{y,Rk}}{\gamma_{M1}}} + k_{zz} \frac{M_{z,Ed} + \Delta M_{z,Ed}}{\frac{M_{z,Rk}}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

ahol:  $N_{Ed}$ ,  $M_{y,Ed}$  és  $M_{z,Ed}$  a nyomóerő, az y-y és a z-z tengelyre vett maximális nyomatékok tervezési értékei

$\Delta M_y$ ,  $\Delta M_z$  a súlypont eltolódásából származó nyomatékok

$\chi_y$  és  $\chi_z$  a kihajlási csökkentő tényezők

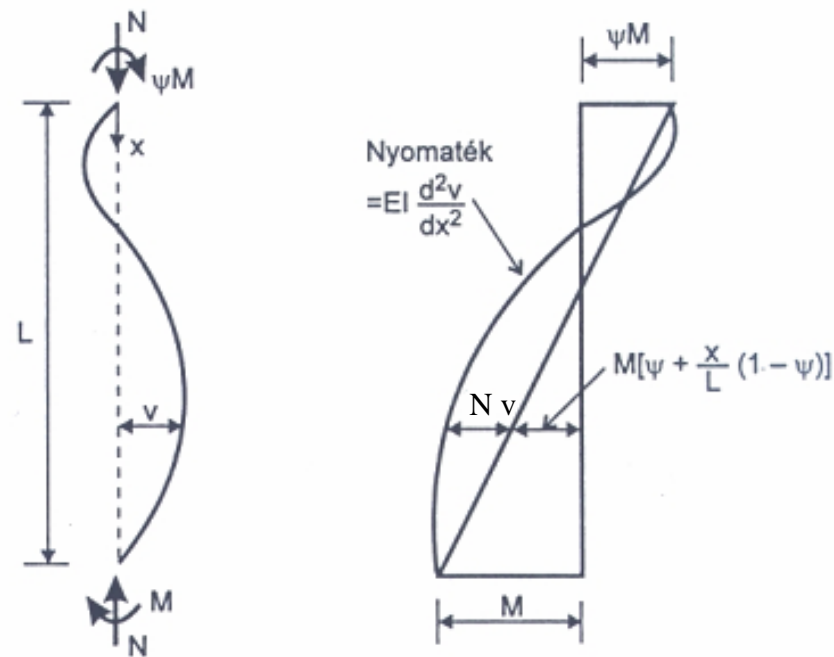
$\chi_{LT}$  a kifordulási csökkentő tényező

$k_{yy}$ ,  $k_{yz}$ ,  $k_{zy}$ ,  $k_{zz}$  interakciós tényezők, meghatározásukra két módszer adott.

$N_{Rk} = f_y A$ ,  $M_{i,Rk} = f_y W_i$  és  $\Delta M_{i,Ed}$  értékei:

Km-i osztály	1	2	3	4
A	A	A	A	$A_{eff}$
$W_y$	$W_{pl,y}$	$W_{pl,y}$	$W_{el,y}$	$W_{eff,y}$
$W_z$	$W_{pl,z}$	$W_{pl,z}$	$W_{el,z}$	$W_{eff,z}$
$\Delta M_y$	0	0	0	$e_{N,y} N_{Ed}$
$\Delta M_z$	0	0	0	$e_{N,z} N_{Ed}$

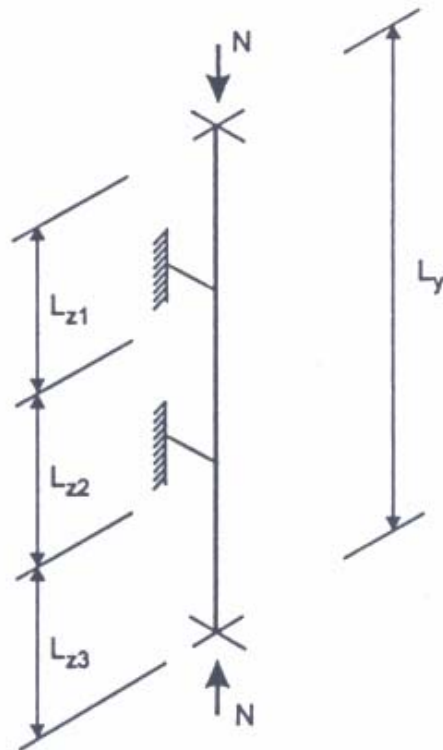
Visszatérve a 9. ábrához, elförordulhat, hogy a maximális nyomaték az elemnek azon a végén keletkezik, amelyiken a nagyobb elsődleges nyomaték működik. Ez az eset általában akkor áll elő, ha a normálerő és/vagy a karcsúság kicsi – ilyenkor csekélyek ugyanis a másodlagos nyomatéki hatások. Ekkor a mértékadó feltétel az lesz, hogy megfelelő keresztmetszeti ellenállást biztosítsunk az elemvégnél. Következésképpen a 2. táblázatnak az adott szelvényalakhoz tartozó képletét kell használni. Azokban az esetekben, ha csak az állandó nyomatéki eloszlást ( $\psi = 1,0$ ) vesszük figyelembe, a (12) egyenlettel adott globális kihajlási ellenőrzés mindig kedvezőtlenebb lesz a keresztmetszeti ellenőrzésnél (vagy szélső esetben megegyezik vele), tehát ez utóbbit nem szükséges külön elvégezni.



9. ábra: Változó nyomaték esete



Természetesen meg kell gátolni a hajlítás síkjában bekövetkező azon tönkremenetelt is, amelyet a túlzott síkbeli alakváltozások okozhatnak. Ez például bekövetkezhet olyan helyzetekben, amikor különböző rácsozási és/vagy megtámasztási viszonyok vannak az  $xy$  és  $xz$  síkban (13. ábra).



13. ábra: Az  $xy$  és  $xz$  síkban különböző megtámasztással rendelkező oszlop

## 6. Rudak és keretek kihajlás-vizsgálatának általános módszere [prEN 1993-1-1:2002, 6.3.4]

- (a) változó keresztmetszetű rudak,
- (b) torzítási hatás figyelembevétele,
- (c) egytengelyű hajlítással, nyomóerővel és nyírással terhelt rudak,
- (d) különleges végkeresztmetszeti megtámasztások
- (e) keretek, melyek rúdjai az (a)-(d) eseteket tartalmazzák.

(i) Keretekre, melyek gerendákból, vagy oszlopokból, vagy oszlop-gerendákból állnak és egytengelyű hajlítással és nyomóerővel terhelték, az elcsavarodó kihajlás, vagyis a keret síkjából való eltolódás esetén az ellenállás ellenőrzése:

$$\frac{\chi_{LT} \alpha_{ult}}{\gamma_{M1}} \geq 1,0$$

ahol:

$\chi_{LT}$  a kifordulási csökkentő tényező

$\alpha_{ult}$  a minimális teherparaméter tervezési értéke a keret legkritikusabb keresztmetszetének karakterisztikus ellenállása a kifordulás figyelembevétele nélkül, de a keretsíkban bekövetkező másodrendű hatások számításbavételével.

A relatív karcsúság:

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{\alpha_{\text{ult}}}{\alpha_{\text{crit}}}}$$

ahol:  $\alpha_{\text{crit}}$  a minimális teherparaméter tervezési értéke a keret rugalmas kritikus ellenállása a kifordulás figyelembevételével.

$\alpha_{\text{crit}}$  és  $\alpha_{\text{ult}}$  meghatározható végeselemes analízis segítségével is, olyan elemeket és megoldásokat alkalmazva, melyekkel a megfelelő típusú alakváltozások modellezhetők.  $\alpha_{\text{crit}}$  meghatározásánál a számítási modell figyelembe kell vegye a kifordulási és csavarási hatásokat.

$\alpha_{\text{crit}}$  meghatározásánál a keresztmetszet vetemedése és bármely megfogási hatás (pl. merevítők, egyszerű vagy folytatólagos övkapcsolatok) is figyelembe vehetők.

# Kísérletek (Fukumoto, 1982)

(A)  $\sigma_u / F_u$ ,  $\sigma_n / F_n$  és  $E / E_n$  hisztogrammok

(B) ECCS Oszlop görbék

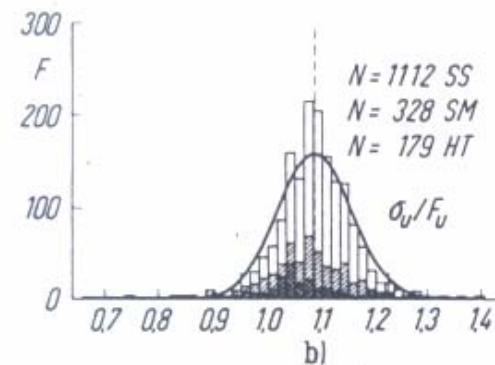
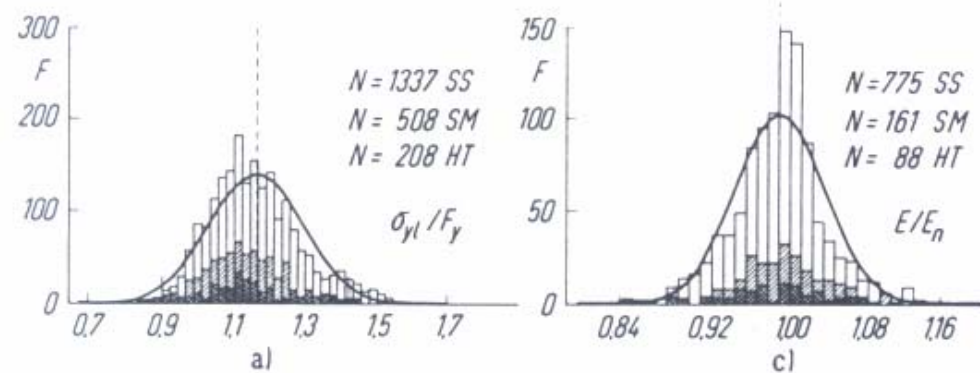
(a) ( $P_u$  aktuális értékét használva)

(b) ( $P_u$  nominális értékét használva)

(C) NDSS rendszer gerenda kifordulási görbéi

(D) NDSS rendszer

Kísérleti eredmények egyedülálló nyomott lemezekre



Histograms for  $\sigma_{yl} / F_y$ ,  $\sigma_u / F_u$  and  $E / E_n$

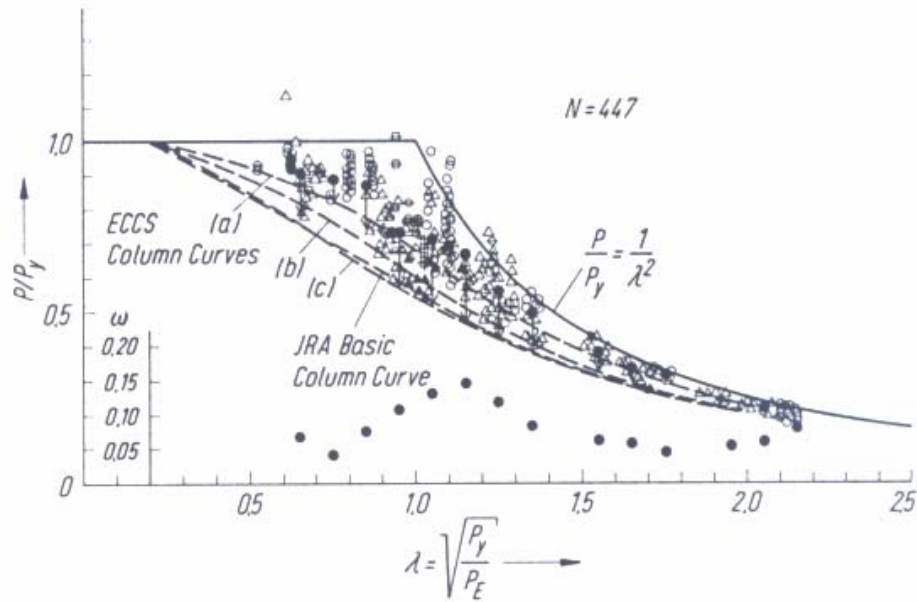
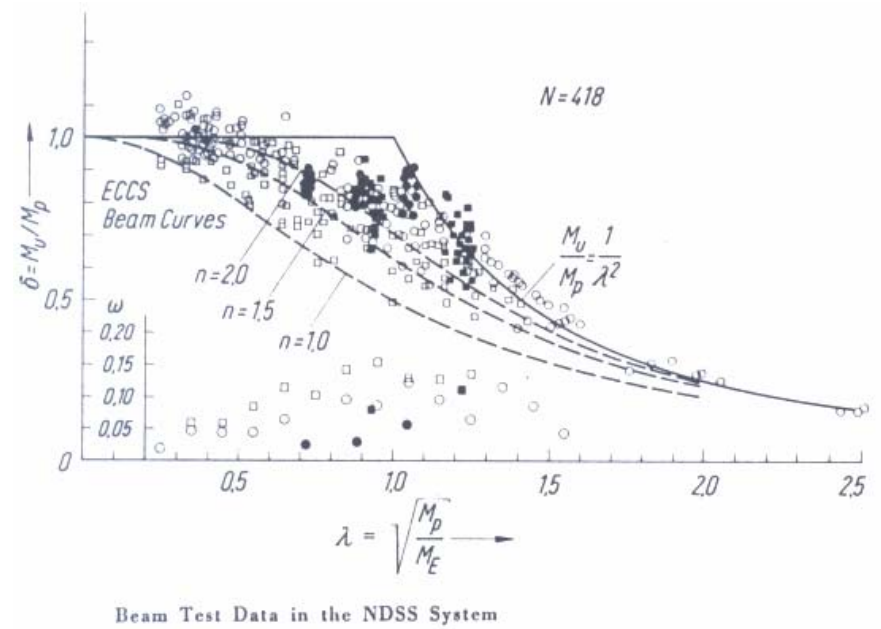
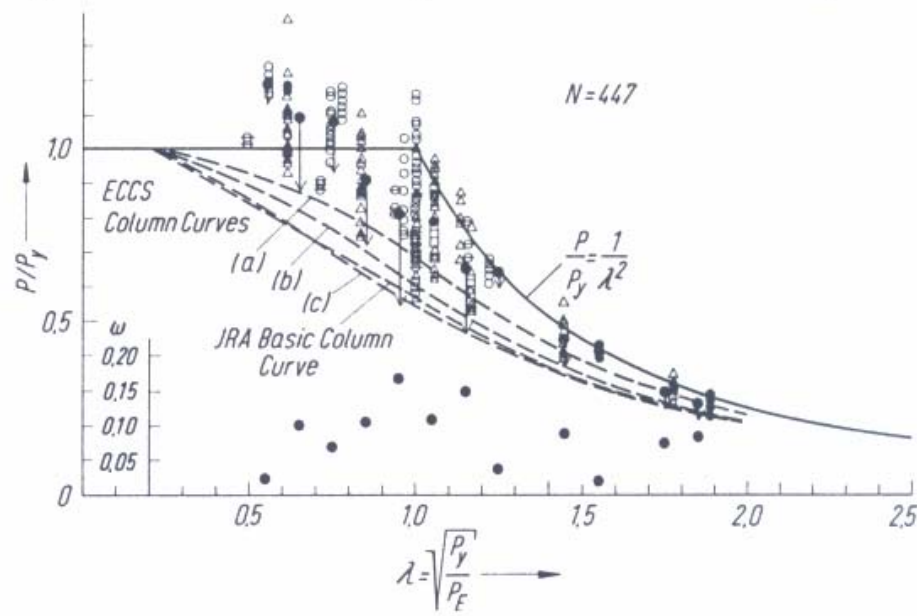
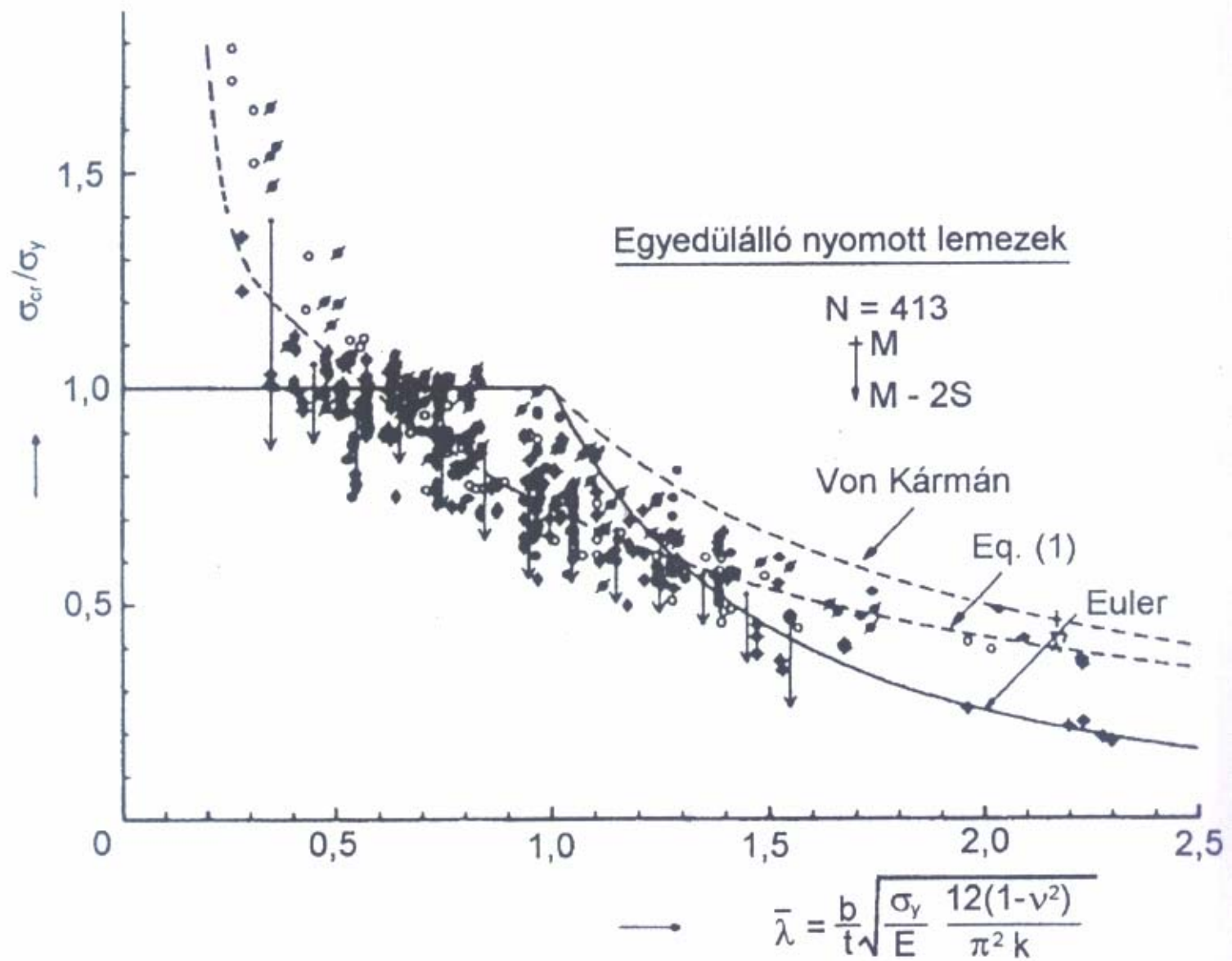


Fig. 11 a. Scatter of Test Results by ECCS Column Test (using actual  $P_y$ )





E-1 ábra Kísérleti eredmények egyedülálló nyomott lemezekre