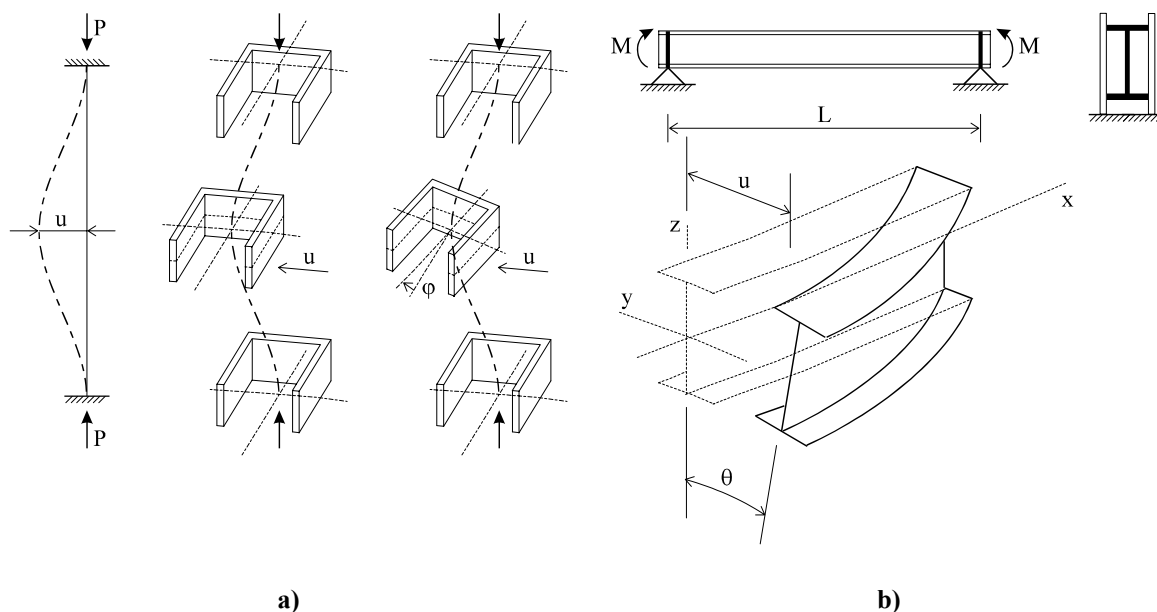


## A.18. Csavart rudak

### A.18.1. Általános megjegyzések. Rudak csavarása

Nyomott rúd esetében feltételezzük, hogy kihajlás során a rúdtengely meggörbül, és ezzel együtt a keresztmetszetek el is fordulnak: a rúd elcsavarodik. Az *A.18.1.a.* ábra központosan nyomott rúd síkbeli és térbeli kihajlását mutatja. Központosan nyomott rúd térbeli kihajlását elcsavarodó kihajlásnak is nevezzük.



A.18.1. ábra Térbeli instabilitások

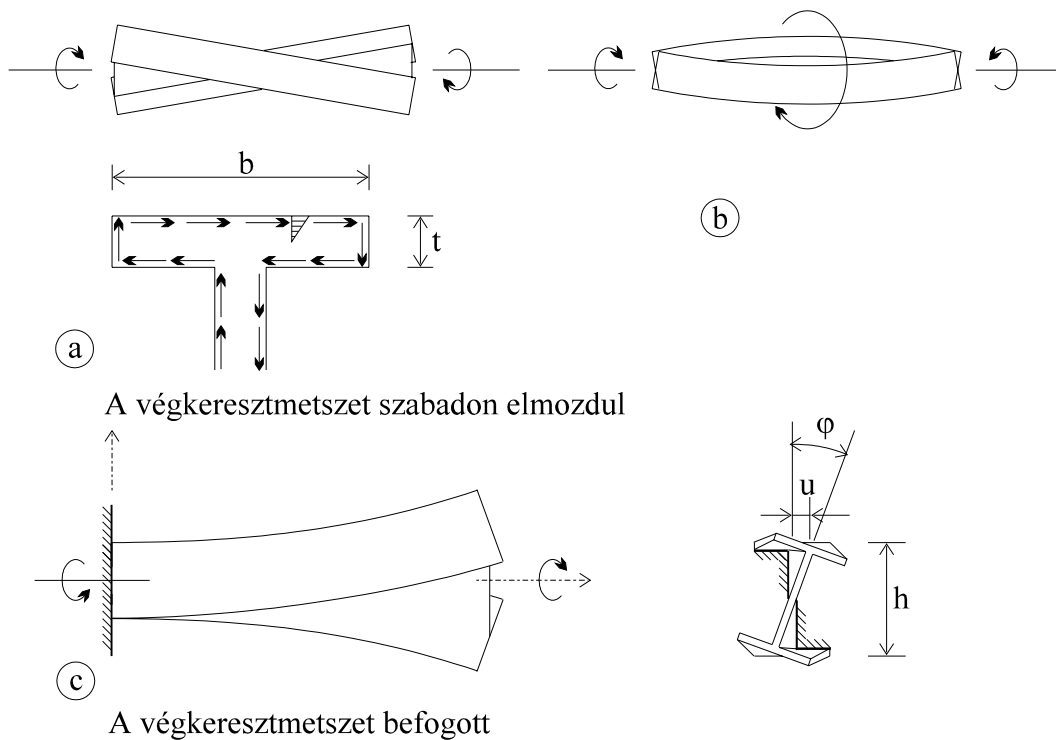
Hajlított rúd esetében is feltételezhető, hogy az első egyensúlyi út bizonyos helyzetében a hajlítónyomaték síkjában meggörbült rúd térgörbe alakot vesz fel, így a rúd második egyensúlyi útját oldalirányú eltolódás és elfordulás jellemzi. Ezen jelenséget kifordulásnak nevezzük (*A.18.2.b. ábra*).

#### A.18.1.1. Vékony falú nyitott szelvények csavarása

Egyenes tengelyű, prizmatikus (állandó keresztmetszetű) rudak csavarásakor két alapesetet lehet megkülönböztetni (Csellár-Halász-Réti, 1965).

Egyszerű csavarás alakul ki, ha a csavaró-igénybevételből a rúd valamennyi keresztmetszetében csak nyírófeszültségek keletkeznek. Ez az eset akkor következik be, ha a csavarónyomaték a rúd hossza mentén állandó értékű, és a keresztmetszetek síkjának torzulása (azaz a keresztmetszetek egyes pontjainak a rúdtengely irányában bekövetkező eltolódása) nincs gátolva; szokás ezt még tiszta vagy *de St. Venant*-csavarásnak is nevezni.

Gátolt csavarásról beszélünk, ha a csavaró-igénybevétel a rúd keresztmetszeteiben a nyírófeszültségeken kívül normálfeszültségeket is létrehoz. Ez az eset áll elő akkor, ha a csavarónyomaték a rúd hossza mentén változik, vagy ha a keresztmetszetek torzulását gátoljuk. (*A.18.2.b. és c. ábrák*)



A.18.2. ábra. Csavarási alapesetek

(a) **Az egyszerű csavarás számítása**

Vékonyfalú szelvény ( $\frac{b}{t} > 10$ ) esetén feltételezhető, hogy a csavarónyomaték hatására a nyírófeszültség eloszlása lineárisan változik a szelvény (t) vastagsága mentén. (A.18.3. ábra)  
A csavarónyomaték és a nyírófeszültség kapcsolata felírható:

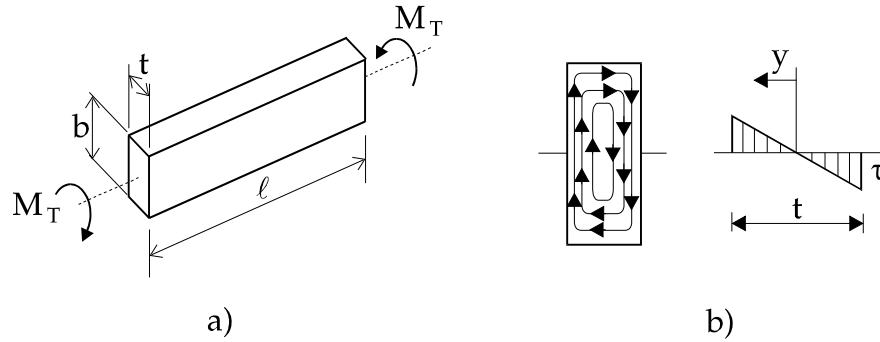
$$\frac{M_T^k}{I_T} = \frac{\tau_T}{2x} = \frac{G\vartheta}{\ell} \quad (1)$$

ahol  $M_T^k$  a csavarónyomaték;  $\tau_T$  csavarási nyírófeszültség; G nyírási modulus;  $\vartheta$  egységnyi hosszúsághoz tartozó elcsavarodási szög;  $I_T$  csavarási inercianyomaték.

$I_T$  értékét négyszögekre bontható szelvény esetén

$$I_T = \frac{1}{3} \sum b \cdot t^3 \quad [\text{cm}^4] \quad (2)$$

formában határozhatjuk meg.



A.18.3. ábra. Négyzög szelvény egyszerű csavarása

(b) A vetemedési mérték

Csavarásnál az eredetileg sík keresztmetszet vetemedik és  $w(y,z)$  felületbe megy át. Bevezetjük a  $w$  eltolódásoknak  $\mathcal{G} = 1 \left[ \frac{1}{cm} \right]$  fajlagos elcsavarodáshoz tartozó nagyságot, a vetemedési mértéket

$$\omega(x, y) = \frac{w(y, z)}{\mathcal{G}} \quad [\text{cm}^2] \quad (3)$$

A vetemedési mérték a csavarással kapcsolatos vizsgálatokban a keresztmetszet egy pontjának helyzetkoordináta-szerű jellemzője, és hasonló a feszültségek számítása során, a hajlított tartó semleges tengelyétől mért távolsághoz.

Az A.18.4.a. ábrán középvonalával vázolt rúdelem vetemedési mértékét vizsgáljuk az  $O_1$  pont körül elcsavarva a szelvényt a középvonal A pontja körül kiragadott elemi szélességű sáv elmozdulásaival. A  $\mathcal{G}$  elcsavarodás hatására az A ponton átmenő alkotó  $\alpha = r \cdot \mathcal{G}$  szöggel fordul el (A.18.4.b. ábra). Az alkotó elmozdulásának  $\alpha_n$  komponense a középvonalra merőleges (A.18.4.c. ábra), ebből nem keletkezik a keresztmetszet síkjára merőleges elmozdulás, feltételezve a “kis-mozgások” elvének érvényességét, az  $\alpha_t$  komponens a középvonallal párhuzamos (A.18.d. ábra). Mivel a középsíkban nem keletkeznek nyírófeszültségek, a sáv oldalszögei nem módosulnak, ez csak akkor lehetséges, ha a keresztmetszet pontjai eredeti síkjukból kilépnek (A.18.4.e. ábra):

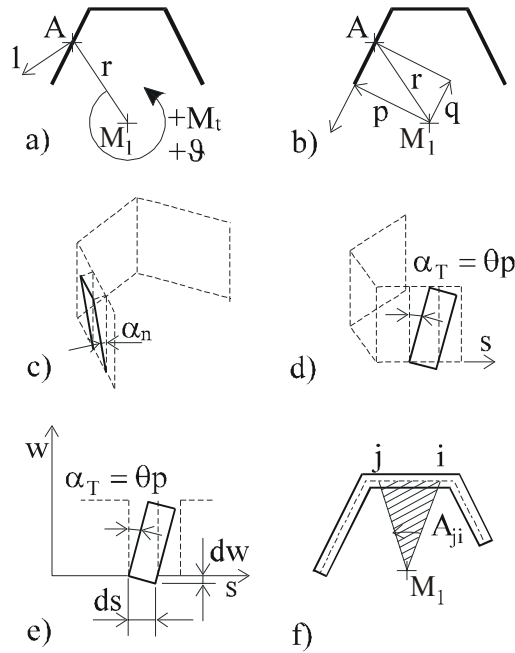
$$dw = -\alpha_t ds = -\theta p ds \quad \text{vagy}$$

$$d\omega = -p ds \quad (4)$$

A keresztmetszet középvonalán felvett két ponthoz (j és i pont) tartozó vetemedési mérték közötti különbség

$$\omega_j - \omega_i = -\int_i^j p ds = 2A_{ji} \quad (5)$$

ahol  $A_{ji}$  a középvonal és a csavarási tengelytől a felvett két ponthoz húzott sugár által bezárt terület (A.18.4.f. ábra).



A.18.4. ábra. Nyitott keresztmetszet vetemedési mértéke

(c) A gátolt csavarásból származó **gátolt csavarási normálfeszültségek**

Ha a csavarónyomaték a rúd hossza mentén változik, vagy ha a keresztmetszet vetemedését gátoljuk, az elcsavarodás fajlagos, egységhosszra eső értéke is az x ordinátától függ:

$$\vartheta(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (6)$$

ahol  $\varphi(x)$  a keresztmetszet elfordulása. Így az alkotó megnyúlása, a  $dw$  hosszváltozás fajlagos értéke

$$\varepsilon = \frac{dw}{dx} \cdot \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \quad (7)$$

A megnyúláshoz viszont normálfeszültség - ún. gátolt csavarási normálfeszültség - is tartozik:

$$\sigma_\omega = E\varepsilon = E\omega \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \quad [\text{kN/cm}^2] \quad (8)$$

A kérdés általános elméletét Vlaszov dolgozta ki 1936-1939-ben.

(d) **A csavarási (nyírási) középpont**

Az x ordinátával meghatározott keresztmetszeten belül a keletkező  $\sigma_\omega$  gátolt csavarási normálfeszültségek eloszlása az  $\omega$  vetemedési mértékek eloszlásával egyezik meg. Ha a rúdra külső teherként csak csavarónyomaték hat, a gátolt csavarási normálfeszültségeknek önmagukban egyensúlyban levő erőrendszert kell alkotniuk:

$$\int_A \sigma_\omega dA = E \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \int_A \omega dA = 0 \quad \text{vagy} \quad \int_A \omega dA = 0$$

$$\int_A \sigma_{\omega} y dA = E \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \int_A \omega y dA = 0 \quad \text{vagy} \quad \int_A \omega y dA = 0 \quad (9)$$

$$\int_A \sigma_{\omega} z dA = E \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \int_A \omega z dA = 0 \quad \text{vagy} \quad \int_A \omega z dA = 0$$

E feltételek tetszőlegesen felvett helyzetű csavarási tengely esetében általában nincsenek kielégítve. Gátolt csavarás esetén a rúd elfordulása azon tengely körül jön létre, amelynek esetében az előbbi egyensúlyi egyenletekben megfogalmazott feltételek teljesülnek, ez a rúd vonatkozásában a csavarási tengely, a keresztmetszet vonatkozásában a csavarási középpont. Gátolt csavaráskor ez a tengely egyenes marad, a többi alkotó elgörbül. Ezen megállapítás kényszertengely körül létrejövő gátolt csavarás esetén, amikor külső kényszerrel (megtámasztással) egyik alkotó meggörbülését megakadályozzuk, érvényét veszti.

Az  $O(y_{\omega}, z_{\omega})$  csavarási tengely meghatározását az előző feltételek alapján Vlaszov hajtotta végre.

Vékony-falú szelvények esetében feltételezhető, hogy a hajlításból keletkező nyírófeszültségek a középvonallal párhuzamosak, és a vastagság mentén egyenletesen oszlanak meg. Ha a hajlítást csavarás nem kíséri, ezen nyírófeszültségek eredőjének a nyírási középponton kell átmenni, és bizonyítható, hogy ez - rugalmas anyag feltételezése esetén - egybeesik a csavarási középponttal.

(e) **Gátolt csavarási nyírófeszültségek.** A gátolt csavarónyomaték és kettős nyomaték fogalma

A gátolt csavarás során a keresztmetszet egyes pontjaiban a  $\sigma_{\omega}$  gátolt csavarási normálfeszültségek egyensúlyban levő erőrendszert alkotnak, mivel azonban nagyságuk a rúd hossza mentén  $\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2}$  változása miatt nem állandó, az egyensúlyi feltételek kielégítése újabb nyírófeszültségek, az ún. gátolt csavarási nyírófeszültségek létrejöttét kívánja meg.

$$\tau_{\omega} = -E \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \cdot \frac{1}{t} S_{\omega} \quad [\text{kN/m}^2] \quad (10)$$

ahol  $S_{\omega} = \int_0^s \omega t ds$  számítási segédmenyiség,  $[\text{m}^4]$ .

A keresztmetszet mentén ható gátolt csavarási nyírófeszültségek eredője

$$M_{\omega} = \int \tau_{\omega} t p ds \quad (11)$$

gátolt csavarónyomaték, ahol  $t$  az elem vastagsága;  $p$  a gátolt csavarási nyírófeszültségek karja a csavarási tengelyre, így

$$M_{\omega} = -E \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \int_A \omega^2 dA \quad [\text{Nm}] \quad (12)$$

$$\text{ahol: } I_{\omega} = \int_A \omega^2 dA \quad [\text{m}^6] \quad (13)$$

a csavarási középpontra vonatkoztatott gátolt csavarási inercia nyomaték.

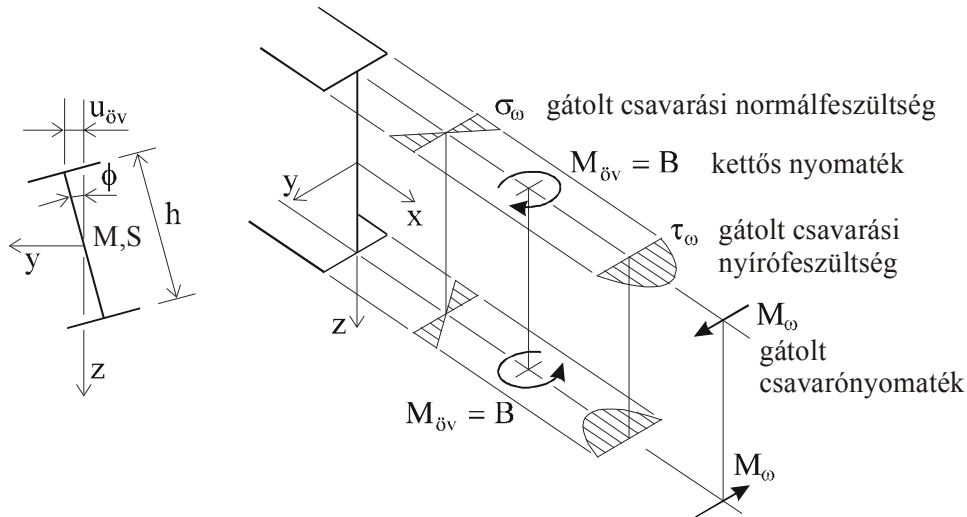
A gátolt csavarási normálfeszültségek hatására

$$B = \int_A \sigma_\omega \omega dA = EI_\omega \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} \quad [\text{Nm}^2] \quad (14)$$

kettős nyomaték keletkezik.

$$M_\omega = -\frac{dB}{dz}, \quad (15)$$

a B kettős nyomaték a gátolt csavarási normál feszültségek "képzetes" eredőjének tekinthető. (Szokás a B kettős nyomatékot binyomatéknak is nevezni a szakirodalomban.)



A.18.5. ábra. Kettős nyomaték

Vizsgáljuk meg egy I szelvényű tartó feszültségeit és igénybevételeit (A.18.5. ábra).

Az  $M_T^k$  külső csavarónyomatékot a két belső csavarónyomaték egyensúlyozza:

$$M_T^k = GI_T \frac{d\varphi(x)}{dx} - EI_\omega \frac{d^3 \varphi(x)}{dx^3} \quad (16)$$

A differenciálegyenlet megoldása során az integrálási állandókat a kerületi feltételeknek (megtámasztási viszonyoknak) megfelelően kell megállapítani.

Alapesetek:

- Szabad rúdvég keresztmetszetére külső normál feszültségek nem működnek, tehát gátolt csavarási normál feszültségek sem jönnek létre ( $\sigma_\omega = 0$ ), így  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$ ; és az  $M_T^k$  értéke a rúdvégre ható csavarónyomaték értékével egyezik meg. (17)
- Villásan megfogott rúdvég keresztmetszetében az elfordulást megakadályozzuk:  $\varphi = 0$ ; de a keresztmetszet vetemedését (pontjainak síkból való kilépését) nem, így  $\sigma_\omega = 0$ ;  $\frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0$  (18)
- Teljesen befogott rúdvég keresztmetszetében az elfordulást megakadályozzuk:  $\varphi = 0$ ; de megakadályozzuk a keresztmetszet vetemedését is:  $w = \omega \vartheta = \omega \frac{d\varphi}{dx} = 0$  feltételből  $\frac{d\varphi}{dx} = 0$ . (19)

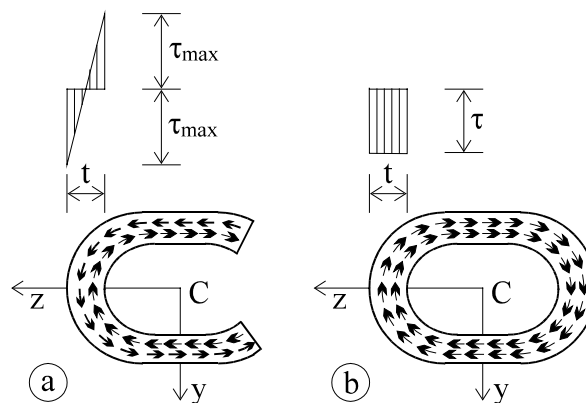
A csavarási feladat megoldásához szükséges keresztmetszeti jellemzők táblázatos feldolgozásával kapcsolatban a szakirodalomra utalunk (Csellár-Halász-Réti (1965), Csellár-Szépe (1993), Iványi (2004)).

### A.18.1.2. Vékonyfalú zárt szelvényű rudak csavarása

Egyenes tengelyű, állandó keresztmetszetű zárt szelvényű rudak csavarásakor általában elegendő csupán az egyszerű csavarásból keletkező  $\tau_T$  nyírófeszültséget meghatározni a Bredt-féle képlettel:

$$\tau_T = \frac{M_T}{2A_0 t} \quad (20)$$

ahol  $A_0$  a keresztmetszet zárt részét alkotó lemezek középvonala által bezárt terület;  $t$  a szelvény falvastagsága a vizsgált helyen.



A.18.6. ábra. Nyitott és zárt szelvények csavarása

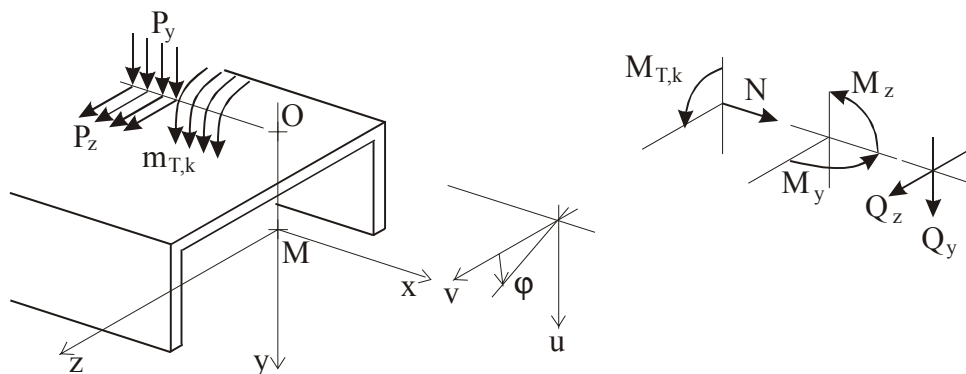
A csavarásból származó nyírófeszültséget akkor is ezzel a képlettel számítjuk ki, ha a keresztmetszet zárt és nyitott részekből áll és figyelmen kívül hagyjuk a nyitott keresztmetszetrészeket.

A nyitott és zárt szelvényekben jelentősen különböző nyírófolyam- és nyírófeszültség-eloszlást a A.18.6. ábra mutatja.

### A.18.2. Számítási analógiák a hajlítási és csavarási feladatok megoldásához

A tervezői gyakorlatban leginkább hajlított tartók fordulnak elő, ezért a csavarásból keletkező igénybevételek és feszültségek számítását hajlított tartó igénybevételeinek és feszültségeinek számításához hasonlítják.

A csavarás hatására keletkező igénybevételek, feszültségek azonban a csavarás és a hajlítás differenciálegyenleteinek hasonlósága alapján is számíthatók.



A.18.7

### A.18.7. ábra. Csavart rúd keresztmetszet terhei és elmozdulásai

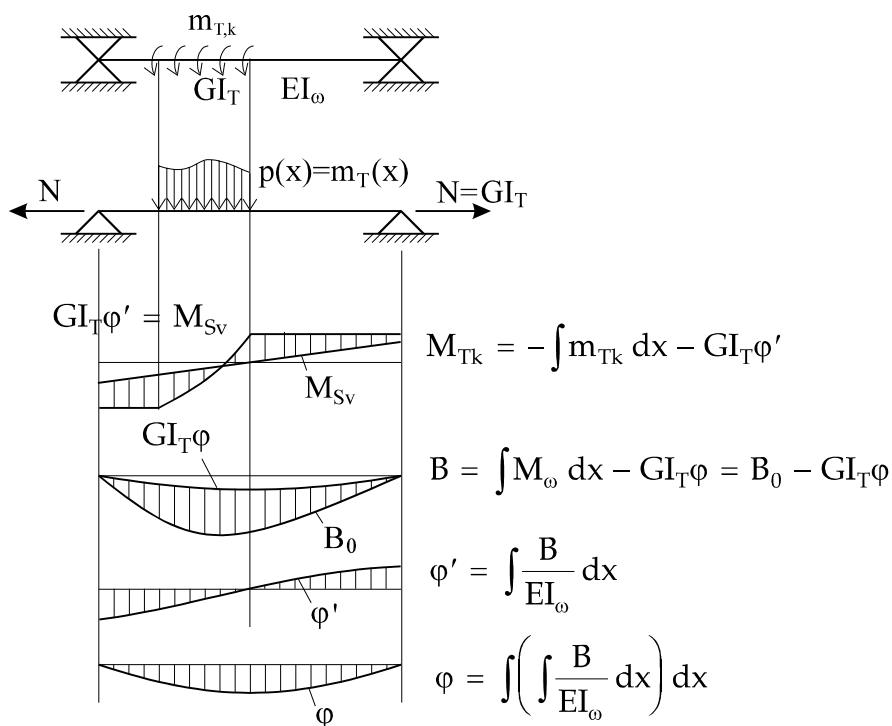
Ez az analógia jelentősen megkönnyíti a csavarásvizsgálatot, mivel a hajlított-húzott rúd általános egyenlete síkbeli hajlított szerkezetek esetén a másodrendű elmélet alapja. A másodrendű elmélet szerint a nyomóerővel terhelt szerkezetek igénybevételeit az ún. stabilitási függvényekkel számítják. A nyomóerő helyett húzóerőt feltételezve az analógia megoldja a csavarási feladatot. Az  $(GI_T \approx N)$  előjelváltása következtében a trigonometrikus függvények helyett hiperbolikus függvényeket kell alkalmazni.

Törtvonalú tartóra az analógia nem alkalmazható közvetlenül, de egyenes tengelyű tartókra pontos megoldást ad.

A keresztmetszetet, a működő terheket és az igénybevételeket a *A.18.7. ábra* mutatja.

Hajlított tartó és külpontosan húzott vagy nyomott rúd analóg egyenleteit az *A.18.1. táblázat*, külpontosan húzott, ill. csavarásra igénybevett rúd analógiáit az *A.18.2. táblázat* mutatja. A hajlítás és a csavarás képleteit az *A.18.3. táblázat* hasonlítja össze. A megtámasztási feltételek analógiáit az *A.18.4. táblázat* tartalmazza.

Az *A.18.8. ábra* a hajlítási analógia alapján megoldható egyszerű feladat elvi megoldását mutatja.



A.18.8. ábra. Egyszerű feladat elvi megoldása

A.18.1. táblázat - Első- és másodrendű hajlítás összehasonlítása

Összefüggés	Hajlított tartó	Külpontosan húzott vagy nyomott rúd
Alapegyenlet	$EI_z u'''' = p_y$	$EI_z u'''' - Nu'' = p_y$
Nyíróerő	$EI_z u'''' = \int p_y dx = -\bar{Q}_y$	$EI_z u'''' = \int p_y dx + Nu' =$ $= -\bar{Q}_y + Nu' = -Q_y$



Nyomaték	$EI_z u'' = \int (-Q_y) dx = -\bar{M}_z$	$EI_z u'' = \int (-Q_y) dx + Nu =$ $= -\bar{M}_z + Nu = -M_z$
Elfordulás	$EI_z u' = \int \bar{M}_z dx$	$EI_z u' = \int M_z dx$
Eltolódás	$EI_z u = \int \left( \int \bar{M}_z dx \right) dx$	$EI_z u = \int \left( \int M_z dx \right) dx$

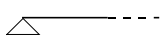
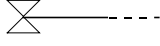

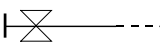
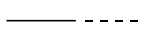
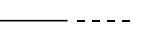
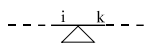
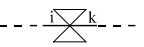
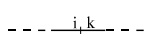
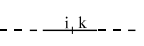
A.18.2. táblázat - Hajlítási és csavarási feladat megoldása

Külpontosan húzott rúd	Csavarásra igénybe vett rúd
$EIu'''' - Nu'' = p$	$EI_\omega \varphi'''' - GI_T \varphi'' = m_{T,k}$
$EIu'' - Nu = \int \left( \int p dx \right) dx + C_1 x + C_2$	$EI_\omega \varphi'' - GI_T \varphi = \int \left( \int m_{T,k} dx \right) dx + C_1 x + C_2$
$EIu'' - Nu = -M_0$	$EI_\omega \varphi'' - GI_T \varphi = -M_{T,0}$
$\varepsilon = \ell \sqrt{\frac{N}{EI}}; \xi = \frac{x}{\ell}$	$\varepsilon_\omega = \ell \sqrt{\frac{GI_T}{EI_\omega}} = \ell \lambda_\omega; \xi = \frac{x}{\ell}$
$u = A \operatorname{sh} \varepsilon \xi + B \operatorname{ch} \varepsilon \xi +$ $+\frac{1}{N} \left[ M_0 + \left( \frac{\ell}{\varepsilon} \right)^2 M_0'' \right]$	$\varphi = A \operatorname{sh} \varepsilon_\omega \xi + B \operatorname{ch} \varepsilon_\omega \xi +$ $+\frac{1}{GI_T} \left[ M_{T,0} + \left( \frac{\ell}{\varepsilon_\omega} \right)^2 M_{T,0}'' \right]$

A.18.3. táblázat - Hajlítási és csavarási igénybevételek és feszültségek összehasonlítása

Hajlítás	Csavarás
-	Egyszerű csavaráshoz tartozó csavarónyomaték, Nmm $M_T = GI_T \varphi'$
Nyíróerő, N $Q_y = -\frac{dM_z}{dx} = EI_z u'''$	Gátolt csavarónyomaték, Nmm $M_\omega = -\frac{dB}{dx} = -EI_\omega \varphi'''$
Hajlítónyomaték, Nmm $M_z = -EI_z u''$	Kettős nyomaték, Nmm <sup>2</sup> $B = EI_\omega \varphi''$
-	Egyszerű csavarásból keletkező nyírófeszültség, N/mm <sup>2</sup> $\tau_T = \frac{M_T}{I_T} \eta = GI_T \varphi' \frac{t}{I_T}$
Hajlításból keletkező nyírófeszültség, N/mm <sup>2</sup> $\tau_y = \frac{-EI_z u''' S_z}{t I_z} = \frac{Q_y S_z}{t I_z}$	Gátolt csavarási nyírófeszültség, N/mm <sup>2</sup> $\tau_\omega = \frac{-EI_\omega \varphi''' S_\omega}{t I_\omega} = \frac{M_\omega S_\omega}{t I_\omega}$
Hajlításból keletkező normálfeszültség, N/mm <sup>2</sup> $\sigma_x = -EI_z u'' \frac{y}{I_z} = M_z \frac{y}{I_z}$	Gátolt csavarási normálfeszültség, N/mm <sup>2</sup> $\sigma_\omega = -EI_\omega \varphi'' \frac{\omega}{I_\omega} = B \frac{\omega}{I_\omega}$

A.18.4. táblázat - Hajlítási és csavarási kerületi feltételek összehasonlítása

A megtámasztás módja	Hajlítás	Csavarás
Csuklós, villás	 $u = 0$ $u'' = 0; \begin{pmatrix} M_z = 0 \\ \sigma_x = 0 \end{pmatrix}$	 $\varphi = 0$ $\varphi'' = 0; \begin{pmatrix} B = 0 \\ \sigma_\omega = 0 \end{pmatrix}$
Befogás	 $u = 0$ $u' = 0$	 $\varphi = 0$ $\varphi' = 0$
Szabad rúdvég	 $u''' = 0; \begin{pmatrix} Q_y = 0 \\ \tau_y = 0 \end{pmatrix}$ $u'' = 0; \begin{pmatrix} M_z = 0 \\ \sigma_x = 0 \end{pmatrix}$	 $\varphi = 0; \begin{pmatrix} M_\omega = 0 \\ \tau_\omega = 0 \end{pmatrix}$ $\varphi'' = 0; \begin{pmatrix} B = 0 \\ \sigma_\omega = 0 \end{pmatrix}$
Közbenső csuklós, villás	 $u = 0$ $u'_i = u'_k$ $u''_i = u''_k; (M_i = M_k)$	 $\varphi = 0$ $\varphi'_i = \varphi'_k$ $\varphi''_i = \varphi''_k; (B_i = B_k)$
Közbenső keresztmetszet	 $u_i = u_k$ $u'_i = u'_k$ $u''_i = u''_k$	 $\varphi_i = \varphi_k$ $\varphi'_i = \varphi'_k$ $\varphi''_i = \varphi''_k$