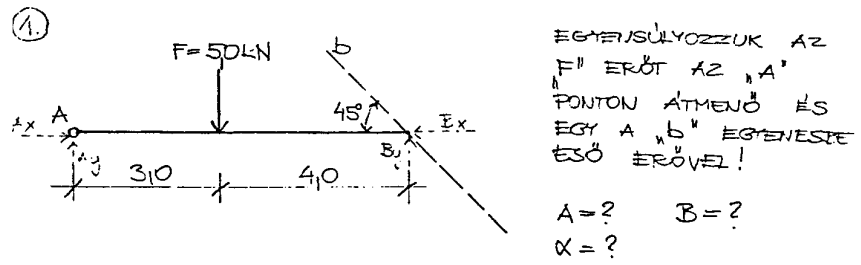


1.1. | Erőrendszerek egyensúlyozása



$$\sum M_A = 50 \cdot 3 - B_y \cdot 7 = 0$$

$$B_y = \frac{15}{7} = 2,14 \text{ kN} (\uparrow) \quad B_x = 2,14 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 3,03 \text{ kN} (\nearrow)$$

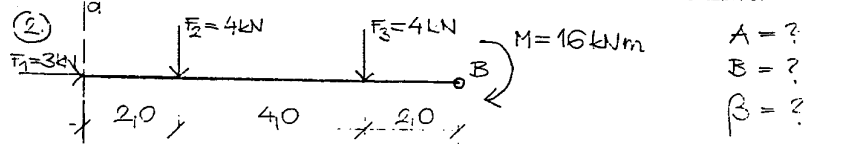
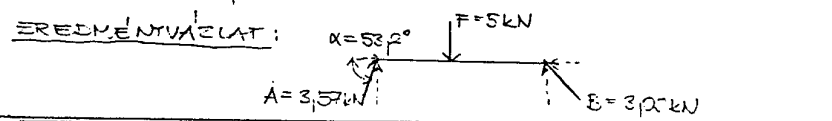
$$\sum M_B = -50 \cdot 4 + A_y \cdot 7 = 0$$

$$A_y = \frac{20}{7} = 2,86 \text{ kN} (\uparrow) \quad \sum F_y = 0 \rightarrow -2,86 + 50 - 2,14 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad A_x - 2,14 = 0 \quad A_x = 2,14 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$A = \sqrt{2,14^2 + 2,86^2} = 3,57 \text{ kN} (\nearrow)$$

$$\tan \alpha = \frac{2,86}{2,14} = 1,336 \quad \alpha = 53,2^\circ$$



$$\sum M_A = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 16 - B_y \cdot 8 = 0$$

$$\sum F_x = 0 \quad 3 - B_x = 0$$

$$B_y = 6 \text{ kN} (\uparrow) \quad B_x = 3 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$B = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6,71 \text{ kN} (\nearrow) \quad \tan \beta = \frac{6}{3} = 2 \quad \beta = 63,4^\circ$$

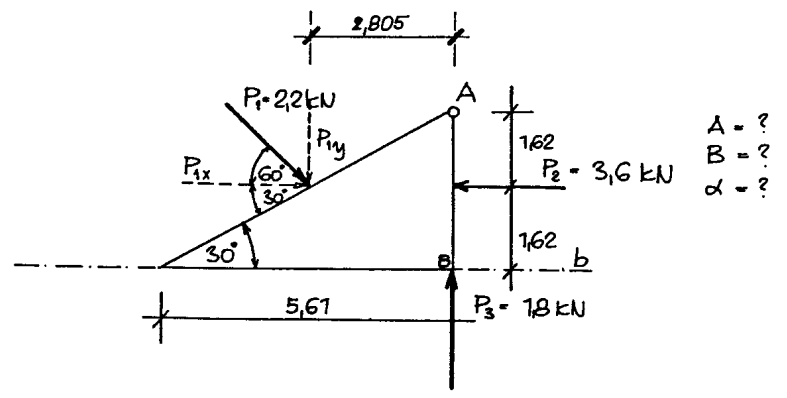
$$\sum F_y = 0$$

$$-A_y + 3 + 4 - 6 = 0 \quad A_y = 2 \text{ kN} (\uparrow)$$

EREDMÉNYVÁLZLAT:

1.2. | Egyensúlyozás

Egyensúlyozzuk az erőrendszert egy az 'A' ponton átmenő és egy a 'b' egyenesre eső erővel!



$$P_x = 2,2 \cdot \cos 60^\circ = 1,1 \text{ kN}$$

$$P_y = 2,2 \cdot \sin 60^\circ = 1,905 \text{ kN}$$

$$\sum M(A) = 1,62 \cdot (3,6 - 1,1) - 2,805 \cdot 1,905 + 3,24 \cdot B = 0$$

$$B = +0,399 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum M(b) = 1,62 \cdot (3,6 - 1,1) - 2,805 \cdot 1,905 + 3,24 \cdot A_x = 0$$

$$A_x = 2,90 \text{ kN} (\rightarrow)$$

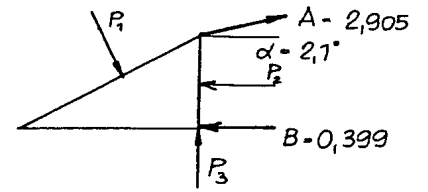
$$\sum P_y = +1,905 - 1,8 + A_y = 0$$

$$A_y = -0,105 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A = (2,9^2 + 0,105^2)^{\frac{1}{2}} = 2,905 \text{ kN}$$

$$\alpha = \arctan \frac{0,105}{2,905} = 2,1^\circ$$

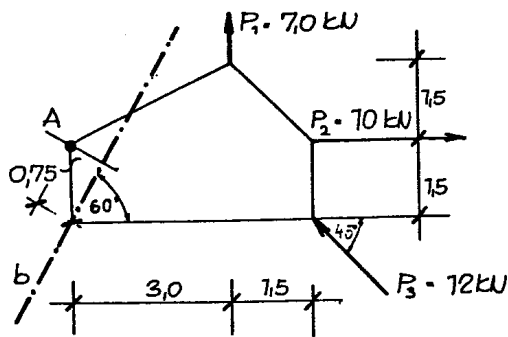
Eredményvázlat



1./3.

Egyensúlyozás

Erőrendszert egyensúlyozása egy adott ponton (A) körüli és adott hatásvonalú (l) erővel.



Szögfüggvények

$$\cos 45^\circ = 0,707$$

$$\sin 45^\circ = 0,707$$

$$\cos 60^\circ = 0,5$$

$$\sin 60^\circ = 0,866$$

$$1.1. \sum M_A = 0$$

$$-3 \cdot 7 + 8,48 \cdot 1,5 - 8,48 \cdot 4,5 - B \cdot 0,75 = 0$$

$$-21 + 12,72 - 38,16$$

$$B = \frac{-46,44}{0,75} = -61,92 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$B_y = 53,62 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$B_x = 30,96 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$1.2. \sum P_{ix} = -30,96 + 10 - 8,48 + A_x = 0$$

$$A_x = 29,44 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\sum P_{iy} = +53,62 - 7 - 8,48 + A_y = 0$$

$$A_y = -38,14 \text{ kN} (\uparrow)$$

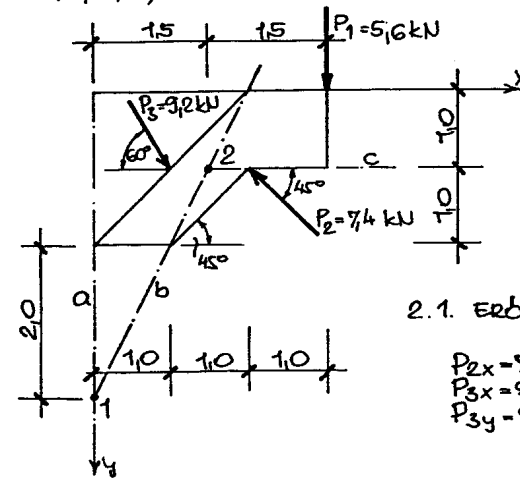
$$A = \sqrt{29,44^2 + 38,14^2} = \sqrt{2321,37} = 48,18 \text{ kN}$$

$$A = 48,18 \text{ kN} (\nearrow)$$

1./4.

Egyensúlyozás

Erőrendszert egyensúlyozása 3 adott hatásvonalú (a, b, c) erővel.



2.1. ERŐFELBONTÁS

$$P_{2x} = 7,4 \cdot 0,707 = 5,23 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$P_{3x} = 9,2 \cdot 0,5 = 4,6 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$P_{3y} = 9,2 \cdot 0,866 = 7,9672 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$2.2. \sum M_1 = 0$$

$$+7,97 \cdot 1 + 4,6 \cdot 3 + 5,6 \cdot 3 - 5,23 \cdot 2 - 5,23 \cdot 3 - C \cdot 3 = 0$$

$$+7,97 + 13,8 + 16,8 - 10,46 - 15,69 - C \cdot 3 = 0$$

$$C = \frac{12,42}{3} = 4,14 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$2.3. \sum M_2 = 0$$

$$-A \cdot 1,5 - 7,97 \cdot 0,5 - 5,23 \cdot 0,5 + 5,6 \cdot 1,5 = 0$$

$$-1,5A - 3,99 - 2,62 + 8,4$$

$$\frac{1,79}{1,5} = A$$

$$A = 1,19 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$2.4. \sum P_{ix} = 0$$

$$+4,6 - 5,23 - 4,14 + B_x = 0 \quad B_x = 4,77 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$2.5. \sum P_{iy} = 0$$

$$+5,6 - 5,23 + 7,96 + 1,19 + B_y = 0 \quad B_y = -9,52 \text{ kN} (\uparrow)$$

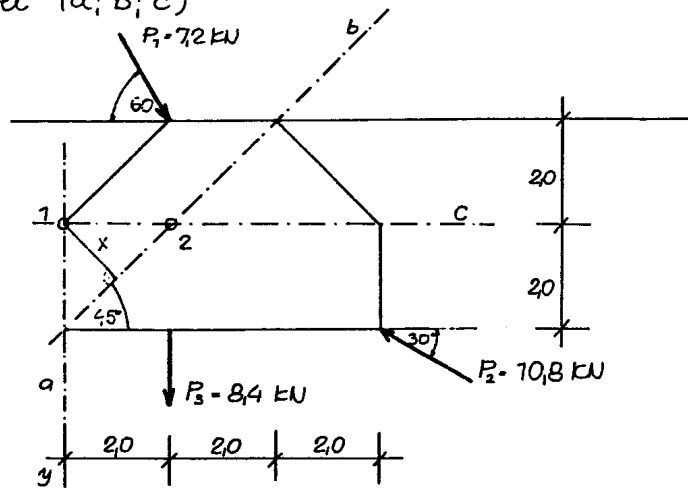
$$B = \sqrt{4,77^2 + 9,52^2} = 10,64 \text{ kN}$$

$$B = 10,64 \text{ kN} (\nearrow)$$

11./5.-6.

Egyensúlyozás

5) Erőrendszert egyensúlyozása 3 adott hatásvonalú erővel (a; b; c)



szögfüggvények

$\cos 60^\circ = 0,5$	$\sin 30^\circ = 0,5$
$\cos 30^\circ = 0,866$	$\sin 60^\circ = 0,866$
$\cos 45^\circ = 0,707$	$\sin 45^\circ = 0,707$

1.) Erőfelbontás.

$10,8 \cdot 0,866 = 9,35 \text{ kN} (\leftarrow)$	$72 \cdot 0,866 = 62,4 \text{ kN} (\downarrow)$
$10,8 \cdot 0,5 = 5,4 \text{ kN} (\uparrow)$	$72 \cdot 0,5 = 36 \text{ kN} (\rightarrow)$

2.) $\sum M_i = 0$

$$-3,6 \cdot 2 - 62,4 \cdot 2 - 8,4 \cdot 2 - 9,35 \cdot 2 + 5,4 \cdot 6 - B \cdot 1,414 = 0$$

$$-7,2 - 124,8 - 16,8 - 18,7 + 32,4 - 1,414 B = 0$$

$$B = \frac{227,8}{1,414} = 161,1 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$B_x = 11,39 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$B_y = 11,39 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$x = \cos 45^\circ \cdot 2$$

$$x = 1,414$$

3.)

$$\sum M_2 = 0$$

$$A \cdot 2 + 3,6 \cdot 2 + 9,35 \cdot 2 - 5,4 \cdot 4 = 0$$

$$+7,2 + 18,7 - 21,6 = -2A$$

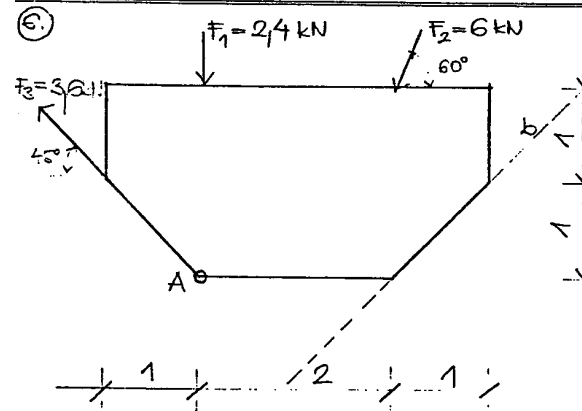
$$A = 2,15 \text{ kN} (\downarrow)$$

4.)

$$\sum F_x = 0$$

$$9,35 - 3,6 - 11,39 + C = 0$$

$$C = 5,64 \text{ kN} (\leftarrow)$$



ERŐRENDSZER
EGYENSÚLYOZÁSA
ADOTT HATÁSVON-
NALÚ (b) ÉS
Egy adott pont-
TON A HATÁSV
ERŐVEL (A)

$$A = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

6.1. ERŐFELBONTÁS

$$F_{2x} = 6 \cdot 0,5 = 3 \text{ kN} (\leftarrow) \quad F_{2y} = 6 \cdot 0,866 = 5,2 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$F_{3x} = 3,6 \cdot 0,707 = 2,55 \text{ kN} (\leftarrow) \quad F_{3y} = 2,55 \text{ kN} (\uparrow)$$

6.2. $\sum M_A = 0$

$$5,2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - B \cdot 1,414 = 0 \quad B = \frac{4,4}{1,414} = 3,11 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$B_x = B_y = 2,2 \text{ kN}$$

(→) (↑)

6.3. $\sum F_x = 0$

$$-2,55 - 3 + 2,2 + A_x = 0 \quad A_x = 3,35 \text{ kN} (\rightarrow)$$

6.4. $\sum F_y = 0$

$$-2,55 + 2,4 + 5,2 - 2,2 + A_y = 0 \quad A_y = 2,85 \text{ kN} (\uparrow)$$

6.5. $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$

$$A = \sqrt{3,35^2 + 2,85^2} = 4,4 \text{ kN} (\nearrow)$$

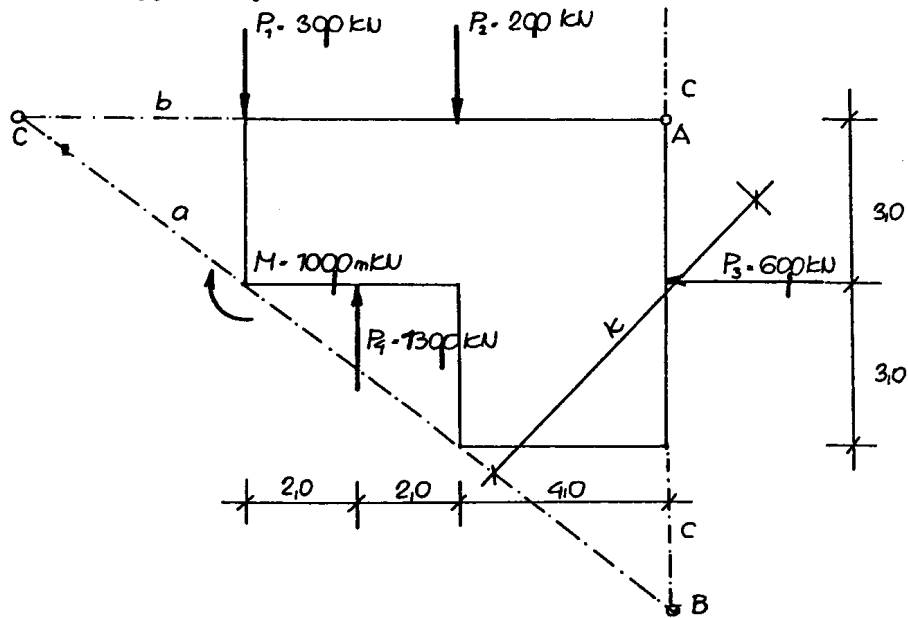
6.6. α

$$\tan \alpha = \frac{2,85}{3,35} = 0,851 \quad \alpha = 40,4^\circ$$

1./7.

Egyensúlyozás

Keressük az a; b; c; egyenesele eső egyensúlyozó erőket!



$$\sum M(B) = 1000 - 8 \cdot 300 - 4 \cdot 200 - 6 \cdot 600 + 6 \cdot 1300 + 9 \cdot B = 0$$

$$B = -\frac{2000}{9} = \underline{\underline{222.2 \text{ kN} (\leftarrow)}}$$

$$\sum M(c) = 1000 + 4 \cdot 300 + 8 \cdot 200 + 3 \cdot 600 - 6 \cdot 1300 + 12C = 0$$

$$C = \frac{2200}{12} = \underline{\underline{183.3 \text{ kN} (\downarrow)}}$$

$$k = \frac{12 \cdot 9}{15} = 7.2$$

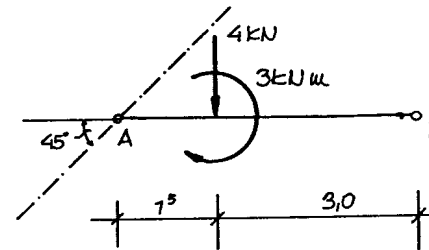
$$\sum M(A) = 1000 - 8 \cdot 300 - 4 \cdot 200 + 3 \cdot 600 + 6 \cdot 1300 + 7.2 \cdot A = 0$$

$$A = -\frac{7400}{7.2} = \underline{\underline{1028 \text{ kN} (\uparrow)}}$$

1./8.-9.

Egyensúlyozás

8. Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A és B ponton átmenő erővel.



$$\sum M_A = 0$$

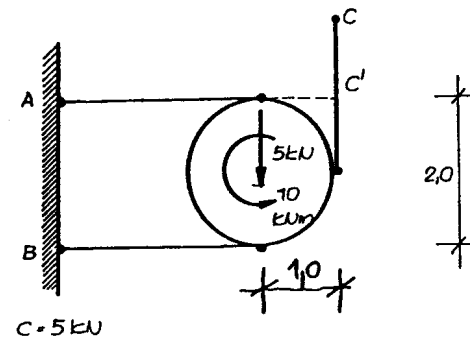
$$4 \cdot 1.5 + 3.0 - 4.5 B_v = 0$$

$$B_v = 2 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A_v = 2 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A_H = B_H = 2 \text{ kN}$$

9. Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A; B; C; ponton keresztül menő erővel.



$$C = 5 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 2 B_H - 1.5 - 10 = 0$$

$$B_H = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

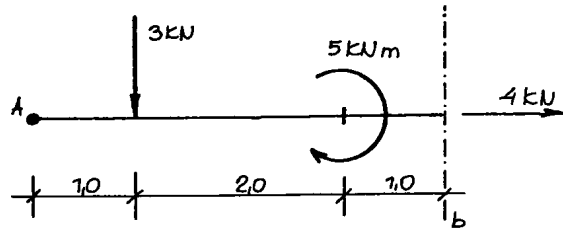
$$A_H = 7.5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$C_H = 5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

11./10.-11.

Egyensúlyozás

10.) Egyensúlyozzuk az erőrendszert az A ponton átmenő és a 'b' hatásvonalon levő erővel.

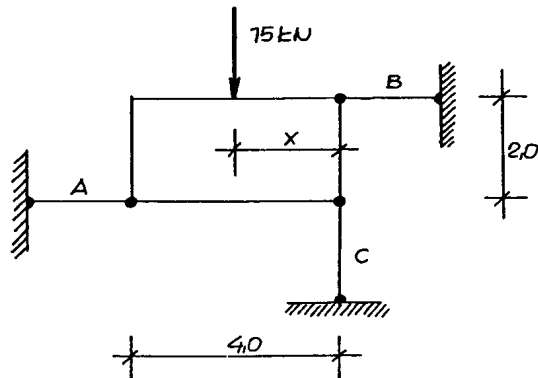


$$\sum H = 0 \quad \Delta_H = 4 \text{ kN } (-)$$

$$\sum M_A = 0 \quad 3 \cdot 10 + 5 - 4B = 0 \quad B = 2 \text{ kN } (+)$$

$$\Delta_V = 1 \text{ kN } (+)$$

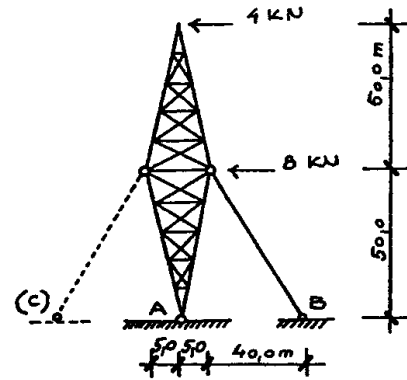
11.) $X; A; B; C = ?$ Ka mindhárom támaszcsoportban keletkező erő arányos nagyságú?



$x = 2 \text{ m}$; mert az egyensúlyt így két erőpár biztosítja $A = B = C = 15 \text{ kN}$

STATIKAILAG HATÁROZOTT TARTÓK REAKCIÓERŐI

HATÁROZZUK MEG AZ 'A' ÉS 'B' REAKCIÓERŐKET



$$\sum M_A = -4,00 \cdot 100,0 - 8,0 \cdot 50,0 + B_V \cdot 45,0 = 0$$

$$B_V = \frac{800}{45,0} = 17,80 \text{ kN } (\downarrow)$$

ARÁNYOSSÁGGAL $B_H = \frac{40,00}{50,0} B_V = 14,22 \text{ kN } (\rightarrow)$

'A' ÖSSZETEVŐI A VETÜLETI TÉTELEKBŐL:

$$\sum H = -4,0 - 8,00 - A_H + 14,22 = 0$$

$$A_H = 2,22 \text{ kN } (\leftarrow)$$

$$\sum V = A_V - 17,80 = 0$$

$$A_V = 17,80 \text{ kN } \uparrow$$

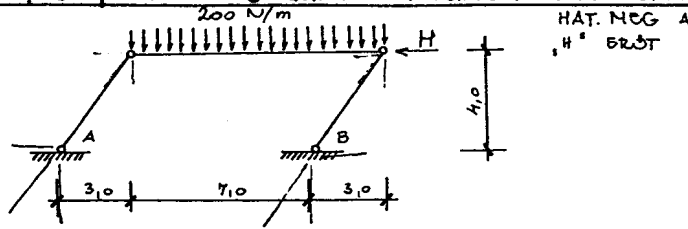
A TÁMASZERŐK TEGYÁT:

$$A = \sqrt{2,22^2 + 17,80^2} = \underline{\underline{17,92 \text{ kN}}}$$

$$B = \sqrt{14,22^2 + 17,80^2} = \underline{\underline{22,80 \text{ kN}}}$$



II./13. Statikailag határozott tartók reakcióerői



A FELSŐ GERENDA A KÉT FERDE LÁBRA

$$A_v = B_v = \frac{10,0 \cdot 200}{2} = 1000 \text{ N}$$

NAGYSÁGU FÜGGŐLEGES TÁMASZERŐ ÖSSZETEVŐKÉT ADÁT.

A NYOMATÉK EGyenLET: $\sum M_H = 10,0 \cdot 200,0 \cdot 8,00 - 1000 \cdot 10,0 - H \cdot 4,0 = 0$

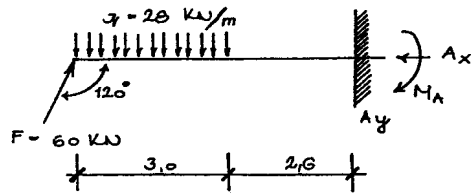
$$H = \frac{16000 - 10000}{4,00} = 1500 \text{ N}$$

$$(A_v = B_v = 1000 \text{ N} (\uparrow) \quad A_H = B_H = \frac{3}{4} \cdot 1000 = 750 \text{ N} (\rightarrow))$$

$$\sum H = 0 \quad 750 + 750 - H = 0 \quad H = 1500 \text{ N} (\leftarrow)$$

II./14.

HAT. MEG A TARTÓK REAKCIÓ ERŐIT



$$\sum F_x = 0$$

$$60 \cdot \cos 60^\circ + A_x = 0$$

$$A_x = -60 \cdot \cos 60^\circ = -30 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 0$$

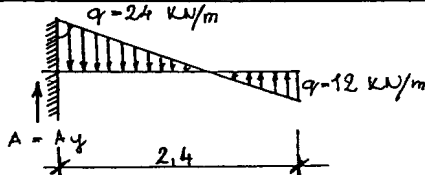
$$-60 \cdot \sin 60^\circ + 3,0 \cdot 28 + A_y = 0$$

$$A_y = -32,04 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M^{(A)} = -4,1 \cdot 3,0 \cdot 28 + 5,6 \cdot 60 \cdot \sin 60^\circ + M_A = 0$$

$$M_A = 53,42 \text{ kN}\cdot\text{m} (\curvearrowright)$$

II./15.



$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 1,6 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} - 0,8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} + A_y = 0$$

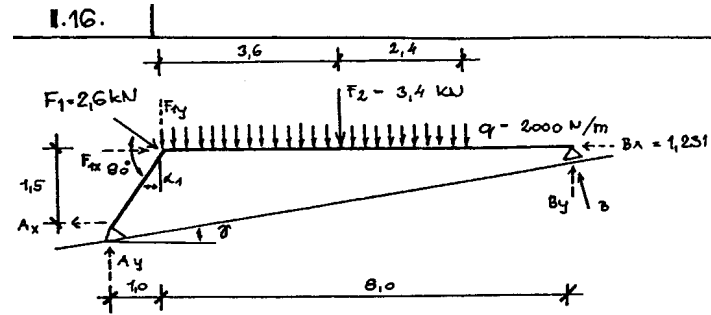
$$A_y = -14,4 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$A_y = -14,4 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M^{(A)} = 1,6 \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - 0,8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,6 + \frac{2 \cdot 0,8}{3}) + M_A = 0$$

$$M_A = -10,24 = 10,24 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

II.16.



$$\alpha_1 = \arccos \frac{1,0}{1,5} = 33,7^\circ \quad \theta = \arccos \frac{1,5}{9} = 9,462^\circ$$

$$F_{1x} = +2,6 \cdot \cos 33,7^\circ = +2,163 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = +2,6 \cdot \sin 33,7^\circ = +1,442 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = +1,5 \cdot 2,163 + 1,0 \cdot 1,442 + 4,6 \cdot 3,4 + 4,0 \cdot 6,0 \cdot 2,0 - 9,0 \cdot B \cdot \cos 9,462^\circ - 1,5 \cdot B \cdot \sin 9,462^\circ = 0$$

$$B = 7,488 \text{ kN} (\uparrow) \quad B_x = 7,488 \cdot \sin 9,462^\circ = 1,231 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$B_y = 7,488 \cdot \cos 9,462^\circ = 7,386 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_x = 2,163 - 1,231 + A_x = 0 \quad A_x = -0,932 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_y = 1,442 + 6,0 \cdot 2,0 + 3,4 - 7,386 - A_y = 0$$

$$A_y = 9,456 \text{ kN} (\uparrow)$$

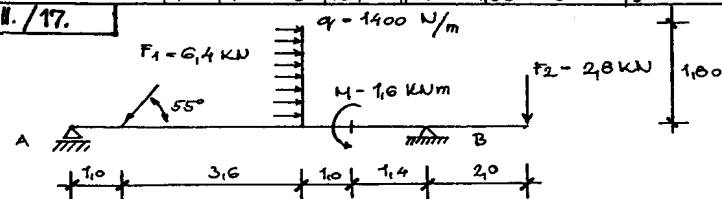
$$A = \sqrt{0,932^2 + 9,456^2} = 9,502 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\alpha_{(A)} = \arccos \frac{9,456}{9,502} = 84,57^\circ$$

ÖLENDŐZÉS

$$\sum M^{(B)} = 9,0 \cdot 9,456 - 1,5 \cdot 0,932 - 8,0 \cdot 1,442 - 5,0 \cdot 6,0 \cdot 2,0 - 4,4 \cdot 3,4 = 85,104 - 1,398 - 11,56 - 60 - 14,9 = 0$$

II./17.



$$F_{1x} = 6,4 \cdot \cos 55^\circ = 3,68 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = 6,4 \cdot \sin 55^\circ = 5,24 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 10 \cdot 5,24 + 0,8 \cdot 1,8 \cdot 1,4 + 9,0 \cdot 2,8 - 1,6 - 7,0 \cdot B_y = 0$$

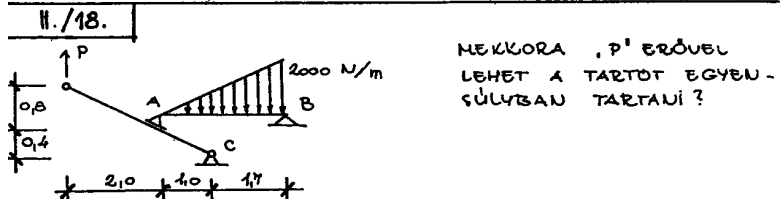
$$B_y = \frac{31,11}{7} = \underline{4,45 \text{ kN}} (\uparrow)$$

$$\sum F_x = -3,68 + 1,8 \cdot 1,4 + B_x = 0$$

$$B_x = \underline{1,16 \text{ kN}} (\rightarrow)$$

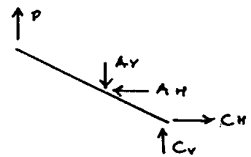
$$\sum F_y = A_y + 5,24 + 2,8 - 4,45 = 0$$

$$A = A_y = \underline{3,59 \text{ kN}} (\uparrow)$$



$$\sum M_B = A_y \cdot 2,7 - \frac{2,7 \cdot 200}{2} \cdot 0,8 = 0 \quad A_y = 90 \text{ N } \uparrow$$

$$A_u : A_H = 3,0 : 1,2 \quad A_H = 90 \cdot \frac{1,2}{3,0} = 36 \text{ N } \rightarrow$$



$$\sum M_C = 0$$

$$P \cdot 3,0 - 90 \cdot 1,0 - 36 \cdot 0,4 = 0$$

$$P = \underline{34,8 \text{ N}}$$

$$\sum F_x = 0 \quad C_H = A_H = 36 \text{ N } \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \rightarrow C_V$$

