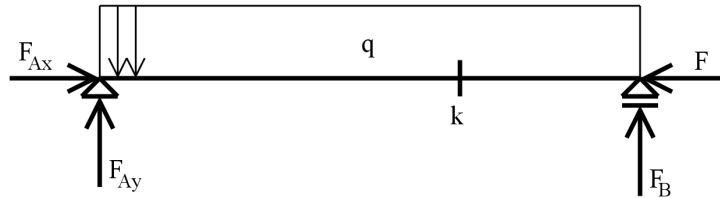


Belsőerő ábrák

A tartóra ható külső erők következtében a tartó anyagában, keresztmetszeteiben is keletkeznek erők, ezeket az erőket nevezzük belsőerőknek. Vizsgáljuk meg az alábbi tartót.



A tartónak a „k” keresztmetszetében keletkező igénybevételeit (belsőerőit) szeretnénk megállapítani. A koordináta-rendszert úgy helyeztük el, hogy a koordináta-rendszer x tengelye a tartó hossz tengelyével párhuzamos. A tartó egyensúlyban van, tehát a rá ható erők egyensúlyban lévő erőrendszer alkottak. Az egyensúlyban lévő erőrendszereknél a következő összefüggéseket ismerjük:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (\text{Az összes erő x irányú vetületeinek algebrai (előjeles) összege nulla})$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (\text{Az összes erő y irányú vetületeinek algebrai (előjeles) összege nulla})$$

$$\sum_{i=1}^n M_i = 0 \quad (\text{A sík bármely pontjára írt nyomatéki egyenlet nulla})$$

A tartót a „k” keresztmetszetenél két részre tudjuk bontani. Ekkor a tartónak a bal és a jobb oldali részére a következő összefüggéseket tudjuk felírni.

$$\sum M_i^{(k,b)} + \sum M_i^{(k,j)} = 0 \quad (\text{K keresztmetszettől balra és jobbra lévő nyomatékok összege nulla})$$

$$\sum F_{iy,b} + \sum F_{iy,j} = 0 \quad (\text{K keresztmetszettől balra és jobbra lévő y irányú erők összege nulla})$$

$$\sum F_{ix,b} + \sum F_{ix,j} = 0 \quad (\text{K keresztmetszettől balra és jobbra lévő x irányú erők összege nulla})$$

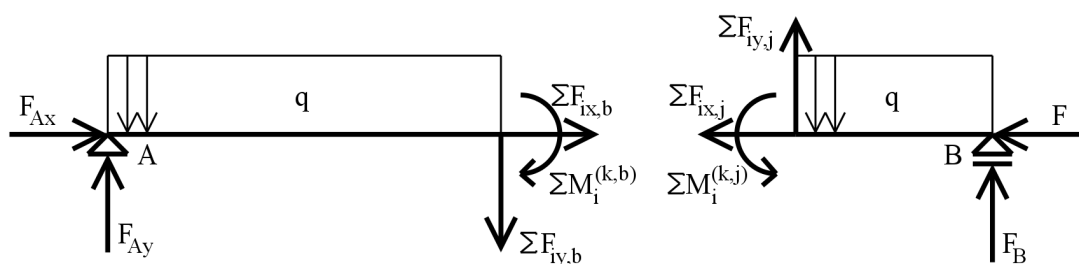
Rendezve az egyenleteket, kapjuk:

$$\sum M_i^{(k,b)} = -\sum M_i^{(k,j)}$$

$$\sum F_{iy,b} = -\sum F_{iy,j}$$

$$\sum F_{ix,b} = -\sum F_{ix,j}$$

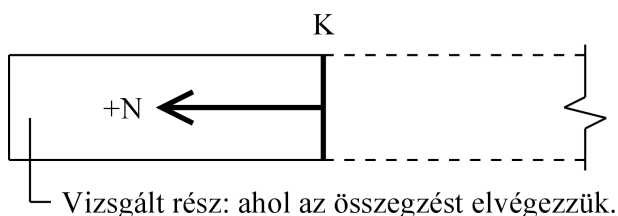
Látható, hogy a bal ill. a jobb oldal nagysága megegyezik, csak az irányuk ellentétes. Azt is észrevehetjük, hogy a „k” keresztmetszetben az igénybevételeket a „k” keresztmetszettől balra vagy jobbra levő erőrendszer redukálásával kaptuk meg. Ezt szemlélteti az 1. ábra is.



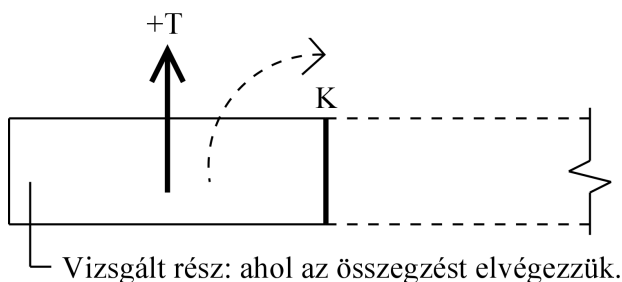
1. ábra: Keresztmetszet igénybevételei

Az erőrendszer k keresztmetszetbe redukált eredőjét a tartó tengelyével párhuzamos és arra merőleges komponensekre bontjuk fel. Ezen eredőkomponensek adják meg az igénybevételeket.

Normálerőnek nevezzük az eredő tengelyirányú komponensét. Pozitív előjelűnek vesszük akkor, ha a keresztmetszettől a vizsgált rész felé mutat, azaz a keresztmetszettől elmutat (mint a rácsos tartónál, a csomóponttól elmutatott a pozitív értelmű erő).



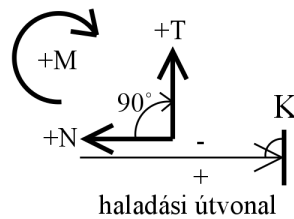
Nyíróerőnek nevezzük az eredő tengelyirányra merőleges komponensét. Pozitív előjelű, ha a felírt részen elhelyezve pozitív értelemben forgatná el az adott keresztmetszetet.



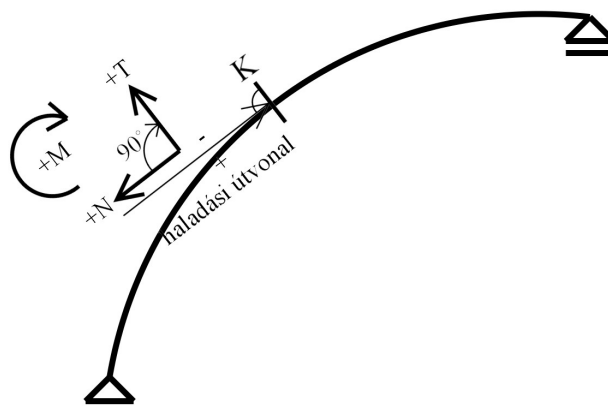
A *nyomaték* előjele a megszokott módon alakul. Tehát az óramutató járásával megegyező irányban pozitív a nyomaték.

Tudjuk azt, hogy a belsőerők nagysága a bal, ill. a jobb oldali részre felírva ugyanakkora értéket ad, csak ellentétes irányval. Tehát egy olyan előjel szabályra lesz szükségünk ami figyelembe veszi azt, hogy melyik részre írtuk fel az összegzéseket ill. hogy hogyan áll a keresztmetszetünk. Nézzük meg, az alkalmazott szabályrendszert.¹

¹ Készítsük el pauszpapírra az előjelszabályt. Tanulásunk során ha elakadunk, hogy épp melyik irány lesz a pozitív, vagy milyen irányú a normálerő, nyíróerő, akkor ezt a kis ábrát a keresztmetszethez rakva megkapjuk a választ. Az előjelszabályt csak eltolni, és elforgatni szabad.



Haladási útvonal: a tartó azon részén helyezkedik el, amelyiken az összegzést elvégezzük. Egy keresztmetszetenél mindig két haladási irány lehetséges, a keresztmetszettől balra ill. jobbra levő rész. A haladási irányt mindig úgy vesszük fel, hogy a vizsgált keresztmetszet felé mutasson, és a keresztmetszet síkjára merőlegesen álljon.



A pozitív normálerő mindig ezzel a haladási útvonallal ellentétes irányban mutat. (Ha pozitív a normálerő húzásról, ha negatív, akkor nyomásról beszélünk.)

A pozitív nyíróerő a pozitív normálerővel 90° -t zár be az óramutató járásával megegyező irányban.

A nyomatéki értékeknél az óramutató járásával megegyező a pozitív irány. A nyomatéki ábra szerkesztésekor a nyomatékértékeket **mindig** a húzott oldalra rajzoljuk.

Ha pozitív érték jön ki a nyomatékra, akkor a haladási útvonal jobb oldalára mérjük fel a nyomatékot (ez lesz a húzott oldal). Ha negatív nyomatékot kapunk, akkor a haladási útvonal bal oldalára mérjük fel a nyomatékot (ilyenkor ez lesz a húzott oldal)

Az előzőek ismeretében bonyolult formájú tartók esetén is a húzott oldalra kerül a nyomatékábra. A belsőerők eloszlását a tartók tengelye mentén a belsőerő ábrák adják meg. Így a tartó egy adott keresztmetszetében ébredő igénybevételek kiolvashatók. A terhelés és az igénybevételei ábrák között matematikai összefüggések vannak (1. táblázat).

1. táblázat: Terhelés és a belsőerőábrák összefüggései

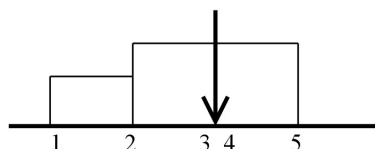
Terhelés	Nyíróerő ábra (T)	Nyomatéki ábra (M)
Nincs teher	Állandó (konstans)	Lineáris, $y=f(x)$
Egyenletesen megoszló	Lineáris, $y=f(x)$	Másodfokú, $y=f(x^2)$
Lineáris, $y=f(x)$	Másodfokú, $y=f(x^2)$	Harmadfokú, $y=f(x^3)$
Koncentrált erő támadási keresztmetszete	Ugrás a függvényben	Töréspont
	Előjelváltás	Lokális szélsőérték

Az igénybevételi ábrák meghatározásához a jellemző keresztmetszetek igénybevételeit számítjuk és egyenes ill. görbe vonalakkal összekötjük.

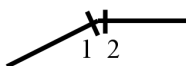
Hol kell belsőerő értékeket számolni?

Normál és nyíróerőt:

- Koncentrált erő előtt és mögött.
- Megoszló terhelés szakaszvégein.

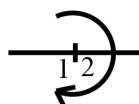


- Ott ahol a tartó tengelye megtörik.

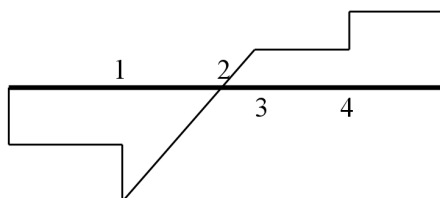


Nyomatékokat:

- Koncentrált nyomaték előtt és után.



- Ott, ahol a nyíróerő ábra előjelet vált.
- Ott ahol a nyíróerő ábrában „ugrás” van. (Koncentrált erő támadáspontja.)



Feladatmegoldás javasolt menete

Ebben a részben az egyszerű tartók belsőerőábráinak elkészítési lépéseit mutatjuk be. Nem célunk minden lehetőség bemutatása. Egy ajánlott megoldási menetet mutatunk be megjegyezve, hogy más megoldási lehetőségek is léteznek.

Kéttámaszú statikailag határozott tartók belsőerő ábráinak elkészítése.²

- Koordinátarendszer felvétele.
- Erők felbontása a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos összetevőkre.
- Nyomatéki egyenlet felírása a fix támaszra.

$$\sum_{i=1}^n M_i^{(P)} = 0 \quad (\text{A másik támaszerő/támaszerő komponens irányának feltételezésével. Ha az eredmény pozitív, akkor a feltételezett irány helyes.})$$

- Ferde hatásvonalú görgős támasz esetén a másik támaszerő komponens és a támaszerő meghatározása hasonló háromszögek, vagy szögfüggvények segítségével.
- Vetületi egyenletek felírása a fix csuklóban ébredő erőkomponensek számítására.

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (\text{Az egyensúlyozó erő irányának feltételezésével})$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (\text{Az egyensúlyozó erő irányának feltételezésével})$$

(Ha pozitívak az eredmények, akkor a feltételezett irányok helyesek)

- Eredményvázlat elkészítése.

² Ide tartoznak a kéttámaszú ferde, a tört és ágas tengelyű tartók.

Belsőerő ábrák készítése

– Haladási útvonal megrajzolása.³

– Erők felbontása a haladási útvonalon N és T irányú összetevőkre.

– Normálerő ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző keresztmetszetekben.⁴ A jellemző keresztmetszeten helyezzük el a pauszpapírra elkészített előjelszabályunkat. Így megkapjuk, hogy milyen állású és irányú a pozitív normálerő. Az előjelszabálynak megfelelően összegezzük az N irányú erőket egész a K keresztmetszetig. Képletesen:

$$N_K = \sum_{i=1}^n N_i$$

(Normálerő értéke a K keresztmetszetben = Az összes N irányú erő előjeles összege az útvonalon)

– Nyíróerő ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző keresztmetszetekben. (mint az előbb) A jellemző keresztmetszeteken helyezzük el a pauszpapírra elkészített előjelszabályunkat. Így megkapjuk, hogy milyen állású és irányú a pozitív nyíróerő. Az előjelszabálynak megfelelően összegezzük az T irányú erőket egész a K jellemző keresztmetszetig. Képletesen:

$$T_K = \sum_{i=1}^n T_i$$

(Nyíróerő értéke a K keresztmetszetben = Az összes T irányú erő előjeles összege az útvonalon)

– Nyomatéki ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző pontokon.⁵ A pozitív nyomaték az órajárásával megegyező irányba forgatná az adott pontot, a negatív, az óra járásával ellentétesen. Amennyiben pozitív értéket kapunk, úgy a haladási útvonal jobb oldalára kell felmérni a nyomatékértéket (a semleges tengelytől). Negatív eredmény esetén a haladási útvonal bal oldalára kell felmérni a kapott értéket. A nyomaték nagyságát a következőképpen kapjuk meg:

$$M_K = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot t_i)$$

(Nyomaték értéke a K keresztmetszetben = Az összes erő előjeles nyomatékösszege az útvonalon)

Két nyomatéki érték között az *1. táblázat* alapján alakul az ábra.

3 Mivel egyenestengelyű tartókat veszünk, ezért célszerű a tartó tengelyével párhuzamosan haladni. Tört vonalú, vagy ágas tartóknál a haladási útvonal többféleképpen felrajzolható (tetszőlegesen). Figyelni kell arra, hogy mindig az adott keresztmetszettől vagy csak a balra vagy csak a jobbra levő erőket/erőkomponenseket vegyük figyelembe. Az előjelszabály szerint végezzük el az összesítéseket.

4 Jellemző pont: Koncentrált teher előtt, után. Megoszló terhelés szakaszvégen és a tartó vonalának a törésénél.

5 Jellemző pont: Koncentrált nyomaték előtt, után. Ahol a nyíróerőábra előjelet vált és ugrás van az ábrában.

Egyik végén befogott tartók belőserő ábráinak elkészítése.⁶

- Koordinátarendszer felvétele.
- Erők felbontása a koordinátarendszer tengelyeivel párhuzamos összetevőkre.
- Nyomatéki egyenlet felírása befogásra.

$$\sum_{i=1}^n M_i^{(P)} = 0 \quad (\text{A befogási nyomaték forgási irányának feltételezésével. Ha az eredmény pozitív, akkor a feltételezett irány helyes.})$$

- Vetületi egyenletek felírása a befogásban ébredő erő komponenseinek számítására.

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad (\text{Az egyensúlyozó erő irányának feltételezésével})$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad (\text{Az egyensúlyozó erő irányának feltételezésével})$$

(Ha pozitívak az eredmények, akkor a feltételezett irányok helyesek)

- Eredményvázlat készítése.

Belsőerő ábrák készítése

- Haladási útvonal megrajzolása.
- Erők felbontása a haladási útvonalon N és T irányú összetevőkre.
- Normálerő ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző keresztmetszeteken.⁷ A jellemző keresztmetszeten helyezük el a pauszpapírra elkészített előjelszabályunkat. Így megkapjuk, hogy milyen állású és irányú a pozitív normálerő. Az előjelszabálynak megfelelően összegezzük az N irányú erőket egész a K jellemző keresztmetszetig. Képletesen:

$$N_K = \sum_{i=1}^n N_i$$

(Normálerő értéke a K keresztmetszetben = Az összes N irányú erő előjeles összege az útvonalon)

- Nyíróerő ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző keresztmetszeteken. (mint az előbb) A jellemző keresztmetszeten helyezük el a pauszpapírra elkészített előjelszabályunkat. Így megkapjuk, hogy milyen állású és irányú a pozitív nyíróerő. Az előjelszabálynak megfelelően összegezzük az T irányú erőket egész a K jellemző keresztmetszetig. Képletesen:

⁶ Ide tartoznak a befogott ferde, tört és ágas tengelyű tartók.

⁷ Jellemző pont: Koncentrált teher előtt, után. Megoszló terhelés szakaszvégen és a tartó vonalának a törésénél.

$$T_K = \sum_{i=1}^n T_i$$

(Nyíróerő értéke a K keresztmetszetben = Az összes T irányú erő előjeles összege az útvonalon)

–Nyomatéki ábra készítése.

Számoljuk az értékeket a jellemző pontokon.⁸ A pozitív nyomaték az órajárásával megegyező irányba forgatná az adott pontot, a negatív, az óra járásával ellentétesen. Amennyiben pozitív értéket kapunk, úgy a haladási útvonal jobb oldalára kell felmérni a nyomatékértéket (a semleges tengelytől). Negatív eredmény esetén a haladási útvonal bal oldalára kell felmérni a kapott értéket. A nyomaték nagyságát a következőképpen kapjuk meg:

$$M_K = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot t_i)$$

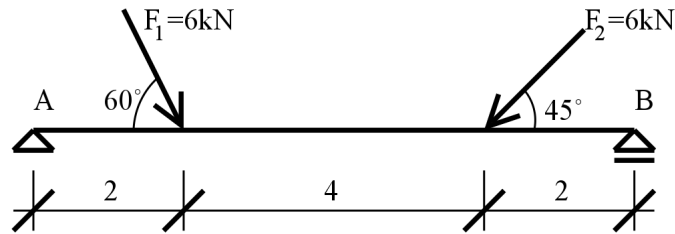
(Nyomaték értéke a K keresztmetszetben = Az összes erő előjeles nyomatékösszege az útvonalon)

Két nyomatéki érték között az *1.táblázat* alapján alakul az ábra.

⁸ Jellemző pont: Koncentrált nyomaték előtt, után. Ahol a nyíróerőábra előjelet vált és ugrás van az ábrában.

Példafeladat: vízszintes egyenes tengelyű tartók belsőerői

Határozza meg a tartó támaszerőit és készítse el az igénybevételi ábráit!



Először mindig a támaszerőket határozzuk meg. A támaszerők ismeretében megrajzolhatók a belsőerő ábrák. Erők felbontása x és y irányú összetevőkre.

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3 \text{ kN} \quad (\rightarrow)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5,2 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

$$F_{2x} = F_{2y} = F_2 \cdot \sin 45^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4,24 \text{ kN} \quad (\leftarrow) ; (\downarrow)$$

Nyomatéki egyenlet felírása a fix csuklóra.

$$\Sigma M_i^{(A)} = F_{1y} \cdot 2 + F_{2y} \cdot 6 - F_B \cdot 8 = 0 \quad (F_B - t \text{ felfele mutatónak feltételeztük})$$

$$F_B = \frac{F_{1y} \cdot 2 + F_{2y} \cdot 6}{8} = \frac{5,2 \cdot 2 + 4,24 \cdot 6}{8} = 4,48 \text{ kN} \quad (\text{Pozitív, a feltételezett irány helyes})$$

Vetületi egyenletek felírása.

$$\Sigma F_{iy} = -F_{Ay} + F_{1y} + F_{2y} - F_B = 0 \quad (F_{Ay} - t \text{ felfele mutatónak feltételeztük})$$

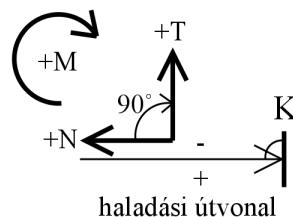
$$F_{Ay} = F_{1y} + F_{2y} - F_B = 5,2 + 4,24 - 4,48 = 4,96 \text{ kN} \quad (\text{Pozitív, a feltételezett irány helyes})$$

$$\Sigma F_{ix} = F_{Ax} + F_{1x} - F_{2x} = 0 \quad (F_{Ax} - t \text{ jobbra mutatónak feltételeztük})$$

$$F_{Ax} = -F_{1x} + F_{2x} = -3 + 4,24 = 1,24 \text{ kN} \quad (\text{Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes})$$

Belsőerő ábrák elkészítése.

Haladjunk balról jobbra a tartón, így az előjelek a következő szerint alakulnak:



Először készítsük el a normálerő ábrát. A normálerőknél a tartó tengelyével párhuzamos irányú erőket kell összegezni az adott keresztmetszetig. Nekünk most a vizsgált keresztmetszettől balra levő tengelyirányú erőket kell összegeznünk. A pozitív értelem a haladási iránnyal ellentétesen mutat, tehát jobbról balra. Első értékünk F_{Ax} lesz, ami negatív értelmű, az értéke (-1,24kN). A következő hely ahol vizsgálni kell a normálerőre értékét a következő normálerő helye, addig állandó értékű lesz az ábra. Ez a keresztmetszet az F_{1x} helyén lesz. Az értéke:

$$N = -F_{Ax} - F_{1x} = -1,24 - 3 = -4,24 \text{ kN}$$

A következő hely ahol vizsgálni kell a normálerő értékét az F_{2x} helyén van. Összegezve a tengelyirányú erőket zérust kapunk, ezzel be is fejeztük a normálerőre készítését. (Mivel F_{2x} -től jobbra már nincs tengelyirányú erő)

Másodsorra készítsük el a nyíróerőábrát. A nyíróerőknél a tartó tengelyére merőleges irányú erőket kell összegezni a vizsgált keresztmetszetig. Balról jobbra haladunk, így a keresztmetszettől balra levő erőket összegezzük. Pozitívnek a felfele mutató erőket fogjuk venni. Első értékünk F_{Ay} lesz, ami pozitív értelmű, és 4,96kN nagyságú. A következő hely az F_1 helyén lesz. F_{1y} negatív értelmű és 5,2kN nagyságú, így ezen a helyen a nyíróerő értéke:

$$T_1 = F_{Ay} - F_{1y} = 4,96 - 5,2 = -0,24 \text{ kN}$$

A nyíróerőre egészen a következő nyíróerőig azonos értékű lesz (T_1). A következő nyíróerő F_2 támadáspontjánál van, az értéke:

$$T_2 = F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} = 4,96 - 5,2 - 4,24 = -4,48 \text{ kN}$$

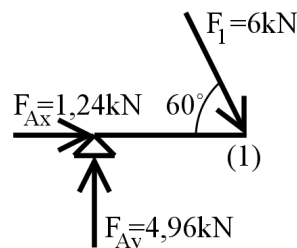
A T_2 értéke a tartó végéig halad majd ott hozzáadódik F_B , így a nyíróerőre lezár nullára.

$$T_2 = F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} + F_B = 4,96 - 5,2 - 4,24 + 4,48 = 0 \text{ kN}$$

Nyomatéki ábra értékeinek meghatározása következik. Itt is balról jobbra haladunk, és a vizsgált keresztmetszettől balra levő összes erő nyomatékát számoljuk. Az „A” támasz felett a nyomaték értéke zérus (Mivel tőle balra nem helyezkedik el semmilyen erő sem). Az F_1 helyén a nyomatéki értéket a következőképpen számítjuk:

$$M_1 = F_{Ay} \cdot 2 = 4,96 \cdot 2 = 9,92 \text{ kNm}$$

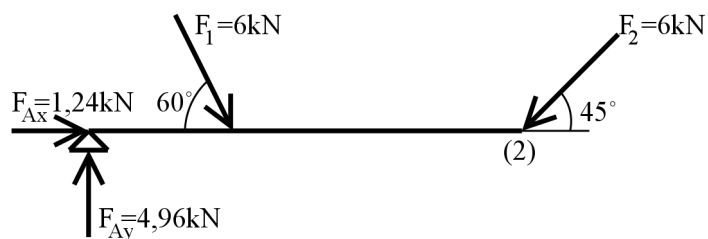
(Pozitív, tehát a haladási útvonal jobb oldalára kell felmérni)



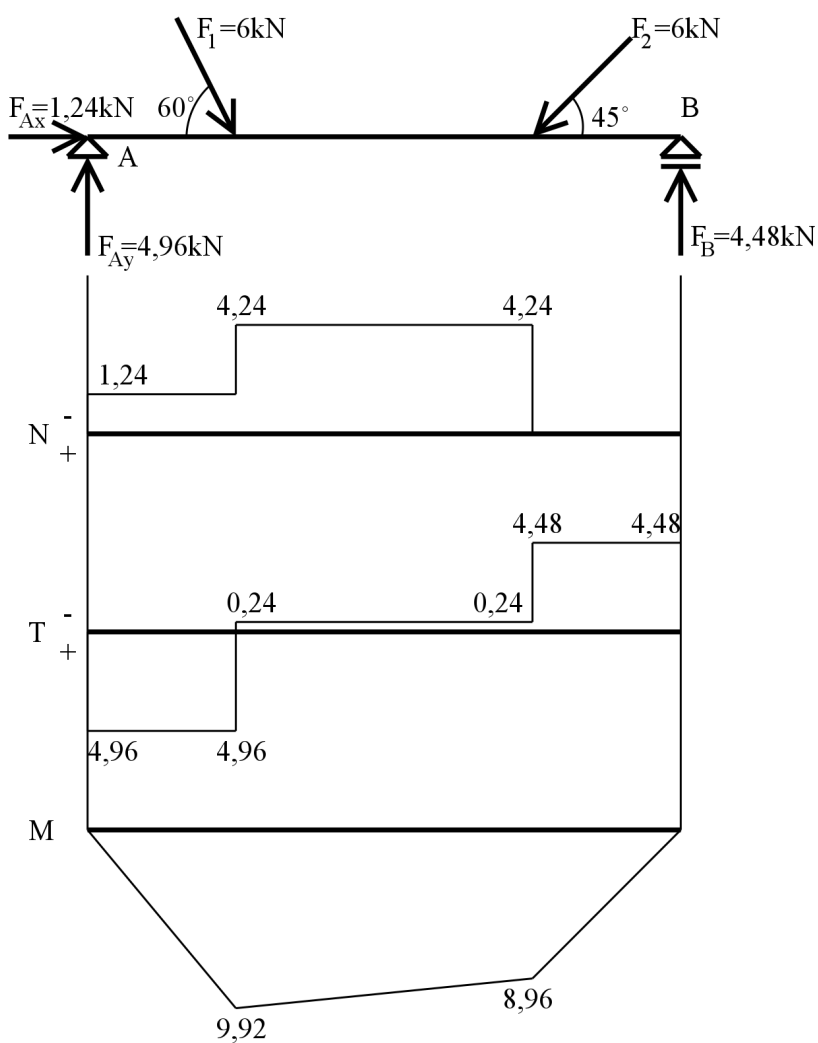
A következő hely ahol vizsgálni kell az F_2 mivel itt van ugrás a nyíróerőábrában.

$$M_2 = F_{Ay} \cdot 6 - F_{1y} \cdot 4 = 4,96 \cdot 6 - 5,2 \cdot 4 = 8,96 \text{ kNm}$$

(Pozitív, tehát a haladási útvonal jobboldalára kell felmérni)

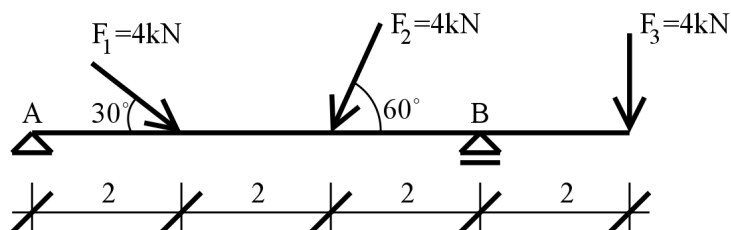


Belsőerő ábrák.



Bővítsük tovább ismereteinket, és nézzük meg, hogyan kell elkészíteni a belsőerőábrákat kéttámaszú konzolosan túlnyúló tartó esetén.

Határozza meg a tartó támaszerőit és készítse el az igénybevételi ábráit!



Erők felbontása:

$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 30^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,46 \text{ kN} \quad (\rightarrow)$$

$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 30^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2 \text{ kN} \quad (\leftarrow)$$

$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3,46 \text{ kN} \quad (\downarrow)$$

Nyomatéki egyenlet felírása a fix csuklóra.

$$\Sigma M_i^{(A)} = F_{1y} \cdot 2 + F_{2y} \cdot 4 - F_B \cdot 6 + F_3 \cdot 8 = 0 \quad (F_B - \text{t felfele mutatónak feltételeztük})$$

$$F_B = \frac{F_{1y} \cdot 2 + F_{2y} \cdot 4 + F_3 \cdot 8}{6} = \frac{2 \cdot 2 + 3,46 \cdot 4 + 4 \cdot 8}{6} = 8,31 \text{ kN}$$

$$F_B = 8,31 \text{ kN} \quad (\text{Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes})$$

Vetületi egyenletek felírása

$$\Sigma F_{iy} = -F_{Ay} + F_{1y} + F_{2y} - F_B + F_3 = 0 \quad (F_{Ay} - \text{t felfele mutatónak feltételeztük})$$

$$F_{Ay} = F_{1y} + F_{2y} - F_B + F_3 = 2 + 3,46 - 8,31 + 4 = 1,15 \text{ kN}$$

$$F_{Ay} = 1,15 \text{ kN} \quad (\text{Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes})$$

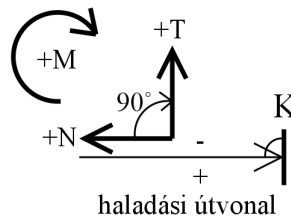
$$\Sigma F_{ix} = F_{Ax} + F_{1x} - F_{2x} = 0 \quad (F_{Ax} - \text{t jobbra mutatónak mutatónak feltételeztük})$$

$$F_{Ax} = -F_{1x} + F_{2x} = -3,46 + 2 = -1,46 \text{ kN}$$

$$F_{Ax} = -1,46 \text{ kN} \quad (\text{Negatív, tehát a feltételezett iránnyal ellentétesen mutat})$$

A támaszerők ismeretében elkezdhetjük elkészíteni, a belsőerőábrákat. Mint az előző példában itt is a normálerő ábrát, majd a nyíróerőábrát és végül a nyomatéki ábrát készítjük el.

Haladjunk itt is balról jobbra, így a belsőerők előjelei a következőképp alakulnak:



A normálerő ábra értékei balról jobbra:

Első érték az F_{Ax} lesz, ami pozitív értelmű, és 1,46kN nagyságú. Egészen az F_{1x} -ig ez az érték állandó. F_{1x} támadáspontjában a normálerő értéke a következő:

$$N_1 = F_{Ax} - F_{1x} = 1,46 - 3,46 = -2\text{kN}$$

Tehát ezt az értéket kell a zérustengelytől a negatív irányba felmérni. Ez az érték egészen F_{2x} -ig változatlan. F_{2x} helyén a normálerő értéke a következő:

$$N_2 = F_{Ax} - F_{1x} + F_{2x} = 1,46 - 3,46 + 2 = 0\text{kN}$$

Tehát a normálerő ábra visszazár nullára, így a tartó tényleg egyensúlyban van.

Nézzük a nyíróerőábrát.

Első értékünk F_{Ay} lesz, ami pozitív értelmű, és 1,15kN nagyságú. Egészen F_{1y} -ig tart, ahol a nyíróerő értéke:

$$T_1 = F_{Ay} - F_{1y} = 1,15 - 2 = -0,85\text{kN}$$

Tehát a zérustengelytől a negatív irányba mérünk 0,85kN-t. Ez az érték egészen F_{2y} támadáspontjáig tart, ahol a nyíróerőábra újból ugrik egyet, és az értéke a következő:

$$T_2 = F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} = 1,15 - 2 - 3,46 = -4,31\text{kN}$$

Ezt az értéket is a zérustengelytől kell felmérni. A T_2 érték egészen a „B” támaszig állandó értékű lesz. „B” támasznál a nyíróerőábra értéke:

$$T_B = F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} + F_B = 1,15 - 2 - 3,46 + 8,31 = 4\text{kN}$$

Tehát „B” támasznál a nyíróerő ábra értéke 4kN a zérustengelytől. Az érték egészen a tartó végéig azonos, ahol feltehetően F_3 nullára fogja zárni az ábrát.

$$T_3 = F_{Ay} - F_{1y} - F_{2y} + F_B - F_3 = 1,15 - 2 - 3,46 + 8,31 - 4 = 0\text{kN}$$

Valóban nullára zárt a nyíróerőábra, így a tartó tényleg egyensúlyban van.

Nyomatékára értékeit a következő helyeken fogjuk számolni: Az F_1 , F_2 , és F_B támadáspontjában és a tőlük balra levő összes erő nyomatékát fogjuk számolni.

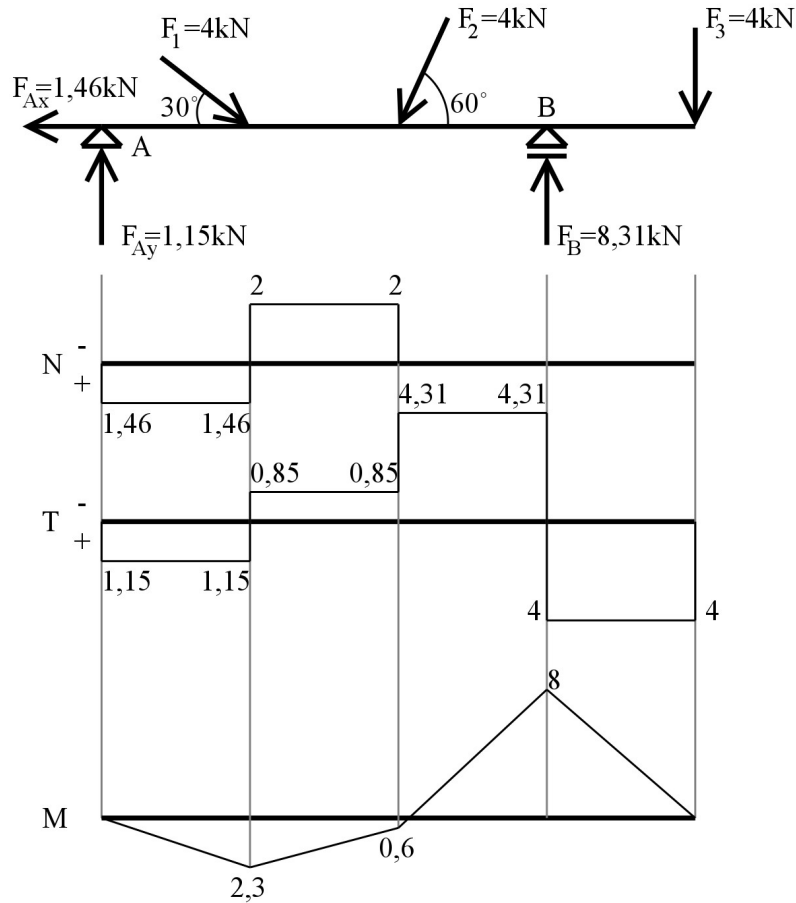
$$M_1 = F_{Ay} \cdot 2 = 1,15 \cdot 2 = 2,3\text{kNm}$$

$$M_2 = F_{Ay} \cdot 4 - F_{1y} \cdot 2 = 1,15 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0,6\text{kNm}$$

$$M_B = F_{Ay} \cdot 6 - F_{1y} \cdot 4 - F_{2y} \cdot 2 = 1,15 \cdot 6 - 2 \cdot 4 - 3,46 \cdot 2 = -8\text{kNm}$$

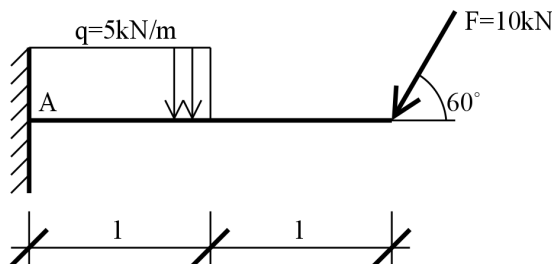
Megjegyzés : A pozitív értékeket a haladási irány jobb oldalára , míg a negatívokat a haladási irány bal oldalára mérjük fel a zérustengelytől

Eredményvázlat:



A belsőerő ábrák jellemző keresztmetszeteiben ébredő igénybevételek meghatározásához nem kell mást tenni, mint összegezni a megfelelő összetevőket. Normálerő ábránál a tengelyirányú erőket kell a vizsgált keresztmetszetig összegezni úgy, hogy az előjelt az határozza meg, hogy melyik részen összegeztük az erőket. Nyíróerő ábránál úgyszintén, csak itt a tengelyre merőleges irányú erőket vesszük figyelembe. Nyomatéki ábránál a vizsgált ponttól balra vagy jobbra levő erőrendszer nyomatékát összegezzük. Az ábrát mindig a húzott oldalra rajzoljuk. (Ha az óramutató járásával megegyező irányba forgat, akkor a haladási út jobb oldalára kerül az ábra). A kapott értékeket mindig a zérustengelytől mérjük fel.

Példafeladat: Egy oldalon befogott tartó belsőerőinek meghatározására.



Erők felbontása.

$$F_y = F \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8,67 \text{ kN}$$

$$F_x = F \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ kN}$$

A következő lépésként meghatározzuk a támaszerőket. Elsőnek nyomatéki egyenletet írunk a támaszra, majd a vetületi egyenleteket írjuk fel.

$$\Sigma M_i^{(A)} = q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + F_y \cdot 2 - M_A = 0$$

M_A – t az óramutató járásával ellentétesen mutatónak feltételeztük, ezért az A pontot negatív irányba forgatja

M_A – ra rendezve kapjuk:

$$M_A = q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + F_y \cdot 2 = 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 8,67 \cdot 2 = 19,84 \text{ kNm}$$

$M_A = 19,84 \text{ kNm}$ (Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes)

$$\Sigma F_{iy} = q \cdot 1 + F_y - F_{Ay} = 0 \quad (F_{Ay} - t felfele mutatónak feltételeztük)$$

$$F_{Ay} = q \cdot 1 + F_y = 5 \cdot 1 + 8,67 = 13,67 \text{ kN}$$

$F_{Ay} = 13,67 \text{ kN}$ (Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes)

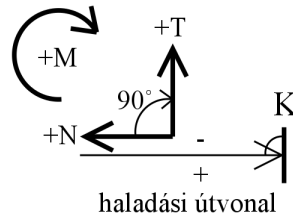
$$\Sigma F_{ix} = F_{Ax} - F_x = 0 \quad (F_{Ax} - t jobbra mutatónak feltételeztük)$$

$$F_{Ax} = F_x = 5 \text{ kN}$$

$F_{Ax} = 5 \text{ kN}$ (Pozitív, tehát a feltételezett irány helyes)

Belsőerők értékeinek számítása.

Haladjunk balról jobbra. Így az előjelszabályunk a következőképp alakul:



A normálerő ábrával kezdjük. Az első értékünk

$$-F_{Ax} = -5 \text{ kN}$$

Egészen F_x -ig nem hat más normálerő, így addig az konstans értékű. A tartó végén:

$$N = -F_{Ax} + F_x = -5 + 5 = 0 \text{ kN}$$

A tartó tényleg egyensúlyban van.

Következzék a nyíróerő ábra. Először $F_{Ay} = 13,67 \text{ kN}$ hat, ami pozitív értelmű. A következő keresztmetszet ahol számolnunk kell a nyíróerő értéket a megoszló terhelés szakasz végén.

$$T = F_{Ay} - q \cdot 1 = 13,67 - 5 \cdot 1 = 8,67 \text{ kN}$$

Egész a tartó végéig ezek a nyíróerők szerepelnek, tehát értékük állandó. A tartó végén:

$$T = F_{Ay} - q \cdot 1 - F_y = 13,67 - 5 \cdot 1 - 8,67 = 0 \text{ kN}$$

Tehát a tartó egyensúlyban van.

Nyomatéki ábra elkészítése következik. Balról az első értékünk a befogási nyomaték.

$$M = -M_A = -19,84 \text{ kNm}$$

Tehát a haladási útvonalunk bal oldalára (felülre) kerül. A következő jellemző keresztmetszet ott van, ahol a nyíróerő ábrában törés van.

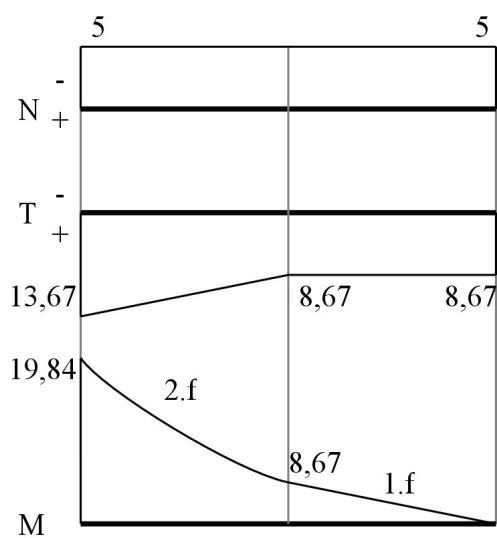
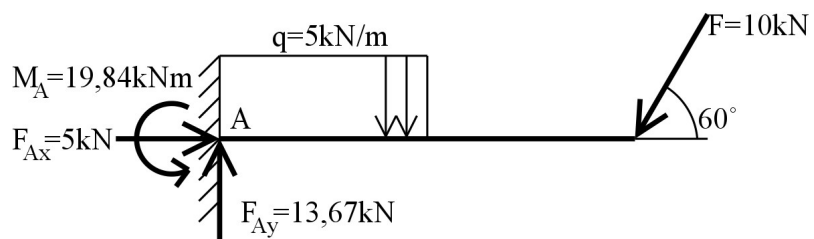
$$M = -M_A + F_{Ay} \cdot 1 - q \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -19,84 + 13,67 \cdot 1 - 5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = -8,67 \text{ kNm}$$

Negatív, tehát a haladási útvonal bal oldalára (felülre) kerül. Eddig a szakaszig a nyomatéki ábra másodfokú, mert a nyíróerő ábra ezen a szakaszon elsőfokú. A következő hely ahol vizsgáljuk a nyomatéki ábrát a tartó vége – mivel itt „ugrik” a nyíróerő ábra.

$$M = -M_A + F_{Ay} \cdot 2 - q \cdot 1 \cdot 1,5 = 0 \text{ kNm}$$

Tehát a tartó egyensúlyban van.

Eredményvázlat:



Bibliográfia

ARNOLD ILDIKÓ – BÍRÓNÉ BELÉNYES BERNADETT – HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER – SZABÓ ÉVA: *Mechanika I -Statika*. Készült a PHARE projekt támogatásával. No. HU-94.050301-L006-32 sz. projekt, Pécs, 1998.

BÁRCZI ISTVÁN: *Szilárdságtan I. statika kézirat*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1990.

BÁRCZI ISTVÁN – BÁN TIVADARNÉ: *Szilárdságtan I*. Műszaki könyvkiadó, Budapest, 1998.

GÁSPÁR ZSOLT – TARNAI TIBOR: *Statika*. Műegyetemi Kiadó, 2005.

KISCELLI LÁSZLÓ: *Mechanika I. (statika) kézirat*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.

M. CSIZMADIA BÉLA-NÁNDORI ERNŐ: *Statika*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1996.

NÉMETH FERENC: *Mechanika I. Statika*. Panem-McGraw-Hill, Budapest, 1996.

SIPTÁR TIBOR – MERSONY ISTVÁN: *Mechanika módszertani útmutató és példatár*. PMMF nyomdája