



EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK



V É G E S E L L E M E S M O D E L L E Z É S

PMSTNB 260 segédlet a PTE PMMK építőmérnök hallgatói részére

„Az építész- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

VÉGESELEMES MODELLEZÉS

CSÉBFALVI ANIKÓ

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar,
Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék

2007

Kiadó: Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Kar
Cím: Pécs, Boszorkány út 2.
Telefon/Fax: 36 72 503-650/2801

Szerző: Csébfalvi Anikó (csebfalv@witch.pmmf.hu)

ISBN 978-963-642-205-9

Részletes tantárgyprogram:		
Hét	Ea/Gyak	Témakör
1.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	A végeselemes modellezés alapjai. Rúdelemek modellezése. Az elemi tartó merevségi mátrixa és mechanikai jelentése. Tehervektor meghatározása. Rúdelemek modellezése. Az elemi tartó merevségi mátrixa és mechanikai jelentése. Tehervektor meghatározása.
2.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Rúdszerkezetek modellezése. Ferde helyzetű rúdelem. Lokális és globális koordináta rendszerek. Koordináta transzformációk. 1. OGY. AZ ELEMI TARTÓ MEREVSÉGI MÁTRIXÁNAK ELŐÁLLÍTÁSA.
3.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Gerenda tartók végeselemes modellezése. Folytatólagos gerendatartók végeselemes modellezése. Síkbeli és térbeli rúdszerkezetek megoldása az AXIS program segítségével.
4.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Rugalmas ágyazású gerendatartók végeselemes modellezése. Rugalmas ágyazású gerendatartók megoldása az AXIS program segítségével
5.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	I. ZH. RÚDSZERKEZETEK VÉGESELEMES MODELLEZÉSE. Síkbeli és térbeli keretek megoldása az AXIS program segítségével.
6.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Ferde helyzetű tartók végeselemes modellezése. Koordináta transzformációk. Ferde helyzetű tartók megoldása az AXIS program segítségével.
7.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Síkbeli keretek végeselemes modellezése. A merevségi mátrix és a tehervektor meghatározása. 2. OGY. SÍKBELI KERETEK VÉGESELEMES MODELLEZÉSE.
8.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Tárcsák végeselemes modellezése. Alapegyenletek. Alakváltozások és belső erők vektora. Háromszög elemek. Tárcsa feladatok megoldása az AXIS program segítségével.
9	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Tárcsák végeselemes modellezése. Négyszög elemek. Elemi merevségi mátrix. Tárcsa feladatok megoldása az AXIS program segítségével.
10.	TAVASZI SZÜNETHET	
11.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Tárcsák végeselemes modellezése. Az egyenletrendszer felírása. 3. OGY. TÁRCSÁK VÉGESELEMES MODELLEZÉSE.
12.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Lemezek végeselemes modellezése. Alapegyenletek. Négyszögelemek. Lemezfeladatok megoldása az AXIS program segítségével.
13.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	Lemezek végeselemes modellezése. A közelítés pontossága. További lemezmodellek. Lemezfeladatok megoldása az AXIS program segítségével.
14.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	II. ZH. LEMEZEK VÉGESELEMES MODELLEZÉSE Rugalmas ágyazású lemezek megoldása az AXIS program segítségével.
15.	2 óra előadás 2 óra gyakorlat	PÓTLÁSOK Rugalmas ágyazású lemezek végeselemes modellezése.

TARTALOMJEGYZÉK:

1. A végeselemes modellezés alapjai	7
1.1. Rúdelemek modellezése	7
1.2. Az elemi tartó merevségi mátrixa és mechanikai jelentése.	9
1.3. Tehervektor meghatározása	11
2. Rúdszerkezetek modellezése	13
2.1. Ferde helyzetű rúdelem	13
2.2. Koordináta transzformációk	14
3. Gerendatartók végeselemes modellezése	19
3.1. Folytatólagos gerendatartók végeselemes modellezése	19
3.3. Síkbeli és térbeli rácsos tartók megoldása az AXIS program segítségével	21
4. Törtvonalú gerendatartók végeselemes modellezése.	23
4.1. A merevségi mátrix előállítás	23
4.2. Az egyenletrendszer felírása	25
4.3. Törtvonalú gerendatartók megoldása az AXIS program segítségével	26
5. Síkbeli és térbeli rúdszerkezetek megoldása az AXIS program segítségével	27
5.1. Síkbeli rúdszerkezetek	27
5.2. Térbeli rúdszerkezetek megoldása az AXIS program segítségével	29
6. Síkbeli keretek végeselemes modellezése	33
6.1. Elmozdulás paraméterek a lokális és globális koordinátarendszerben	33
6.2. A globális merevségi mátrix előállítás	34
7. Síkbeli és térbeli keretek végeselemes megoldása az AXIS VM8 program segítségével	37
7.1. Síkbeli keretek. Merev és félmerev kialakítású oszlop-gerenda kapcsolatok	37
7.1. Térbeli keretek modellezése az AXIS VM8 program segítségével	39
8. Tárcsák végeselemes modellezése	41
8.1. Alapegyenletek	41
8.2. Háromszög elemek	42
8.3. Az egyensúlyi egyenletek	44
8.4. Tárca feladatok megoldása az AXIS program segítségével	46
9. Tárcsák végeselemes modellezése	47
9.1. Négyszög elemek	47
9.2. Az elemi merevségi mátrix	49
10. Tárcsák végeselemes modellezése	51
10.1. Az elemi merevségi mátrix meghatározásának bemutatása egy adott példán keresztül	51
10.2. A redukált terhek meghatározásának bemutatása egy adott példán keresztül	53
11. Lemezek végeselemes modellezése	55

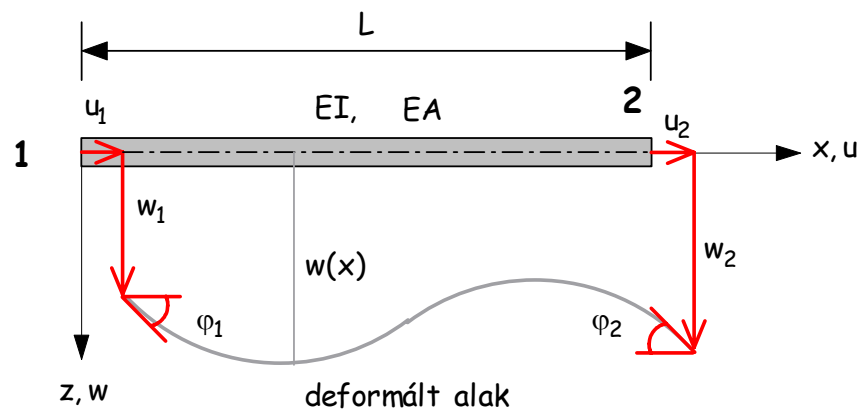
11.1	Alapfogalmak	55
11.2	Alakváltozások és belső erők vektora	55
11.3	Négyszög elemek	56
11.4	Az alakváltozások meghatározása	58
11.5	Az elemi tartó merevségi mátrixa és a tehervektor	61
12.	Lemezek végeselemes modellezése	62
12.1	A közelítés pontossága - további lemez modellek	62
12.2	Kilenc szabadságfokú nemkonform háromszögelem	62
12.3	Huszzonegy szabadságfokú konform háromszögelem	64
13.	Lemzelfeladatok megoldása az AXIS program segítségével	65
14.	Rugalmas ágyazású lemezek végeselemes modellezése	70
	Irodalomjegyzék	72

1. A végeselemes modellezés alapjai

A végeselemes modellezést a tartószerkezetek igénybevételeinek megoldó módszereként alkalmazzuk a tartószerkezeti mechanikában. A tantárgy keretén belül foglalkozunk a rúdszerkezetek, ezen belül a keretek és gerendatartók végeselemes modellezésével, továbbá a lemez és tárcsa feladatok végeselem-módszerrel történő megoldásával. A félév során az AXIS VM8 programcsomag alkalmazásával ellenőrizzük a bemutatásra kerülő egyszerűbb feladatok végeselemes modellezést. Bemutatjuk az AXIS VM8 programcsomag alkalmazási lehetőségeit nagyméretű, összetett tervezési feladatok megoldására is.

1.1. Rúdelemek modellezése

A rúdszerkezetek elemi tartórészekre bontásával, illetve az elemi tartók modellezésén keresztül határozzuk meg a rúdszerkezetek elmozdulás módszeren alapuló egyenletrendszerét.



1.1 ábra: A deformált tartó elmozdulásai

Határozzuk meg az 1.1 ábra szerinti elemi tartó $u(x)$, $w(x)$ eltolódásainak közelítő értékét az alábbi polinomokkal:

$$u(x) = a_1 + a_2x \quad (1.1)$$

$$w(x) = a_3 + a_4x + a_5x^2 + a_6x^3 \quad (1.2)$$

Az 1.1 és 1.2 kifejezések mátrix alakban történő felírásával az alábbi egyszerű formát kapjuk:

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{a} \quad (1.3)$$

ahol

$$\mathbf{u}^T = [\mathbf{u} \quad \mathbf{w}], \quad (1.4)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6], \quad (1.5)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}. \quad (1.6)$$

A rúdelem teljes elmozdulás-rendszerét ezek után az alábbi formában adhatjuk meg:

$$\mathbf{d}^T = [u_1 \quad w_1 \quad \phi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \phi_2]. \quad (1.7)$$

Az 1.3 kifejezés behelyettesítésével kapjuk az elemi tartó elmozdulásaira vonatkozó általános formát:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad (1.8)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_1 & 3x_1^2 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Az 1.8 mátrix egyenlet megoldásával meghatározható az \mathbf{a} együtthatók vektora:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (1.10)$$

ahol

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/L & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/L^2 & -2/L & 0 & 3/L^2 & -1/L \\ 0 & 3/L^3 & 1/L^2 & 0 & -2/L^3 & 1/L^2 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

1.2 Az elemi tartó merevségi mátrixa és mechanikai jelentése.

Az elemi tartó elmozdulásait meghatározhatjuk, ha az 1.3 kifejezésbe behelyettesítjük az 1.10 egyenletet:

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}. \quad (1.12)$$

Vezessük be az alábbi kifejezést:

$$\mathbf{N} = \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}, \quad (1.13)$$

ahol \mathbf{N} az alakfüggvények (bázisfüggvények) mátrixa. Az \mathbf{N} mátrix az 1.13 szerinti mátrixszorzás elvégzése után az alábbi formában írható:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix}, \quad (1.14)$$

ahol

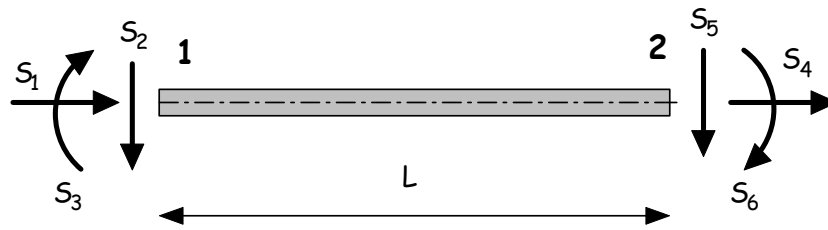
$N_1 = 1 - x/L$		$N_4 = x/L$
$N_2 = 1 - 3x^2/L^2 + 2x^3/L^3$		$N_5 = 3x^2/L^2 - 2x^3/L^3$
$N_3 = (x/L - 2x^2/L^2 + x^3/L^3)L$		$N_6 = (-x^2/L^2 + x^3/L^3)L$

Az elemi tartó egyenletrendszerének meghatározásához szükségünk van az anyagtvény, valamint a belső erők és az alakváltozások közötti összefüggések ismeretére. Az 1.2 ábra szerinti belső erők és az elmozdulások közötti kapcsolatokat szilárdságtani ismereteink alapján az alábbi formában írhatók:

$$S_1(x) = N(x) = EA \, du/dx \quad (1.15)$$

$$S_2(x) = Q(x) = -EI \, d^3w/dx^3 \quad (1.16)$$

$$S_3(x) = M(x) = -EI \, d^2w / dx^2 \quad (1.17)$$



1.2 ábra: A rúdvégi belső erők

Az 1.15-1.17 összefüggések alapján látható, hogy az alakváltozások az elmozdulások függvényei. Vegyük észre továbbá, hogy a rúdvégi nyíróerők a rúdvégi nyomatékok alapján meghatározhatók, a feladatunk ez által kétváltozósra redukálódik. Legyen a belső erők vektora:

$$\mathbf{s}^T = [S_1 \quad S_3] \quad (1.18)$$

Az alakváltozások és az elmozdulások közötti kapcsolat felírásához vezessük be az alábbi operátort:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 \\ 0 & -d^2/dx^2 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Lineárisan rugalmas anyagot feltételezve, az anyag törvény mátrixa a következő:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Az alakváltozások vektora

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (1.21)$$

ahol

$$\mathbf{B} = \mathbf{DX} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -6x \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

A belső erők vektora az 1.15-1.17 összefüggések alapján, valamint 1.22 behelyettesítésével a következő eredményt kapjuk:

$$\mathbf{S} = \mathbf{EDu} = \mathbf{EDXA}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{EBA}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{Kd}, \quad (1.23)$$

azaz

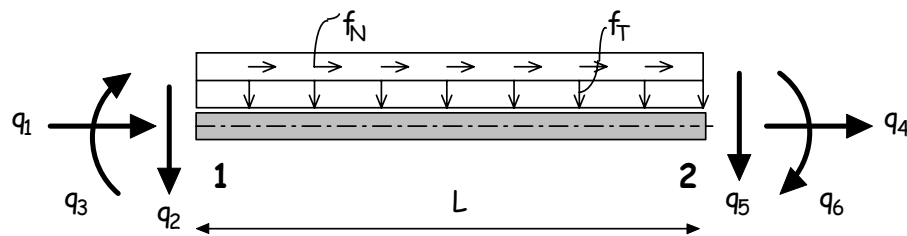
$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/L^3 & 6EI/L^2 & 0 & -12EI/L^3 & 6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 4EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 2EI/L \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/L^3 & -6EI/L^2 & 0 & 12EI/L^3 & -6EI/L^2 \\ 0 & 6EI/L^2 & 2EI/L & 0 & -6EI/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{bmatrix}. \quad (1.24)$$

Az elemi tartókra vonatkozó 1.24 szerinti merevségi mátrix megegyezik a Tartók statikája tantárgy keretében ismerttetett mátrix-elmozdulás módszer elemi tartókra meghatározott merevségi mátrixával. (Lásd: Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája)

1.3 Tehervektor meghatározása

Az egyensúlyi egyenletrendszer felírásához szükségünk van a rúdvégekre redukált csomóponti terhek meghatározására. A tehervektor fogalma és mechanikai jelentése szintén a Tartók statikája tantárgy keretében került bevezetésre.

A végeselemes modellezés esetén a tehervektor meghatározására a külső potenciális energia függvényből indulunk ki. Az 1.14 kifejezés szerinti alakfüggvények behelyettesítésével határozzuk meg a tehervektort, azaz a rúdvégekre redukált megoszló terhet.



1.3 ábra: A rúdvégekre redukált terhek

$$\pi_k = -\int_0^L f_N(x)u(x)dx - \int_0^L f_T(x)w(x)dx, \quad (1.25)$$

$$\pi_k = -\int_0^L [f_N \quad f_T] u dx, \quad (1.26)$$

$$\pi_k = -\int_0^L [f_N \quad f_T] \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & N_3 & 0 & N_5 & N_6 \end{bmatrix} ddx, \quad (1.27)$$

$$\pi_k = -\mathbf{q}^T \mathbf{d}, \quad (1.28)$$

ahol

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = -\int_0^L \begin{bmatrix} f_N N_1 \\ f_T N_2 \\ f_T N_3 \\ f_N N_4 \\ f_T N_5 \\ f_T N_6 \end{bmatrix} dx = -\begin{bmatrix} f_N L / 2 \\ f_T L / 2 \\ f_T L^2 / 12 \\ f_N L / 2 \\ f_T L / 2 \\ -f_T L^2 / 12 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Megjegyezzük, hogy az 1.29 szerinti eredmény megegyezik a mindkét végén befogott tartó esetén meghatározott reakció erőkkel, illetve nyomatékokkal. (Lásd: Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája MK 2003)

2. Rúdszerkezetek modellezése

A teljes potenciális energia minimum tétele alapján meghatározhatjuk az egyensúlyi feltételt biztosító mátrix egyenletrendszerét. Az előző fejezetben meghatározott, a belső erők és rúdvégi elmozdulásokra vonatkozó 1.24 kifejezés alapján a teljes potenciális energia függvény:

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{q}, \quad (2.1)$$

ahol \mathbf{q} a tehervektort jelöli. A potenciális energia minimum tétele alapján:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{q} \right) = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{q}. \quad (2.3)$$

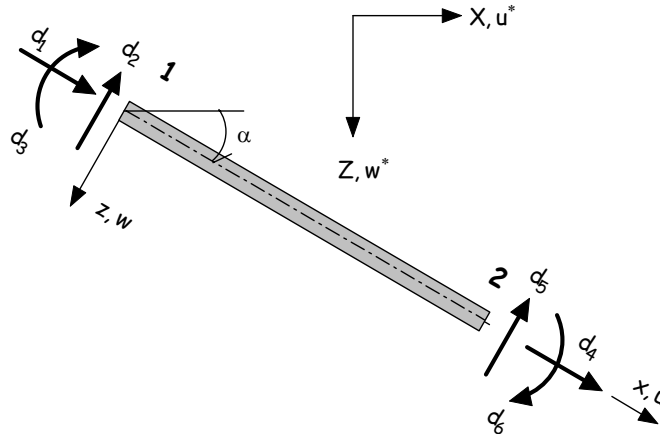
Az egyensúlyi egyenletrendszer pontosan annyi egyenletet tartalmaz amennyi az elmozdulás változók száma, a merevségi mátrix pedig, kvadratikus, így a megoldás az alábbi formában keresendő:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}. \quad (2.4)$$

2.1 Ferde helyzetű rúdelem

Mielőtt rátérnénk a rúdszerkezetek végeselemes megoldására, vizsgáljuk meg, hogyan módosul az egyenletrendszerünk általános helyzetű tartó (2.1 ábra) esetén.

A 2.1 ábrán feltüntettük az elemi tartó elmozdulásait a tartóhoz rendelt x, z lokális koordinátarendszerben. A globális X, Z koordinátarendszerben az elmozdulásokra az u^*, w^* jelölést vezetjük be. A csomóponti elmozdulások vektora legyen \mathbf{d}^* . A tehervektort \mathbf{q}^* , a merevségi mátrixot pedig, \mathbf{K}^* jelöli a globális koordinátarendszerben.



2.1 ábra: Ferde helyzetű rúdelem a lokális és globális koordináta rendszerben

2.2 Koordináta transzformációk

Az x, z lokális koordinátarendszer és a globális X, Z koordinátarendszer közötti kapcsolatot az alábbi koordináta transzformációkkal adjuk meg:

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

illetve

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

A rúdelem elmozdulás vektorát hasonló módon transzformáljuk a lokális koordinátarendszertől a globálisba, illetve globálisból a lokális rendszerbe. A 2.1 ábra szerinti lokális koordinátarendszerben megadott $\mathbf{d}^T = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4 \ d_5 \ d_6]$ és a globális $\mathbf{d}^{*T} = [d_1^* \ d_2^* \ d_3^* \ d_4^* \ d_5^* \ d_6^*]$ elmozdulás vektor közötti transzformációk:

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \mathbf{d}^*, \quad (2.7)$$

illetve

$$\mathbf{d}^* = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{d} = \mathbf{T}^T \mathbf{d}, \quad (2.8)$$

ahol a transzformáló mátrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Megjegyzés: A \mathbf{T} transzformáló mátrix speciális tulajdonságú mátrix, mivel mindig igaz, hogy $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$.

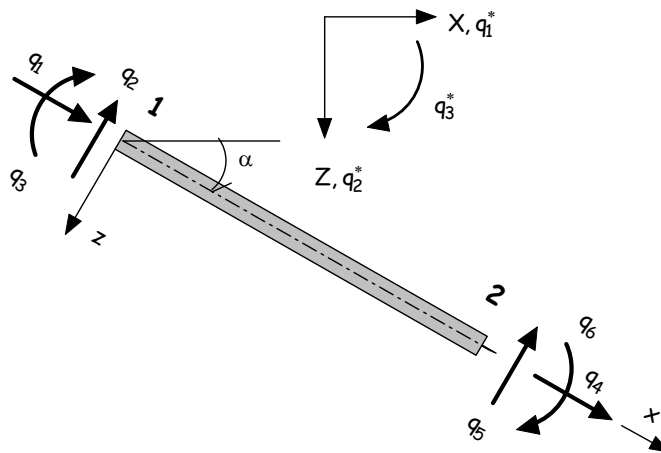
A tehervektor transzformációját az előzőekhez hasonló módon állítjuk elő:

$$\mathbf{q} = \mathbf{T}\mathbf{q}^*, \quad (2.10)$$

illetve

$$\mathbf{q}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{T}^T\mathbf{q}, \quad (2.11)$$

ahol $\mathbf{q}^T = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6]$ a lokális koordinátarendszerben megadott (lásd 2.2 ábra) és $\mathbf{q}^{*T} = [q_1^* \ q_2^* \ q_3^* \ q_4^* \ q_5^* \ q_6^*]$ a globális koordinátarendszerbe transzformált csomóponti terhek vektora.



2.2 ábra: A rúdvégre redukált terhek a lokális és globális koordináta rendszerben

A merevségi mátrix transzformációját a csomóponti elmozdulásokra vonatkozó 2.7, illetve a csomóponti terhekre vonatkozó 2.10 kifejezések 2.3 egyenletrendszerbe való behelyettesítéssel vezetjük le.

$$\mathbf{KTd}^* = \mathbf{Tq}^* , \quad (2.12)$$

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{KTd}^* = \mathbf{q}^* . \quad (2.13)$$

Mivel $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$, az egyensúlyi egyenletrendszer transzformált alakja a következő formában írható:

$$\mathbf{K}^*\mathbf{d}^* = \mathbf{q}^* , \quad (2.14)$$

ahol $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{KT}$ a transzformált merevségi mátrix.

2.1 példa

Határozzuk meg a 2.3 ábra szerinti rúdelem merevségi mátrixát, valamint a rúdvégekre redukált terhek vektorát a lokális és a globális koordináta rendszerben! ($A = 313.76 \text{ cm}^2$; $I = 7834.1 \text{ cm}^4$; $E = 21000 \text{ kN/cm}^2$)

A merevségi mátrix a lokális koordinátarendszerben:

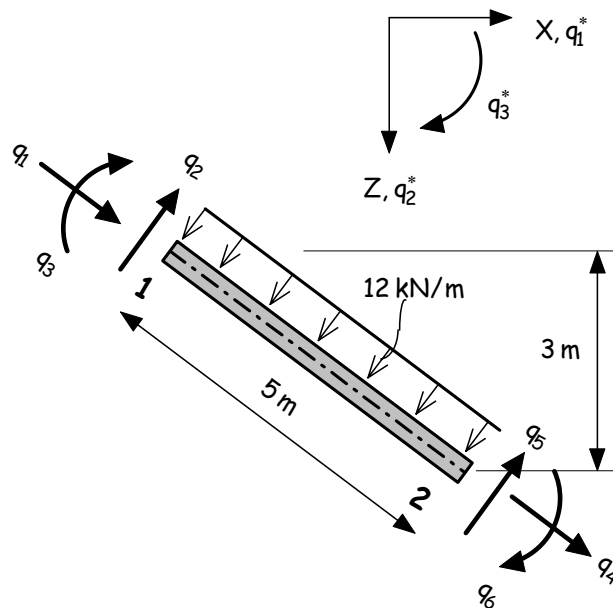
$$\mathbf{K} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 10013 & 0 & 0 & -10013 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ -10013 & 0 & 0 & 10013 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{bmatrix}$$

A transzformáló mátrix és inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ transzformáció után kapjuk a merevségi mátrixot a globális koordináta rendszerben:

$$\mathbf{K}^* = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6412,6 & 4800,5 & -18,0 & -6412,6 & -4800,5 & -18,0 \\ 4800,5 & 3612,4 & 24,0 & -4800,5 & -3612,4 & 24,0 \\ -18,0 & 24,0 & 100,0 & 18,0 & -24,0 & 50,0 \\ -6412,6 & -4800,5 & 18,0 & 6412,6 & 4800,5 & 18,0 \\ -4800,5 & -3612,4 & -24,0 & 4800,5 & 3612,4 & -24,0 \\ -18,0 & 24,0 & 50,0 & 18,0 & -24,0 & 100,0 \end{bmatrix}$$



2.3 ábra: A rúdvégre redukált terhek transzformációja

Határozzuk meg a 2.3 ábra szerinti tartó rúdvégekre redukált tehervektorát az 1.29 képlet segítségével a lokális koordinátarendszerben, majd transzformáljuk a globális rendszerbe.

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -25 \\ 0 \\ -30 \\ +25 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ q_3^* \\ q_4^* \\ q_5^* \\ q_6^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ -24 \\ -25 \\ 18 \\ -24 \\ +25 \end{bmatrix}$$

ahol a globális koordináta-rendszerbe történő transzformálást a 2.11 formula szerint végeztük el:

$$\mathbf{q}^* = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -30 \\ -25 \\ 0 \\ -30 \\ +25 \end{bmatrix}.$$

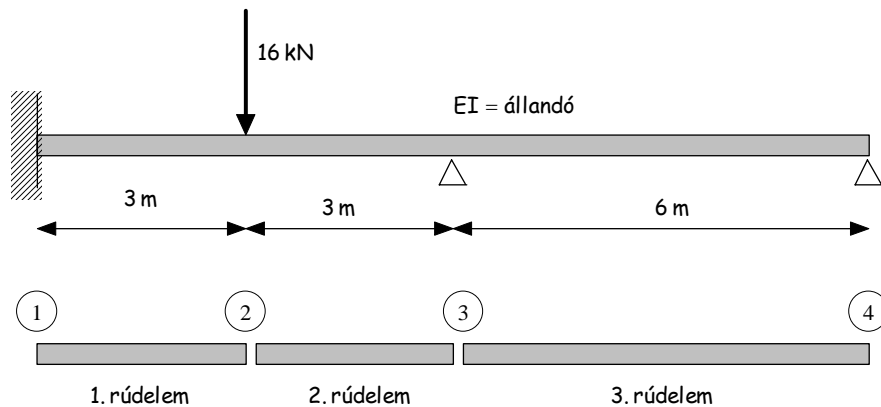
3. Gerendatartók végeselemes modellezése

3.1 Folytatólagos gerendatartók végeselemes modellezése

A folytatólagos többtámaszú gerendatartók végeselemes modellezésén keresztül mutathatjuk be legegyszerűbben az elmozdulás módszeren alapuló egyensúlyi egyenletrendszer meghatározását. A gerenda állandó keresztmetszetű (IPE 200) acél tartó. A tartó elemekre bontása után meghatározzuk az elemi merevségi mátrixokat, s mivel a tartót a globális (X,Z) koordináta-rendszerben adtuk meg, így ebben az esetben nincs szükség a koordináta transzformációra.

Az elmozdulás vektorokat a globális rendszerben adjuk meg a 3.1 ábra szerinti pontokban:

$$\mathbf{d}_1^{*T} = [w_1 \quad \varphi_1] \quad \mathbf{d}_2^{*T} = [w_2 \quad \varphi_2] \quad \mathbf{d}_3^{*T} = [w_3 \quad \varphi_3] \quad \mathbf{d}_4^{*T} = [w_4 \quad \varphi_4]$$



3.1 ábra: Folytatólagos gerendatartó végeselemes modellezése

Az elemi merevségi mátrixok jelen esetben az elmozdulás változókkal összhangban 4x4 elemet tartalmaznak. Az almátrixok jelölésekor alkalmazott alsó index az elem sorszámát jelöli, a felső index pedig, a kapcsolódó elmozdulás változókra vonatkozik.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_1^{11} & k_1^{12} \\ k_1^{21} & k_1^{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_2^{22} & k_2^{23} \\ k_2^{32} & k_2^{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_3^{33} & k_3^{34} \\ k_3^{43} & k_3^{44} \end{bmatrix},$$

ahol

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L_1^3} \begin{bmatrix} 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L_2^3} \begin{bmatrix} 12 & 18 & -12 & 18 \\ 18 & 36 & -18 & 18 \\ -12 & -18 & 12 & -18 \\ 18 & 18 & -18 & 36 \end{bmatrix},$$

$$k_3 = \frac{EI}{L_3^3} \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ \hline -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{array} \right] \quad k_3 = \frac{0,125 EI}{L_1^3} \left[\begin{array}{cc|cc} 12 & 36 & -12 & 36 \\ 36 & 144 & -36 & 72 \\ \hline -12 & -36 & 12 & -36 \\ 36 & 72 & -36 & 144 \end{array} \right]$$

A gerendatartó globális merevségi mátrixát az elemi merevségi mátrixok kompilálásával határozzuk meg:

$$K = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1^{11} & k_1^{12} & 0 & 0 \\ k_1^{21} & k_1^{22} + k_2^{22} & k_2^{23} & 0 \\ \hline 0 & k_2^{32} & k_2^{33} + k_3^{33} & k_3^{34} \\ 0 & 0 & k_3^{43} & k_3^{44} \end{array} \right],$$

A k_1 , k_2 , k_3 elemi merevségi mátrixok behelyettesítésével kapjuk a 3.1 ábra szerinti gerendatartó teljes merevségi mátrixát:

$$K = \frac{EI}{L_1^3} \left[\begin{array}{cccccccc} 12 & 18 & -12 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 36 & -18 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -18 & 24 & 0 & -12 & 18 & 0 & 0 \\ 18 & 18 & 0 & 72 & -18 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -18 & 13,5 & -13,5 & -1,5 & 4,5 \\ 0 & 0 & 18 & 18 & -13,5 & 54 & -4,5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -4,5 & 1,5 & -4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4,5 & 9 & -4,5 & 18 \end{array} \right]$$

A külső támaszoknak megfelelően: $w_1 = 0$; $\varphi_1 = 0$; $w_3 = 0$; $w_4 = 0$, nem változó, így az elmozdulás vektor az alábbiak szerint négyeleműre redukálódik: $\mathbf{d}^T = [w_2 \ \varphi_2 \ \varphi_3 \ \varphi_4]$.

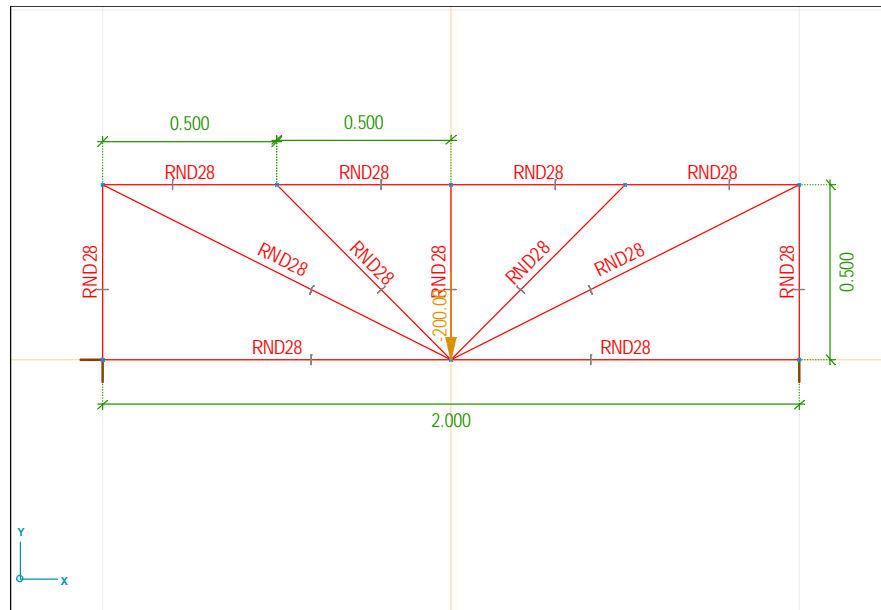
A megfelelő (1., 2., 5., és 7.) sorok és oszlopok törlésével a merevségi mátrix is 4x4 elemű lesz. A feladat megoldását jelentő egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\frac{EI}{L^3} \left[\begin{array}{cccc} 24 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 72 & 18 & 0 \\ 18 & 18 & 54 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 18 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \frac{L^3}{EI} \left[\begin{array}{cccc} 0,060 & 0,006 & -0,024 & 0,012 \\ 0,006 & 0,016 & -0,008 & 0,004 \\ -0,024 & -0,008 & 0,032 & -0,016 \\ 0,012 & 0,004 & -0,016 & 0,063 \end{array} \right] \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

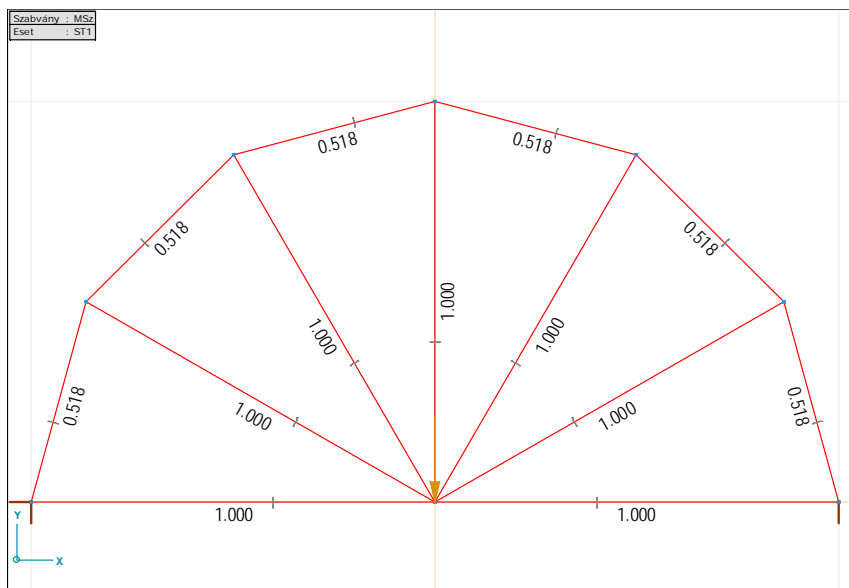
A megoldás: $\mathbf{d}^T = [6,3 \cdot 10^{-3} \quad 0,63 \cdot 10^{-3} \quad -2,52 \cdot 10^{-3} \quad 1,26 \cdot 10^{-3}]$ m, illetve radián.

3.3 Síkbeli és térbeli rácsos tartók megoldása az AXIS program segítségével

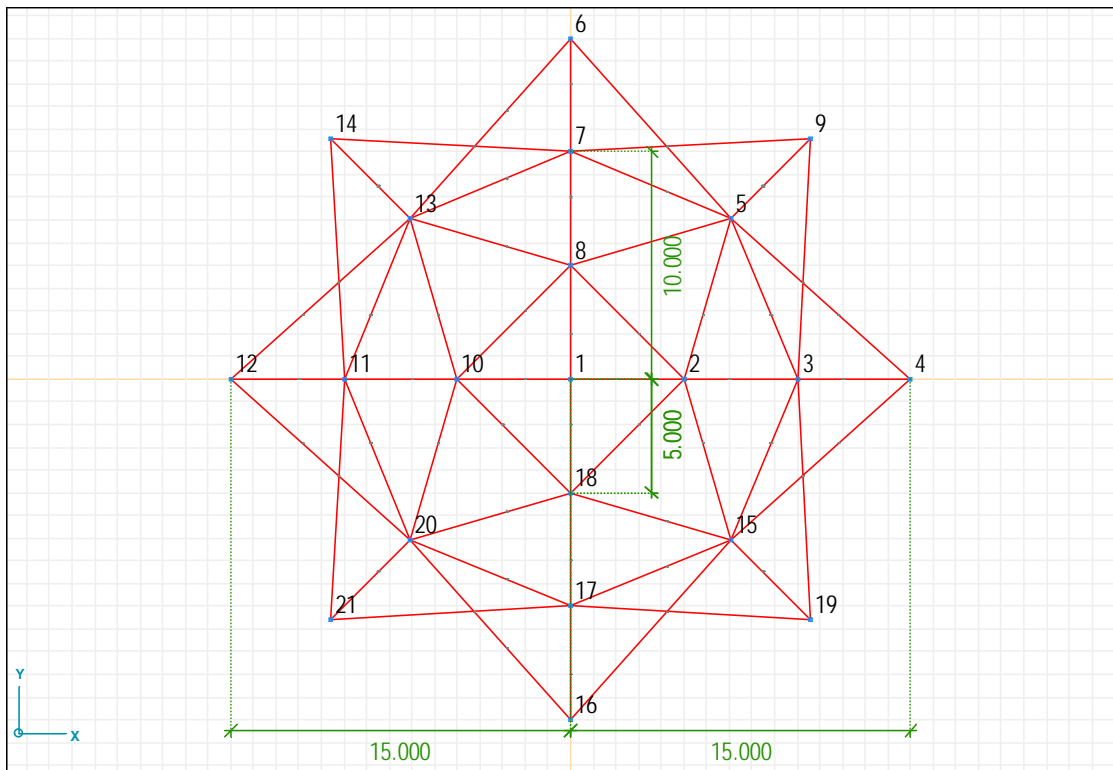
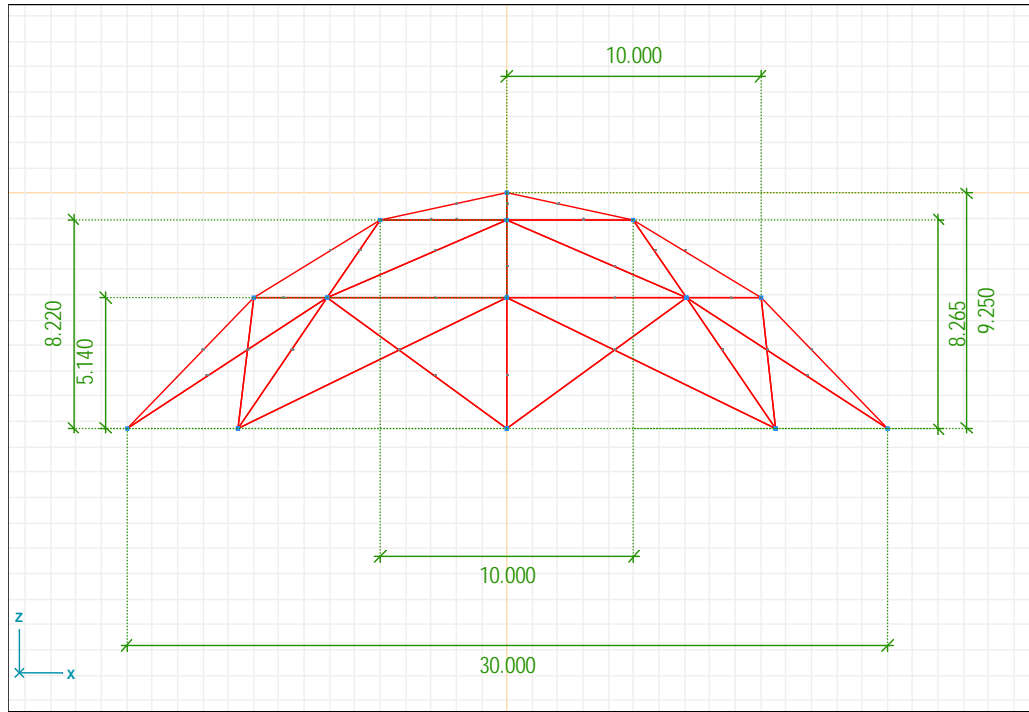
Határozzuk meg 3.4 ábra szerinti acélszerkezetű rácsos tartó rúderőit az AXIS VM8 programmal. Vegyük fel az anyagjellemzőket és a rúdkeresztmetszeteket oly módon, hogy a tartó szilárdságtanilag megfeleljen.



3.4 ábra: Síkbeli rácsos tartó kezdeti geometria adatai



3.5 ábra: Síkbeli rácsos tartó optimális geometria kialakítása

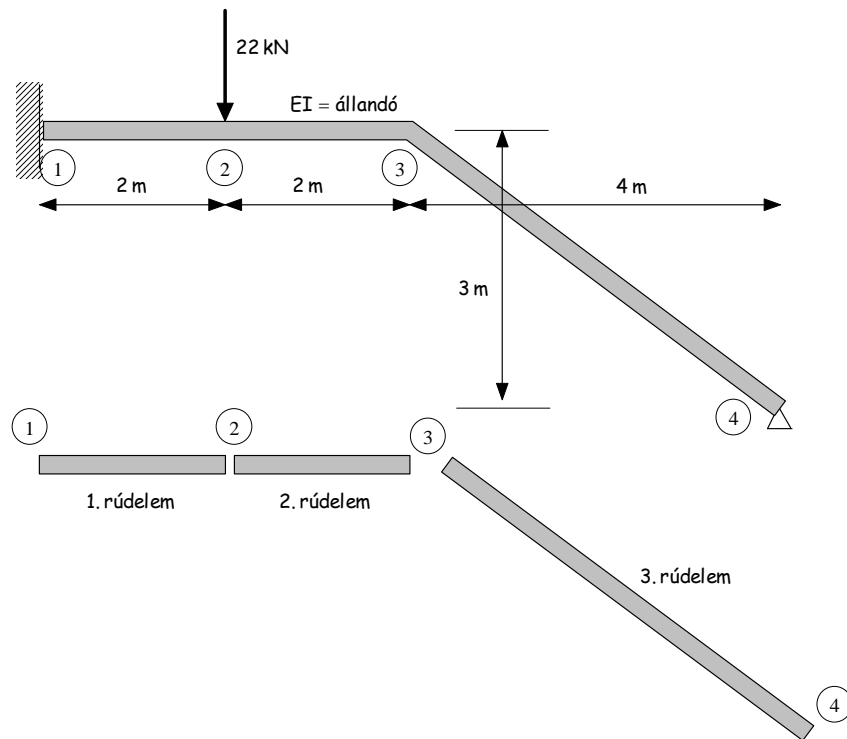


3.6 ábra: Térbeli rácsos tartó geometria kialakítása

4. Törtvonalú gerendatartók végeselemes modellezése.

Az elmozdulás vektorokat a globális koordináta-rendszerben adjuk meg a 4.1 ábra szerinti pontokban:

$$\mathbf{d}_1^{*T} = [u_1 \quad w_1 \quad \varphi_1] \quad \mathbf{d}_2^{*T} = [u_2 \quad w_2 \quad \varphi_2] \quad \mathbf{d}_3^{*T} = [u_3 \quad w_3 \quad \varphi_3] \quad \mathbf{d}_4^{*T} = [u_4 \quad w_4 \quad \varphi_4]$$



4.1 ábra: Törtvonalú gerendatartó végeselemes modellezése

4.1 A merevségi mátrix előállítása

Az elemi merevségi mátrixok előállítása formailag megegyezik az előző feladat esetén tárgyalt elemi merevségi mátrixok meghatározásával. Ferde helyzetű tartók esetén viszont transzponálnunk kell az elemi merevségi mátrixot a globális koordináta-rendszerbe. Ennek következményeként, X, Y, Z tengely irányú elmozdulásokkal kell számolnunk, amit már az elemi merevségi mátrix felírásánál figyelembe kell venni.

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} k_1^{11} & k_1^{12} \\ k_1^{21} & k_1^{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} k_2^{22} & k_2^{23} \\ k_2^{32} & k_2^{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} k_3^{33} & k_3^{34} \\ k_3^{43} & k_3^{44} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_1 = \frac{EI}{L_1^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1602 & 0 & 0 & -1602 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 8 \\ \hline -1602 & 0 & 0 & 1602 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & 12 & 8 & 0 & -12 & 8 \end{array} \right];$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{EI}{L_1^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1602 & 0 & 0 & -1602 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 12 & 0 & -12 & 12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 8 \\ \hline -1602 & 0 & 0 & 1602 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -12 & 0 & 12 & -12 \\ 0 & 12 & 8 & 0 & -12 & 8 \end{array} \right];$$

$$\mathbf{k}_3 = \frac{EI}{L_3^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10013 & 0 & 0 & -10013 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ \hline -10013 & 0 & 0 & 10013 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{array} \right];$$

$$\mathbf{k}_3 = 0,064 \frac{EI}{L_1^3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 10013 & 0 & 0 & -10013 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 30 & 0 & -12 & 30 \\ 0 & 30 & 100 & 0 & -30 & 50 \\ \hline -10013 & 0 & 0 & 10013 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -30 & 0 & 12 & -30 \\ 0 & 30 & 50 & 0 & -30 & 100 \end{array} \right]$$

A transzformáló mátrix és inverze:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,8 & -0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3^* = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_3 \mathbf{T}$$

$$\mathbf{k}_3^* = \frac{EI}{L_1^3} \begin{bmatrix} 410,41 & 307,23 & -1,15 & -410,41 & -307,23 & -1,15 \\ 307,23 & 231,19 & 1,54 & -307,23 & -231,19 & 1,54 \\ -1,15 & 1,54 & 6,40 & 1,15 & -1,54 & 3,20 \\ -410,41 & -307,23 & 1,15 & 410,41 & 307,23 & 1,15 \\ -307,23 & -231,19 & -1,54 & 307,23 & 231,19 & -1,54 \\ -1,15 & 1,54 & 3,20 & 1,15 & -1,54 & 6,40 \end{bmatrix}$$

4.2 Az egyenletrendszer felírása

A törtvonalú gerendatartó globális merevségi mátrixát az elemi merevségi mátrixok kompilálásával határozzuk meg:

$$\mathbf{K} = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1^{11} & k_1^{12} & 0 & 0 \\ k_1^{21} & k_1^{22} + k_2^{22} & k_2^{23} & 0 \\ \hline 0 & k_2^{32} & k_2^{33} + k_3^{33} & k_3^{34} \\ 0 & 0 & k_3^{43} & k_3^{44} \end{array} \right],$$

A külső támaszoknak megfelelően: $u_1; w_1 = 0; \varphi_1 = 0; u_4; w_4 = 0$, így az elmozdulás vektor az alábbiak szerint hételeműre redukálódik: $\mathbf{d}^T = [u_2 \ w_2 \ \varphi_2 \ u_3 \ w_3 \ \varphi_3 \ \varphi_4]$.

A megfelelő (1., 2., 3.; 10.; 11.) sorok és oszlopok törlésével a merevségi mátrix is 7x7 elemű lesz. A feladat megoldását jelentő egyenletrendszer a következő alakot ölti:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{q}$$

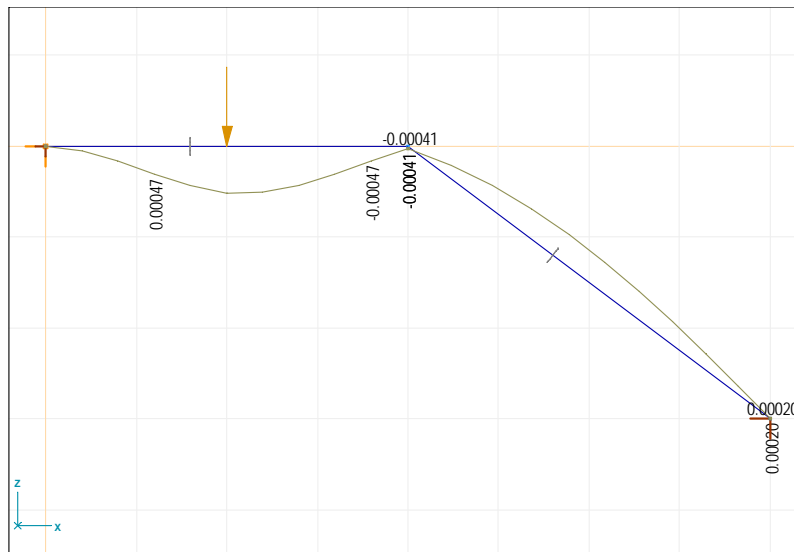
$$\begin{bmatrix} 3204 & 0 & 0 & -1602 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 & 0 & -12 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 & -12 & 8 & 0 \\ -1602 & 0 & 0 & 2012,4 & 307,23 & -1,15 & -1,15 \\ 0 & -12 & -12 & 307,23 & 219 & -10,46 & 1,54 \\ 0 & 12 & 8 & -1,15 & -10,46 & 22,40 & 3,20 \\ 0 & 0 & 0 & -1,15 & 1,54 & 3,20 & 6,40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 22 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A megoldást a merevségi mátrix inverzének előállításával az alábbi formában kapjuk:

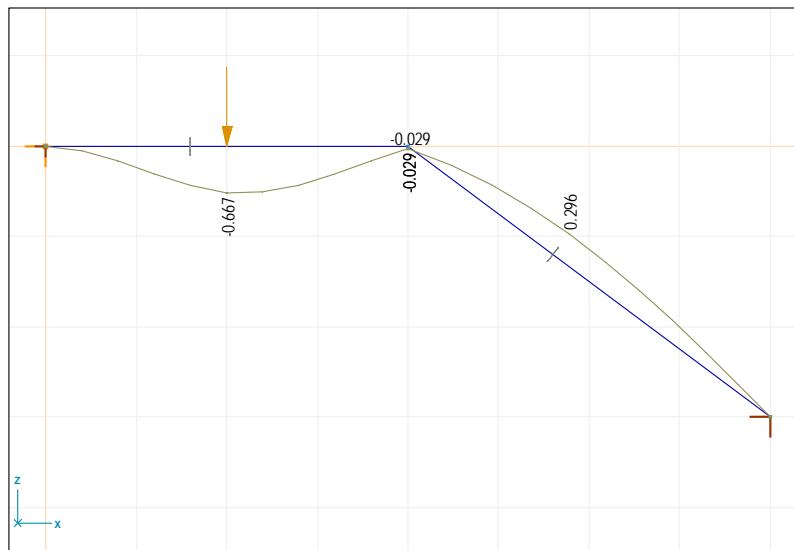
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q} \Rightarrow \mathbf{u}^T = 10^{-4} [0,04 \quad 6,69 \quad 1,16 \quad -0,09 \quad 0,34 \quad -4,12 \quad 1,96] \text{ [m, rad].}$$

4.3 Törtvonalú gerendatartók megoldása az AXIS program segítségével

Határozzuk meg a 4.1 ábrán látható tartó igénybevételi és elmozdulási ábráit az AXIS VM8 programmal. Ellenőrizzük az elmozdulásokra kapott eredményeket.



4.2 ábra. A törtvonalú tartó elfordulás értékei [rad]



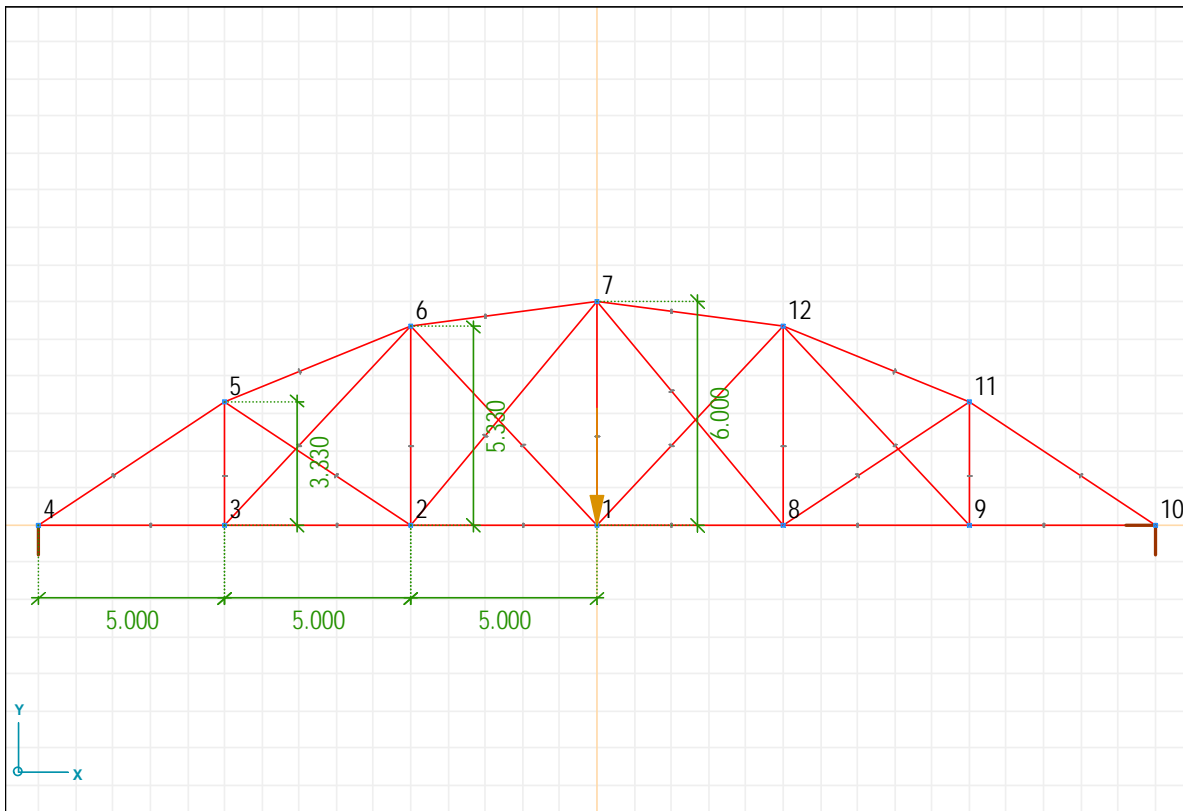
4.3 ábra. A törtvonalú tartó lehajlás értékei [mm]

5. Síkbeli és térbeli rúdszerkezetek megoldása az AXIS program segítségével

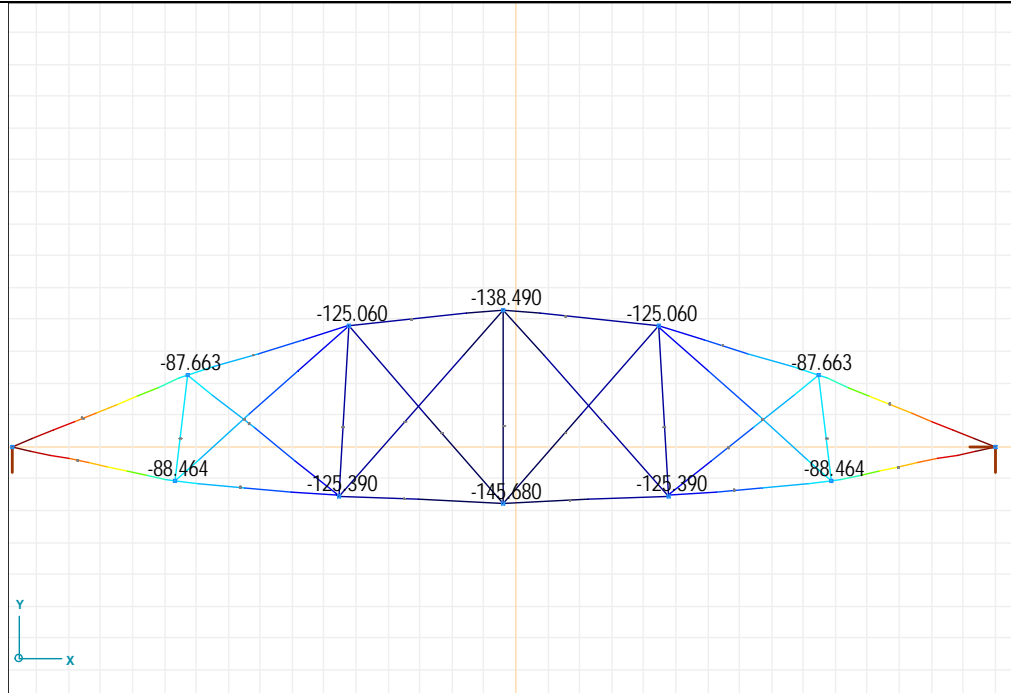
5.1 Síkbeli rúdszerkezetek

Határozzuk meg az 5.1 ábrán megadott síkbeli tartó igénybevételi ábráit csuklós csomóponti kialakítással, illetve az oszlopok és a rácsrudak teljesen merev és félmerev ($S_y = 1,9 \cdot 10^4 \text{ kNm/rad}$) kapcsolata esetén. A teher értéke 300 kN. A kiindulási keresztmetszeti szelvény ROR 42,40*5,0.

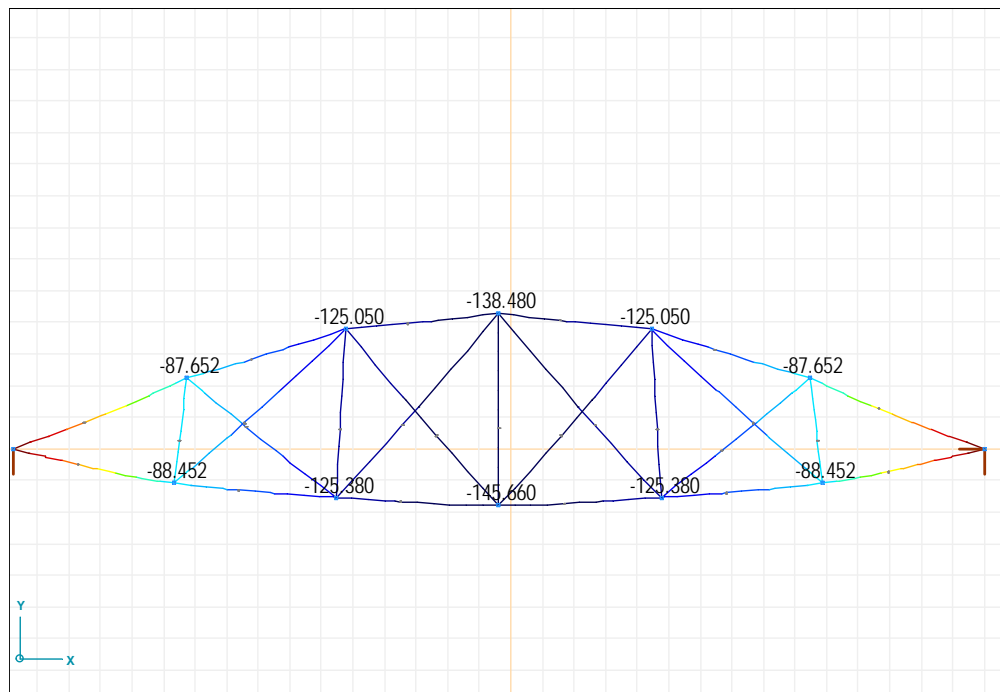
Határozzuk meg a keresztmetszeti értékeket oly módon, hogy a maximális csomóponti lehajlás értéke 5 cm, a maximális feszültség pedig, 20 kN/cm² legyen!



5.1 ábra. Síkbeli rúdszerkezet geometriai kialakítása



5.2 ábra. A rácsos tartó csomóponti elmozdulásai a deformált tartón [mm]



5.3 ábra. A merev csomóponti kialakítású tartó elmozdulásai a deformált tartón [mm]

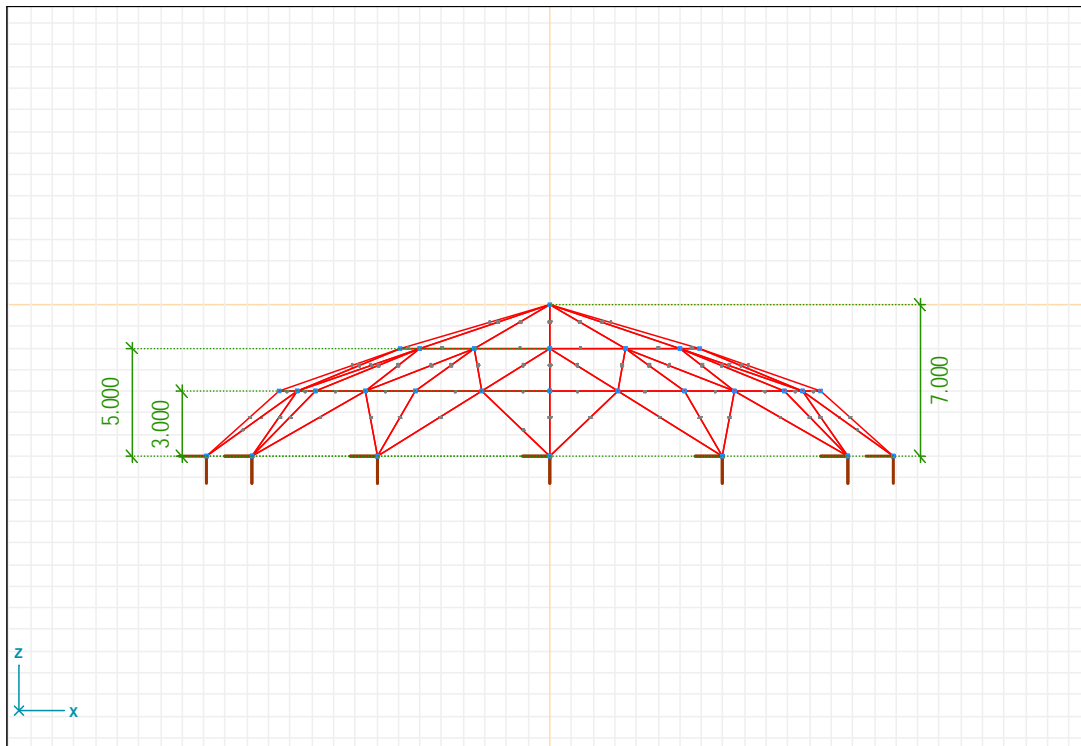
5.2 Térbeli rúdszerkezetek megoldása az AXIS program segítségével

Határozzuk meg az 5.4 és 5.5 ábrán megadott geometriájú acélszerkezetű térbeli tartó igénybevételeit és elmozdulásait három különböző csomóponti kialakítás esetén:

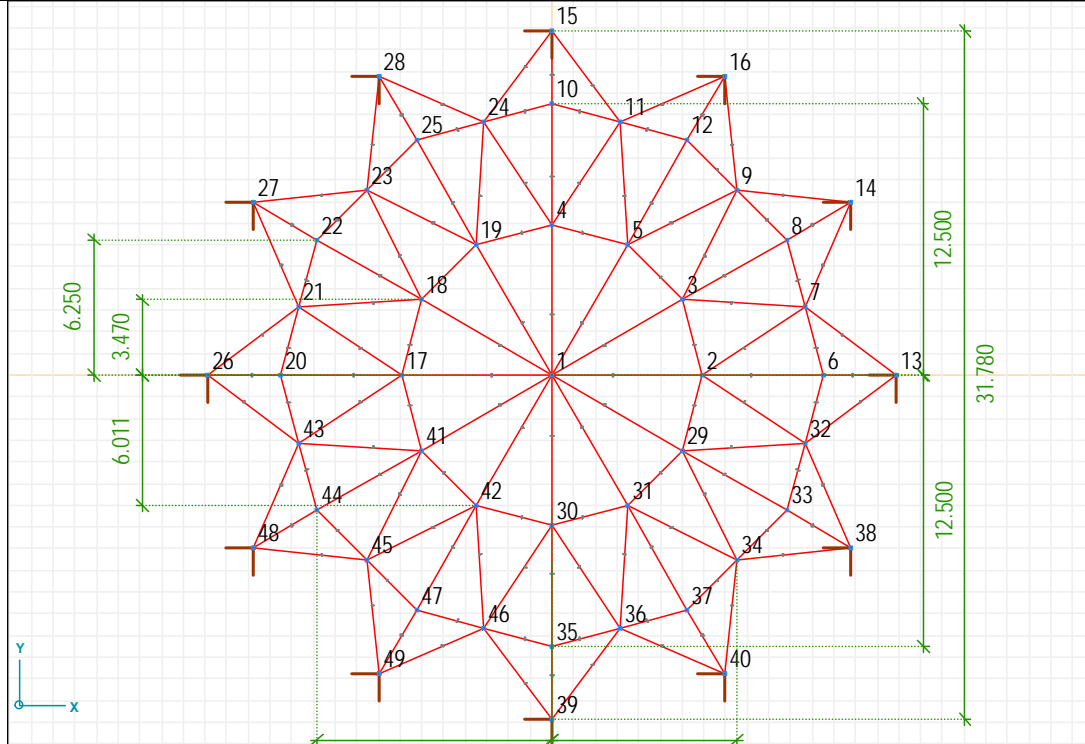
1. Csuklós csomóponti kialakítással térbeli rácsos tartó
2. Teljesen merev csomóponti kialakítással
3. A kupola belső tizenkétszögű lezáró része félmerev csomóponti kialakítással csatlakozzon a tartó alsó részéhez, míg a többi csomópont teljesen merev legyen!

A csomóponti terhek az 5.5 ábra szerinti csomópontokban a következők: $F_1 = 60 \text{ kN}$, $F_{2-4} = F_{17-19} = F_{29-31} = F_{41-42} = 30 \text{ kN}$, $F_{6-12} = F_{20-25} = F_{32-37} = F_{43-47} = 10 \text{ kN}$. A rudak keresztmetszetei európai ROR szelvényből készülnek. A keresztmetszeti méreteket mindhárom esetben úgy határozzuk meg, hogy a szerkezet szilárdságtanilag megfeleljen. A szelvény kiindulási adata: ROR 44,50*2,6.

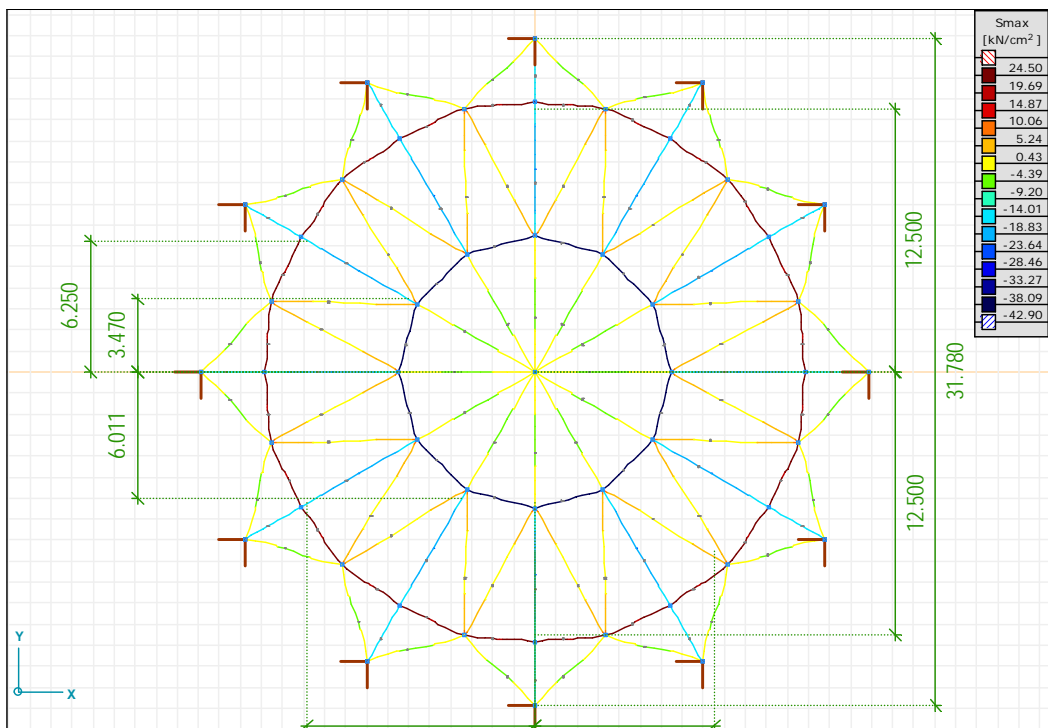
Mindhárom esetben határozzuk meg a rúdelemek kihajlását! Ellenőrizzük a tartóelemeket az Euler-féle nyomófeszültségekre!



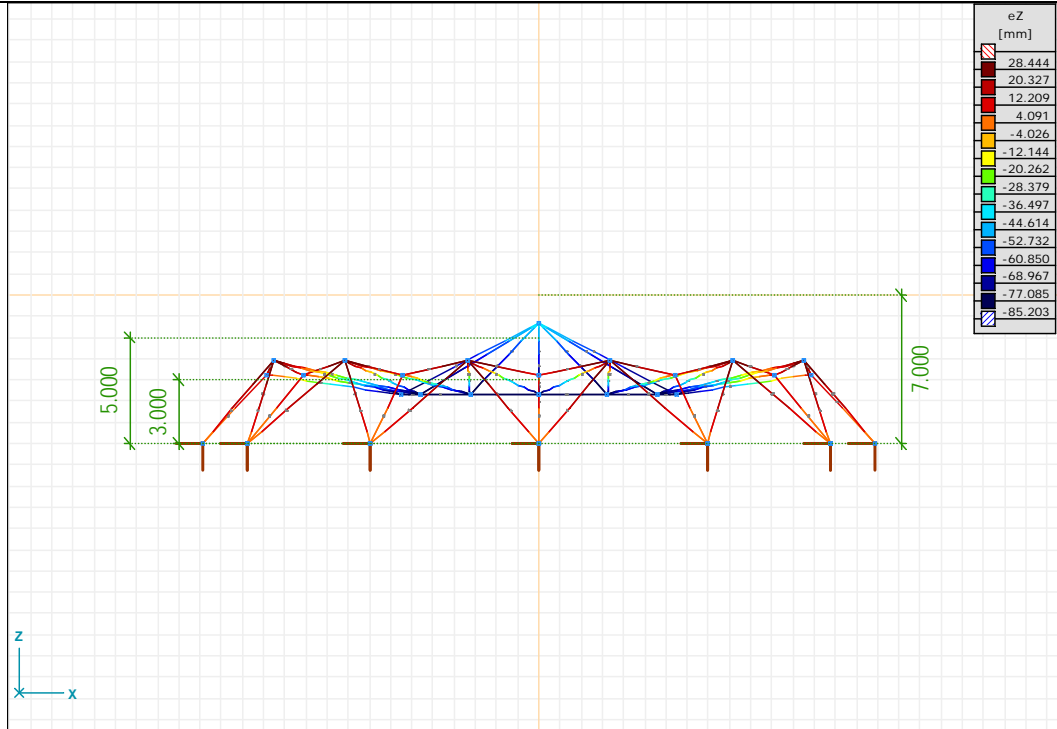
5.4 ábra. Térbeli kupola oldalnézete



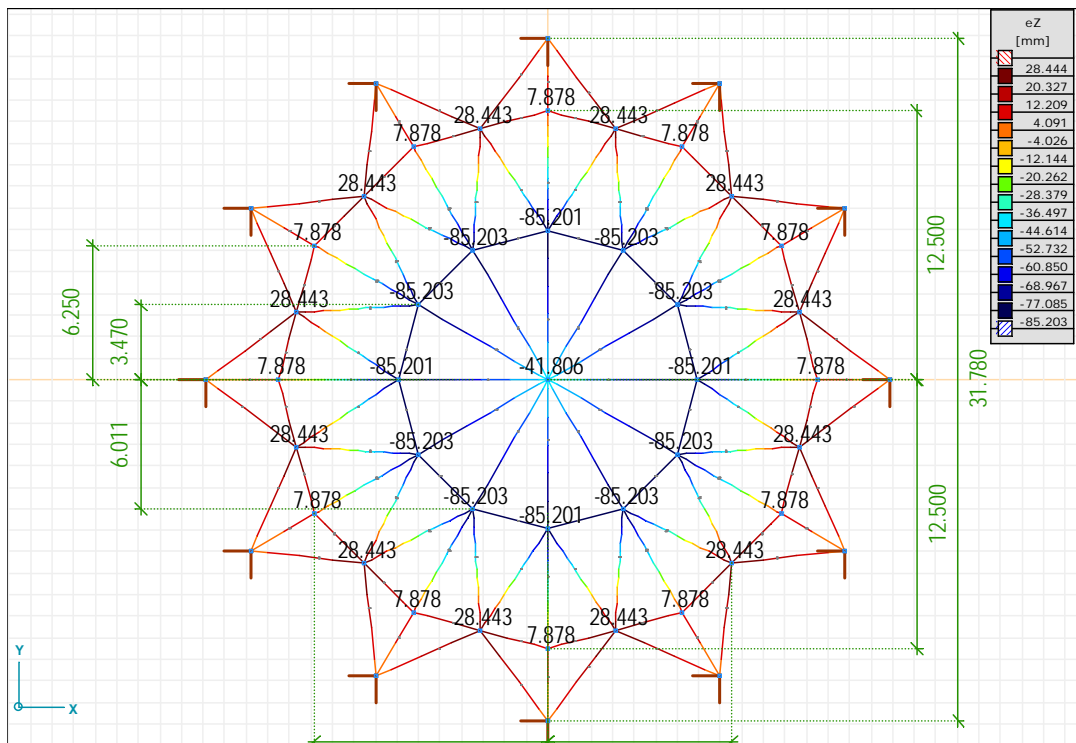
5.5 ábra. Térbeli kupola alaprajzi kialakítása



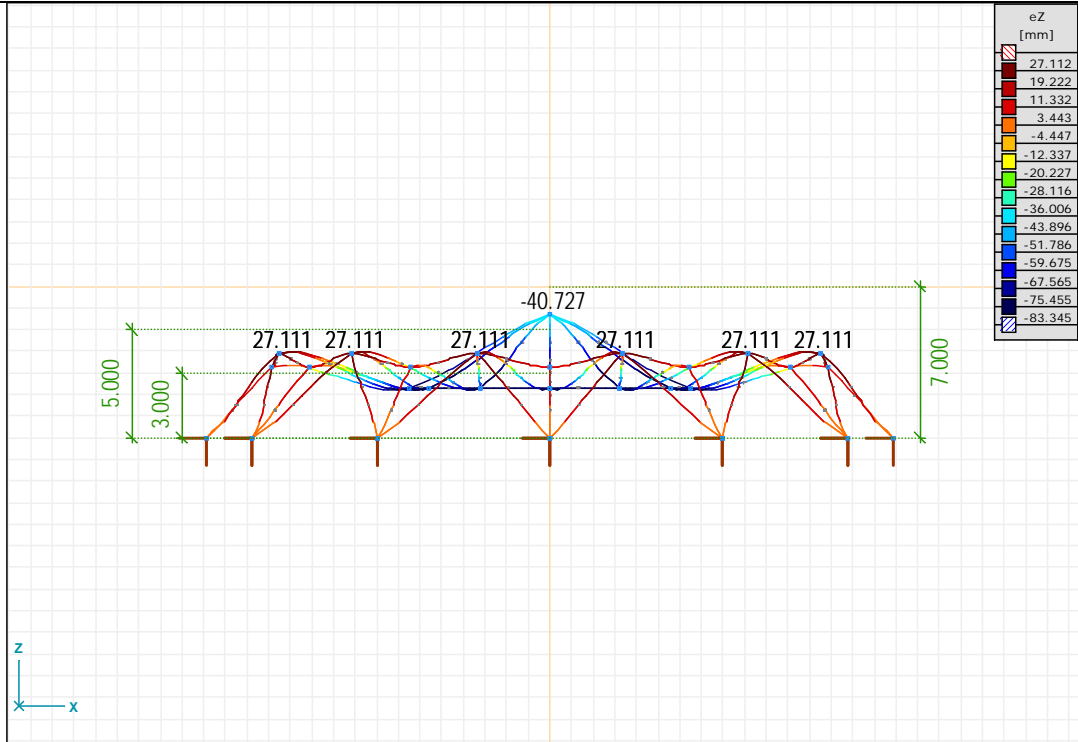
5.6 ábra. A sarokmerv csomóponti kialakítású tartó feszültségei [kN/cm²]



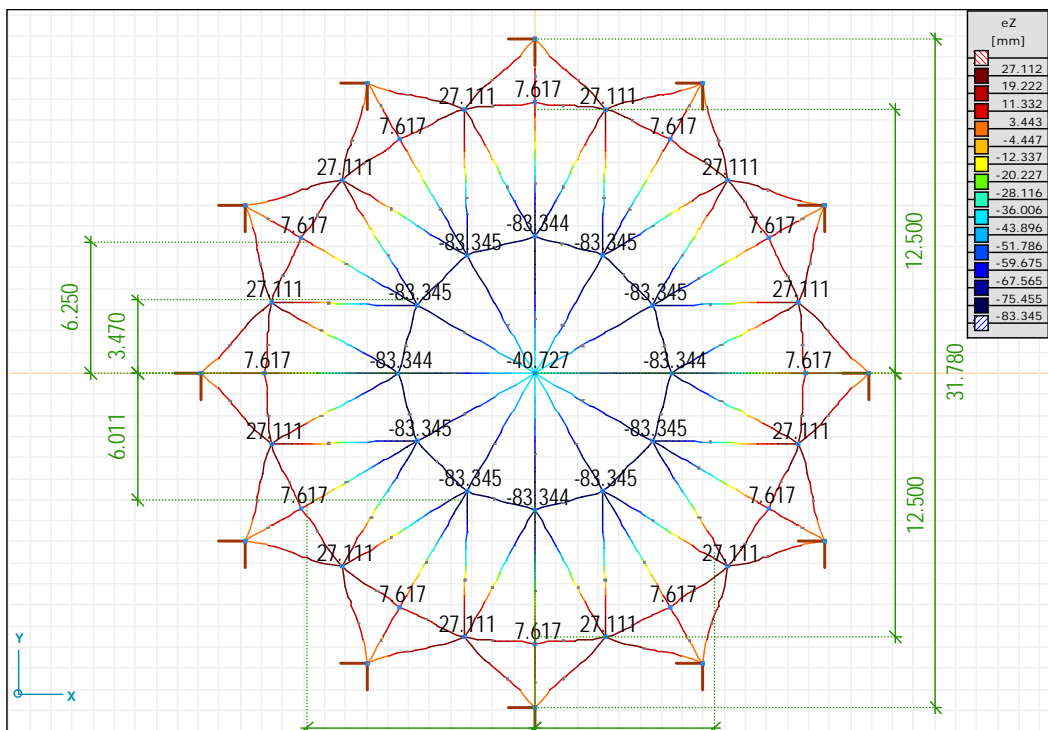
5.7 ábra. Térbeli rácsos kupola csomóponti eltolódásai az elmozdult tartón [mm]



5.8 ábra. Térbeli rácsos kupola csomóponti eltolódásai [mm]



5.9 ábra. A sarokmerev csomóponti kialakítású tartó deformált alakja [mm]



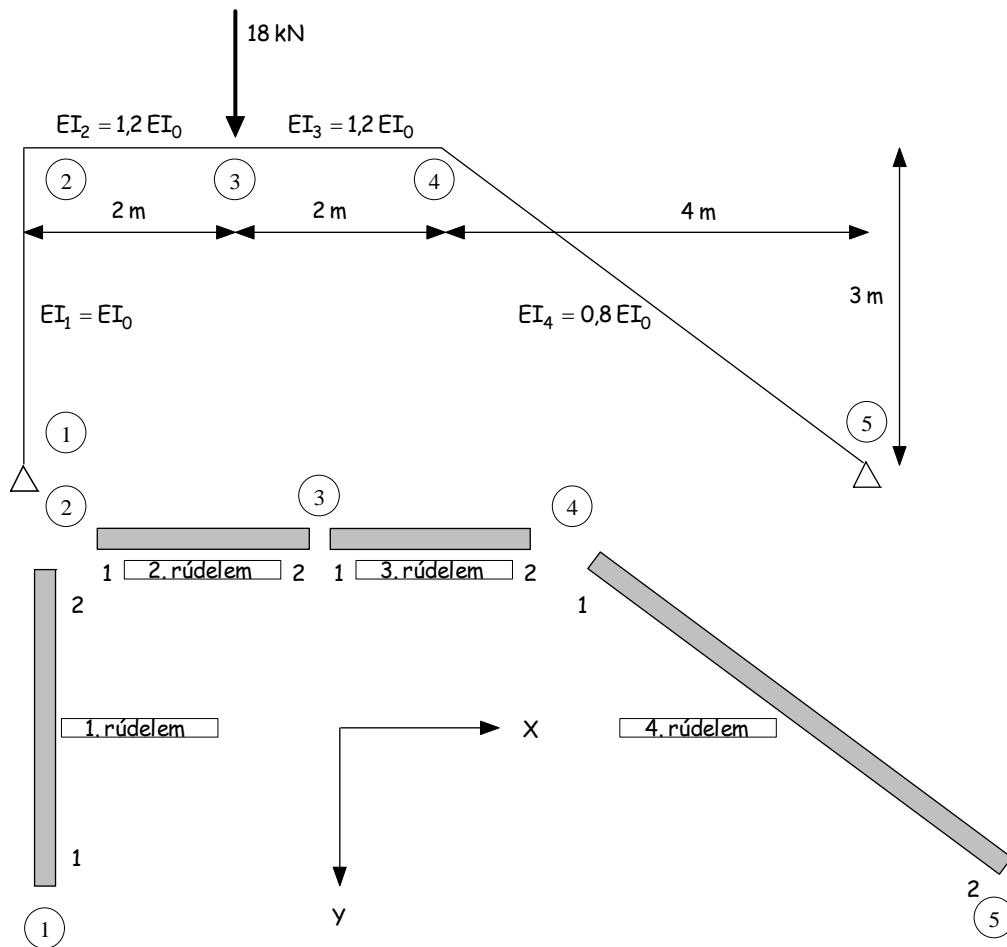
5.10 ábra. A sarokmerev csomóponti kialakítású tartó csomóponti eltolódásai [mm]

6. Síkbeli keretek végeselemes modellezése

A 3. és 4. fejezetekben már foglalkoztunk egyszerű gerendatartók és törtvonalú tartók végeselemes modellezésével. Síkbeli keretek esetén, hasonló módon járunk el. A keretet "véges elemekre" bontjuk, meghatározzuk az elemi merevségi mátrixokat, majd ezek kompilálásával előállítjuk a szerkezet globális koordináta-rendszerbeli merevségi mátrixát, illetve egyenletrendszerét.

6.1 Elmozdulás paraméterek a lokális és globális koordinátarendszerben

A 6.1 ábrán látható kéttámaszú kereten keresztül mutatjuk be a síkbeli keretek végeselemes modellezését.



6.1 ábra. Síkbeli keret végeselemes felbontása

A 6.1 ábrán feltüntettük a tartó geometriáját, illetve a hajlítási merevségi arányokat. A nyúlási merevségek aránya: $EA_1 = EA_2 = EA_3 = 0,9 EA_4$.

Rúdelemek	1		2		3		4	
Elem végpontok a lokális koordináta rendszerben	1	2	1	2	1	2	1	2
Elmozdulások a lokális koordináta rendszerben	$u_1 w_1 \varphi_1$	$u_2 w_2 \varphi_2$	$u_1 w_1 \varphi_1$	$u_2 w_2 \varphi_2$	$u_1 w_1 \varphi_1$	$u_2 w_2 \varphi_2$	$u_1 w_1 \varphi_1$	$u_2 w_2 \varphi_2$
Elmozdulások a lokális koordináta rendszerben	$d_1 d_2 d_3$	$d_4 d_5 d_6$	$d_1 d_2 d_3$	$d_4 d_5 d_6$	$d_1 d_2 d_3$	$d_4 d_5 d_6$	$d_1 d_2 d_3$	$d_4 d_5 d_6$
Lokális kódok	1 2 3	4 5 6	1 2 3	4 5 6	1 2 3	4 5 6	1 2 3	4 5 6
Globális kódok a peremfeltételek nélkül	1 2 3	4 5 6		7 8 9		10 11 12		13 14 15
Globális kódok a peremfeltételek mellett	0 0 1	2 3 4		5 6 7		8 9 10		0 0 11
Elmozdulások a globális koordináta rendszerben	$0 0 d_1$	$d_2 d_3 d_4$		$d_5 d_6 d_7$		$d_8 d_9 d_{10}$		$0 0 d_{11}$
Elem végpontok a globális koordináta rendszerben	1	2		3		4		5

6.1 táblázat. Elmozdulás paraméterek a lokális és globális koordináta rendszerben

A 6.1 táblázat segítségével könnyen átlátható a lokális és globális koordináta rendszerekben megadott elmozdulások közötti kapcsolat. A táblázat nem csak az elmozdulás vektor meghatározásában, hanem a globális merevségi mátrix előállításában is segítségünkre lesz. A táblázatból "kiolvasható", hogy az egyes elemek végpontjaiban mely elmozdulások lesznek azonosak. A szerkezet valós elmozdulása csak a globális rendszerben megadott elmozdulás paraméterekkel jellemezhető, ahol figyelembe vettük a támaszok hatását, mint peremfeltételeket.

6.2 A globális merevségi mátrix előállítása

Az elemi merevségi mátrixok előállítása az első fejezetben tárgyalt módon az 1.24 szerint történik. Abban az esetben, amikor a lokális koordinátairányok nem egyeznek meg a globális koordináta tengelyekkel, akkor az elemi merevségi mátrixokat a globális koordináta rendszerbe kell transzponálnunk (lásd a 6.1 ábra szerinti 1. és 2. jelű rúdelemeket).

A lokális koordináta rendszerben az elemi merevségi mátrixok az alábbiak:

$$\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{11} & \mathbf{k}_1^{12} \\ \mathbf{k}_1^{21} & \mathbf{k}_1^{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_2^{22} & \mathbf{k}_2^{23} \\ \mathbf{k}_2^{32} & \mathbf{k}_2^{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_3^{33} & \mathbf{k}_3^{34} \\ \mathbf{k}_3^{43} & \mathbf{k}_3^{44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_4^{44} & \mathbf{k}_4^{45} \\ \mathbf{k}_4^{54} & \mathbf{k}_4^{55} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

ahol

$$\mathbf{k}_i^{ii} = \begin{bmatrix} EA_i/L_i & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_i/L_i^3 & 6EI_i/L_i^2 \\ 0 & 6EI_i/L_i^2 & 4EI_i/L_i \end{bmatrix}.$$

A globális koordináta rendszerbe transzformált elemi merevségi mátrixok az alábbiak:

$$\mathbf{k}_1^* = \mathbf{T}_1^T \mathbf{k}_1 \mathbf{T}_1, \quad \mathbf{k}_2^* = \mathbf{k}_2, \quad \mathbf{k}_3^* = \mathbf{k}_3, \quad \mathbf{k}_4^* = \mathbf{T}_4^T \mathbf{k}_4 \mathbf{T}_4, \quad (6.2)$$

ahol

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_i & \sin \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha_i & \cos \alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A kompilálást a 6.3 szerinti globális koordinátarendszerbe forgatott elemi mátrixok azonos felső indexű $\mathbf{k}_{i-1}^{*ii} + \mathbf{k}_i^{*ii}$ blokkmátrixainak összegzésével nyerjük.

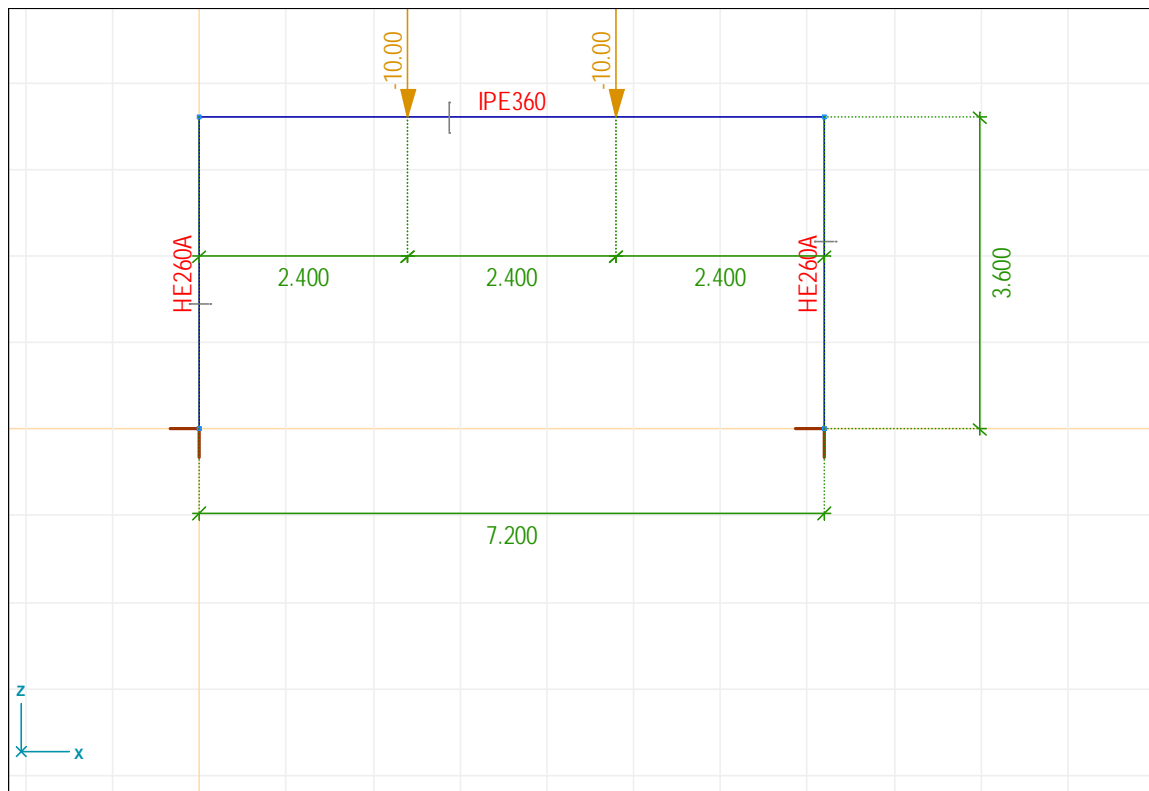
$$\mathbf{k}_1^* = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1^{*11} & \mathbf{k}_1^{*12} \\ \mathbf{k}_1^{*21} & \mathbf{k}_1^{*22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_2^* = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_2^{*22} & \mathbf{k}_2^{*23} \\ \mathbf{k}_2^{*32} & \mathbf{k}_2^{*33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_3^* = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_3^{*33} & \mathbf{k}_3^{*34} \\ \mathbf{k}_3^{*43} & \mathbf{k}_3^{*44} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_4^* = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_4^{*44} & \mathbf{k}_4^{*45} \\ \mathbf{k}_4^{*54} & \mathbf{k}_4^{*55} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

A peremfeltételek figyelembe vétele nélkül a teljes merevségi mátrix mérete 15x15 elemű, mint azt az előzőekben láttuk, illetve a 6.1 táblázatból kiolvasható. A teljes merevségi mátrixot az elemi mátrixok kompilálásával kapjuk a következő séma szerint, ahol a kitöltött • jel jelöli a zérustól különböző elemeket.

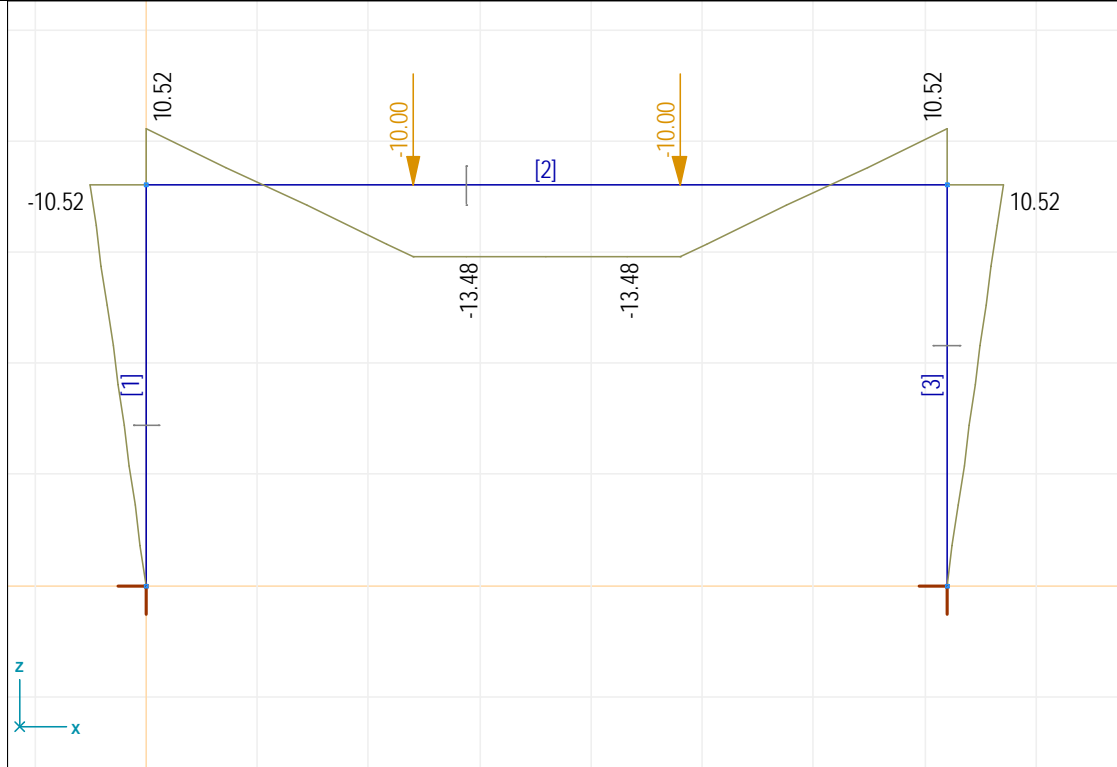
7. Síkbeli és térbeli keretek végeselemes megoldása az AXIS VM8 program segítségével

7.1 Síkbeli keretek. Merev és félmerev kialakítású oszlop-gerenda kapcsolatok

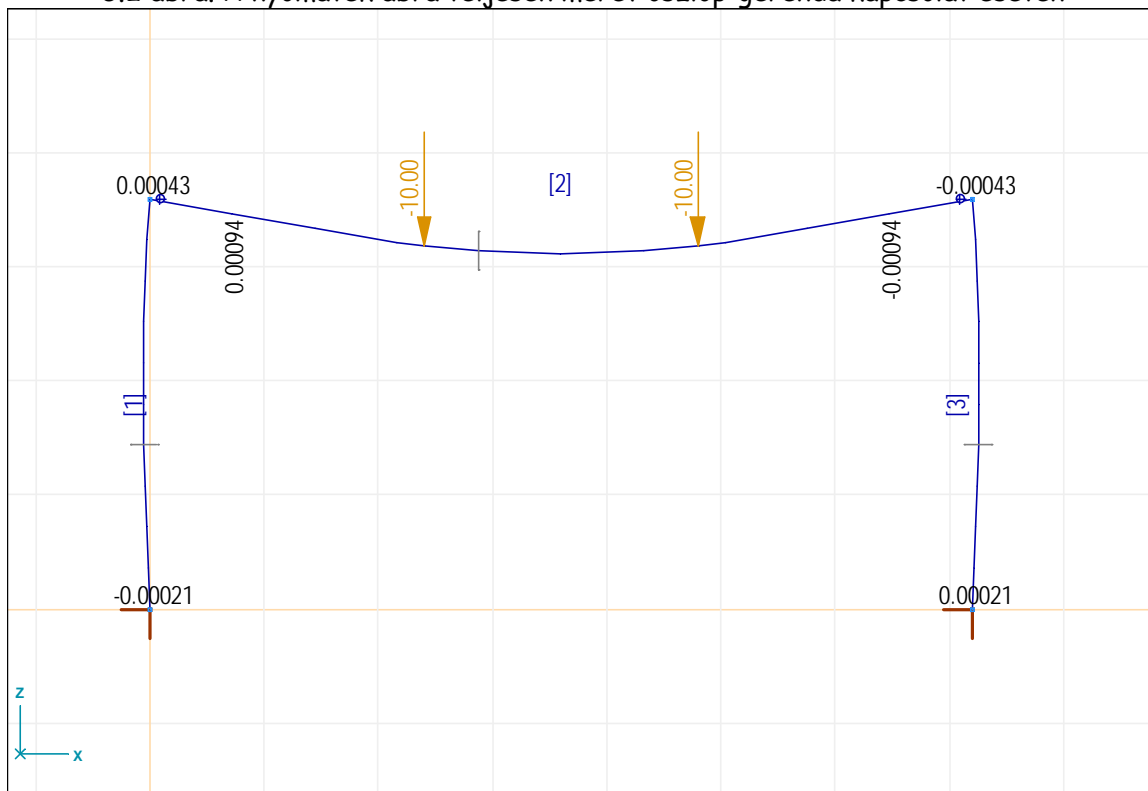
Határozzuk meg a síkbeli keret igénybevételi ábráit teljesen merev és félmerev ($S_y = 1,9 \cdot 10^4 \text{ kNm/rad}$) oszlop-gerenda kapcsolat esetén. Az AXIS VM8 alkalmazásához megadjuk a szerkezet kiinduló adatait.



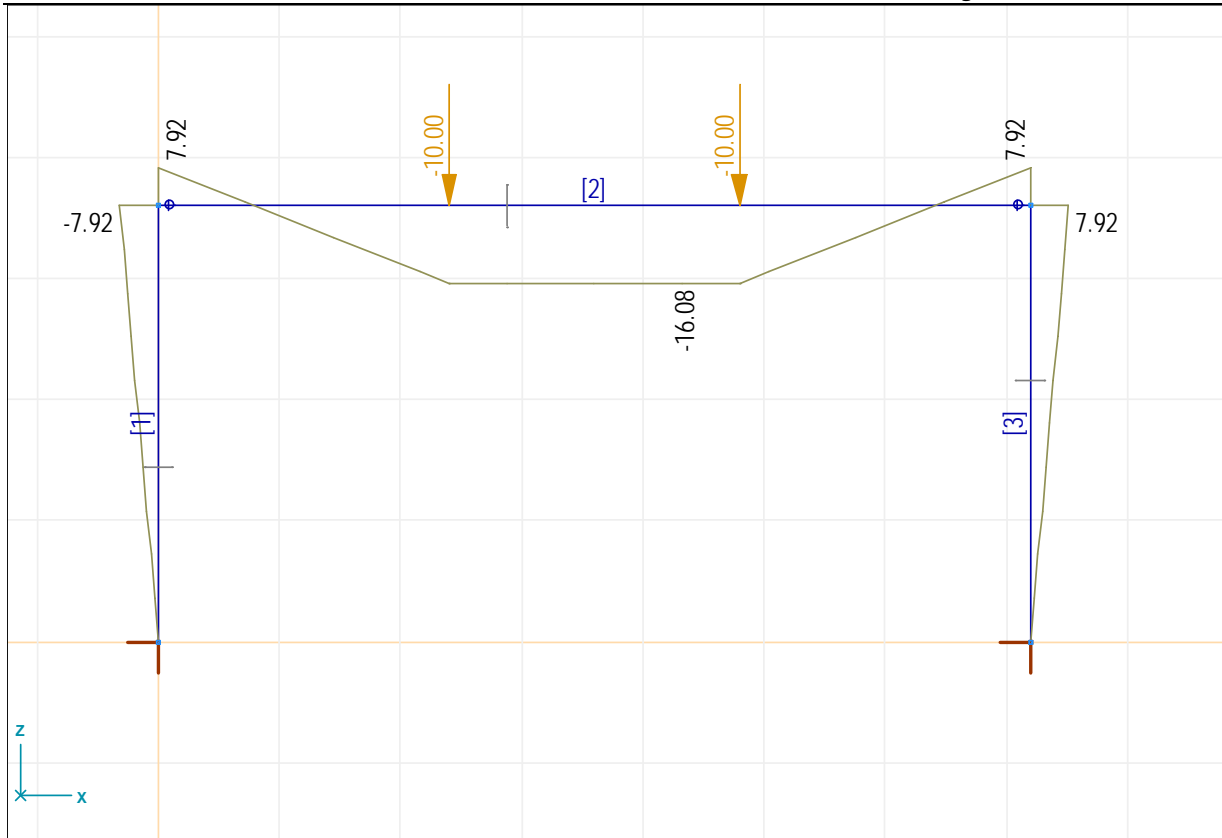
5.1 ábra. Síkbeli keret geometriai adatai



5.2 ábra. A nyomaték ábra teljesen merev oszlop-gerenda kapcsolat esetén



5.3 ábra. Elfordulások a deformált tartón

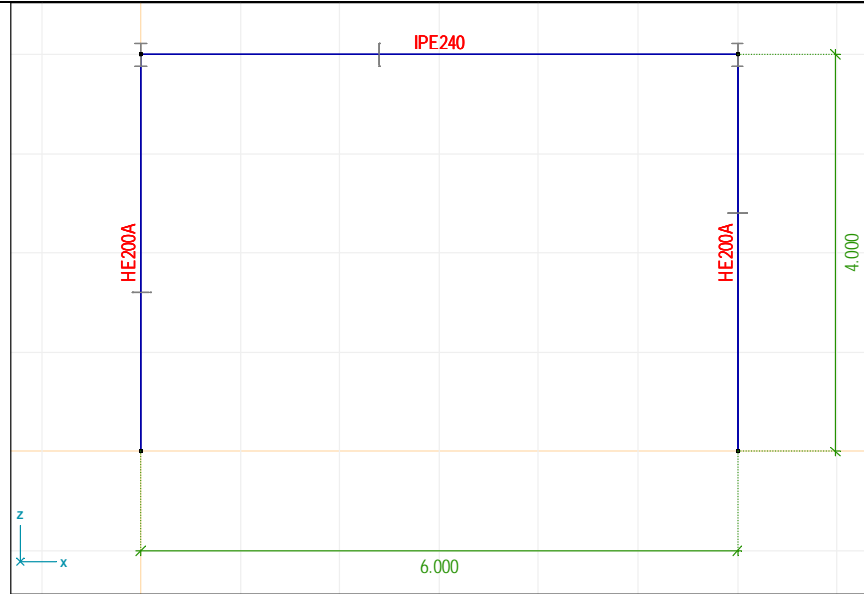


5.4 ábra. A nyomaték ábra félmerev oszlop-gerenda kapcsolat esetén

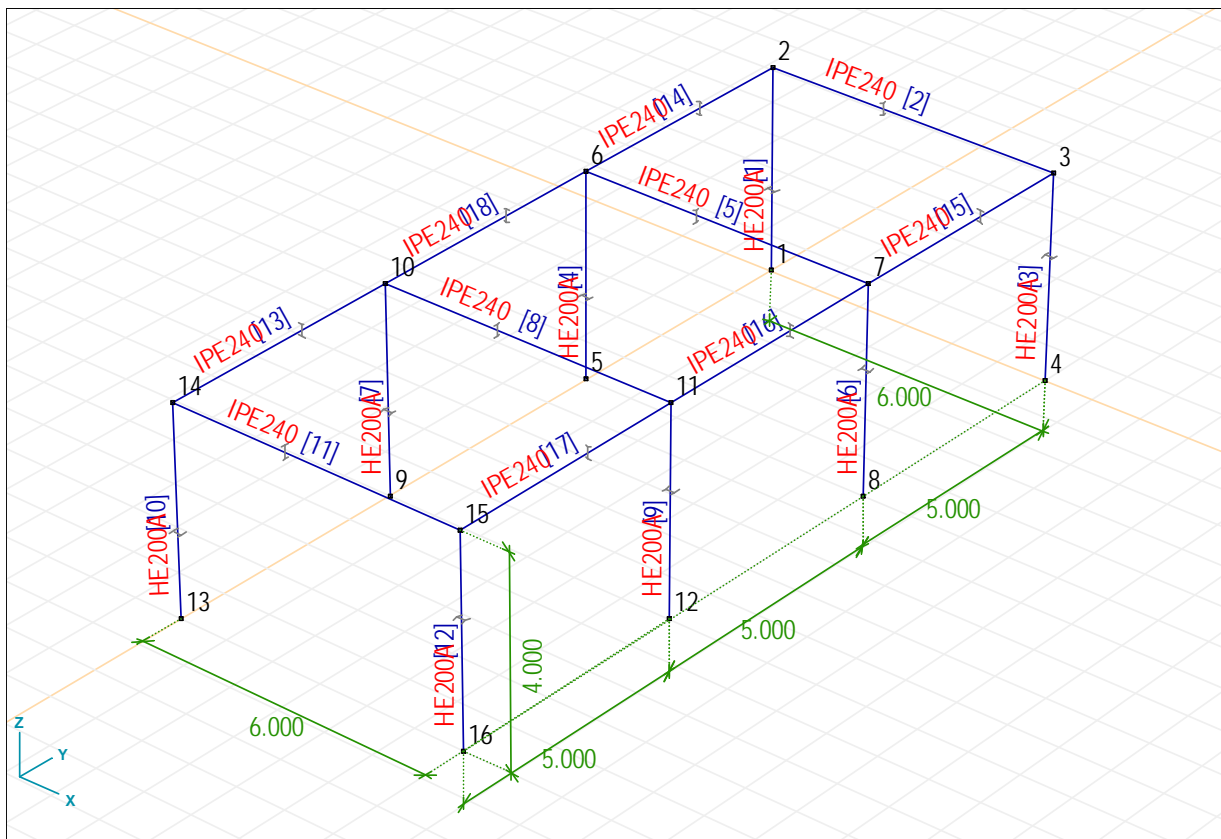
7.1 Térbeli keretek modellezése az AXIS VM8 program segítségével

Határozzuk meg az 5.4 és 5.5 ábrán látható keretszerkezet igénybevételi ábráit teljesen merev és félmerev ($S_y = 1,9 \cdot 10^4 \text{ kNm/rad}$) oszlop-gerenda kapcsolat esetén.

Tervezze meg a csarnok lefedését és a hosszirányú merevítését!



5.4 ábra. A keretszerkezet kiinduló adatai



5.5 ábra. A keretszerkezet kiinduló adatai

8. Tárcsák végeselemes modellezése

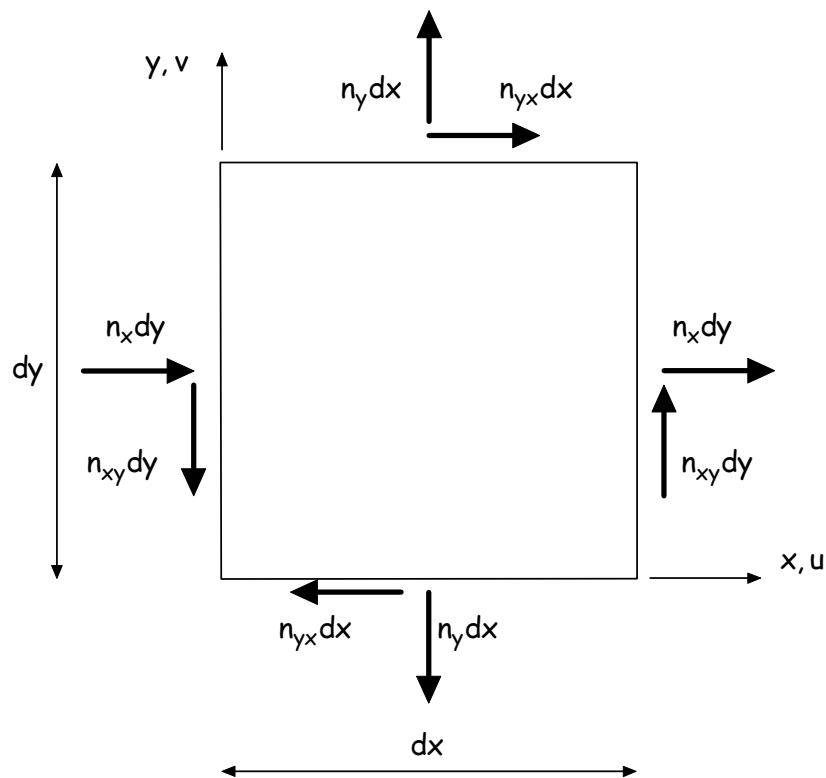
8.1 Alapegyenletek

A 8.1 ábra szerinti belső metszeterők vektora:

$$\mathbf{s}^T = [s_x \quad s_y \quad s_{xy}] = [n_x \quad n_y \quad n_{xy}]. \quad (8.1)$$

Az elmozdulások vektora:

$$\mathbf{u}^T = [u \quad v]. \quad (8.2)$$



8.1 ábra

Az alakváltozások vektora:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]. \quad (8.3)$$

Az anyagtörvény:

$$\mathbf{E} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

A belső erők és az alakváltozások közötti összefüggést a 8.1 és 8.4 kifejezések alapján a tárcsákra vonatkozó Hooke-törvény adja:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}. \quad (8.5)$$

Az elmozdulások és az alakváltozások közötti kapcsolatot az alábbi kifejezésekkel jellemezzük:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.6)$$

Vezessük be az alábbi operátort:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

így az alakváltozási vektor mátrix alakban az alábbi formában írható

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

8.2 Háromszög elemek

A tárcsák végeselemes modellezésének egyik lehetséges módja, hogy a felületet háromszög elemekre bontjuk. Az elmozdulás módszeren alapuló végeselemes modellezés első lépéseként közelítsük a 8.2 szerinti elmozdulásokat az alábbi polinomokkal:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y, \quad (8.8)$$

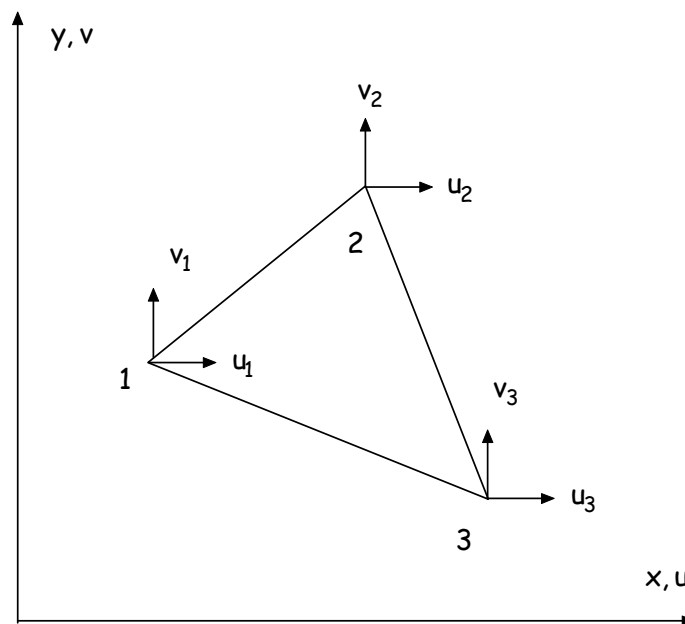
$$v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y, \quad (8.9)$$

azaz mátrix alakban

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (8.10)$$

ahol az együttható mátrix

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}. \quad (8.11)$$



8.2 ábra: A háromszög tárcsaelem elmozdulás paramétere

A 8.2 ábra szerinti háromszög "véges elem" csomóponti elmozdulásait az alábbi formában kapjuk:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad (8.12)$$

ahol

$$\mathbf{d}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3] = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6], \quad (8.13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (8.15)$$

ahol

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} & 0 \\ y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} \\ 0 & y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad (8.16)$$

és

$$xy_{ij} = x_i y_j - x_j y_i, \quad x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad 2A = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21}.$$

Az alakváltozások és a csomóponti elmozdulások közötti összefüggést a 8.6 alapján határozhatjuk meg:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (8.17)$$

ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

8.3 Az egyensúlyi egyenletek

Az egyensúlyi egyenletrendszer meghatározásához induljunk ki a potenciális energia függvényből:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(A)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{u} dA - \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dP, \quad (8.19)$$

ahol \mathbf{g} a tömegterhelések, \mathbf{p} pedig a peremterhelések vektora.

Az alakváltozásokra és a csomóponti elmozdulásokra vonatkozó 8.10, 8.12, illetve 8.15 kifejezések behelyettesítésével kapjuk:

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{d} - \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{N} dA - \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP, \quad (8.20)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1}, \quad (8.21)$$

az alakfüggvények mátrixa.

Az egyensúlyi egyenletrendszer a 8.17 alapján a teljes potenciális energia minimum tételére alapján írhatjuk fel:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{q}, \quad (8.22)$$

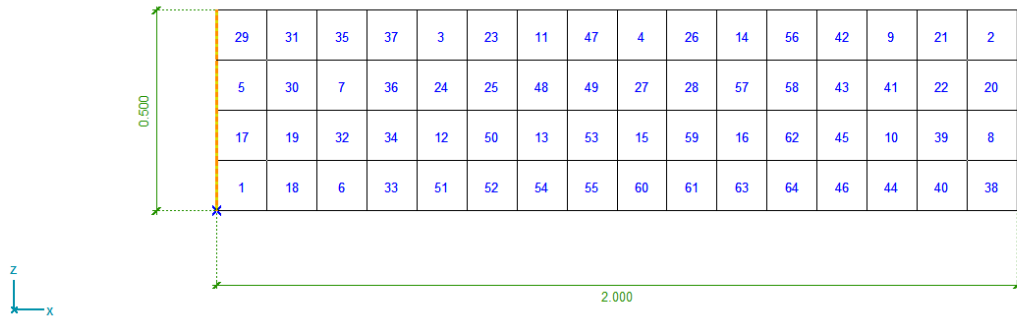
ahol

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}), \quad (8.23)$$

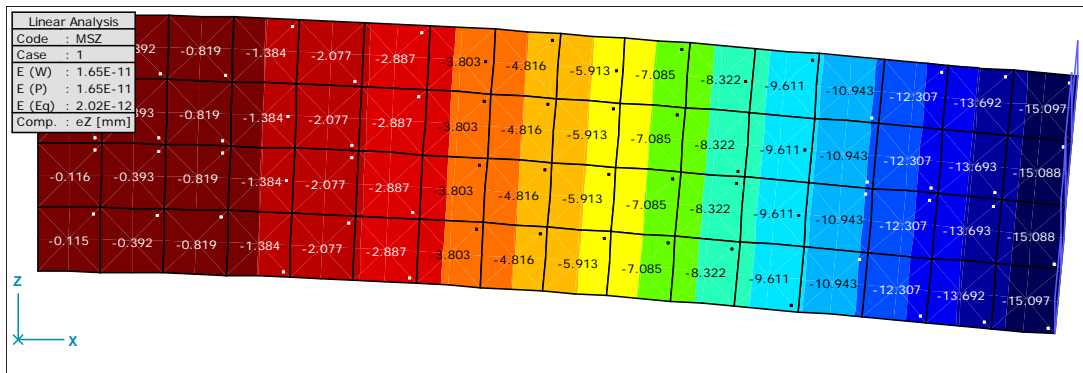
$$\mathbf{q} = \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{N} dA + \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP. \quad (8.24)$$

8.4 Tárca feladatok megoldása az AXIS program segítségével

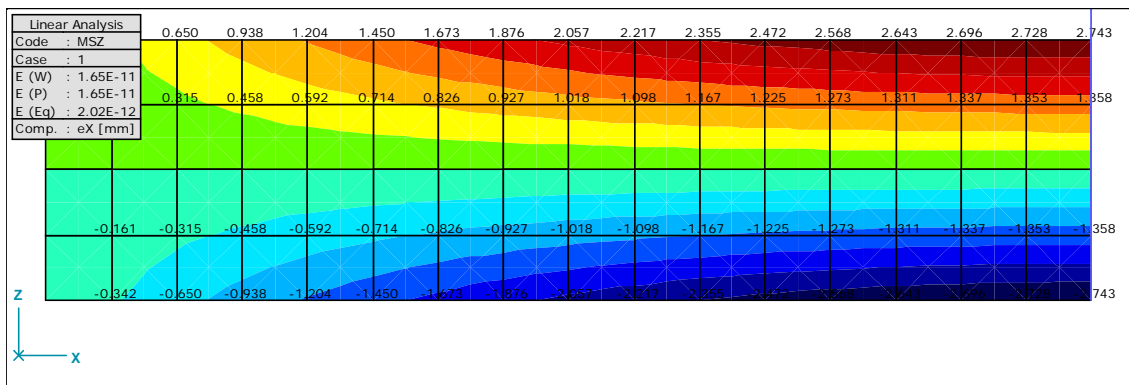
Határozzuk meg 8.3 ábra szerinti tárcsa feladat igénybevételeit! A tárcsa anyaga C16 beton. A terhek a 2-es és 38-as elem élén $q_2 = q_{38} = 66,67 \text{ kN/m}$, a 20-as és a 8-as elemeken pedig $q_{20} = q_8 = 133,33 \text{ kN/m}$. A felvett vastagság $v = 10 \text{ cm}$.



8.3 ábra: A tárcsa geometriai adatai



8.4 ábra: A tárcsa z tengely irányú eltolódásai [mm]



8.5 ábra: A tárcsa x tengely irányú eltolódásai [mm]

9. Tárcsák végeselemes modellezése

A tárcsák végeselemes modellezésének egyik lehetséges módját, a felület háromszög elemekre való bontását, az előző fejezetben tárgyaltuk. A másik lehetőség a négyszög elemekre történő felbontás, amelynek pontossága a közelítő polinom méretének függvényében tovább javítható.

9.1 Négyszög elemek

Közelítsük a 9.1 ábra szerinti $u(x, y)$, $v(x, y)$ elmozdulásokat az alábbi polinomokkal:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy, \quad (9.1)$$

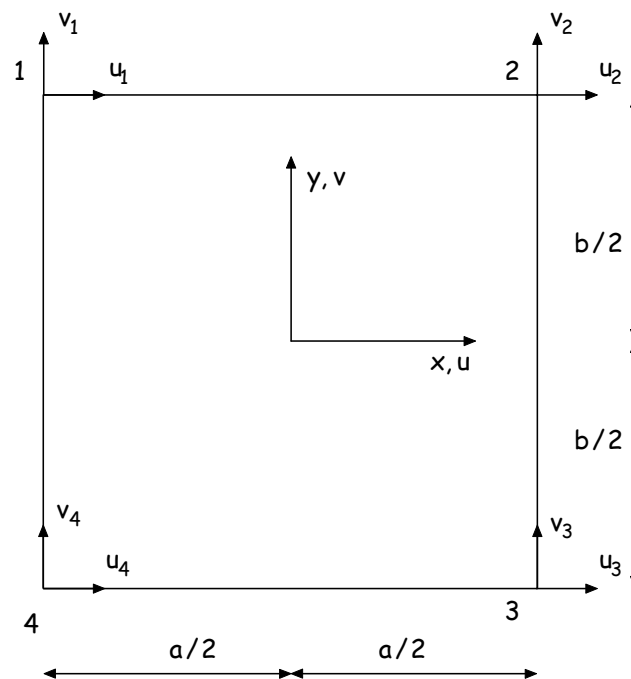
$$v(x, y) = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy, \quad (9.2)$$

azaz mátrix alakban

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (9.3)$$

ahol az együttható mátrix

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix}. \quad (9.4)$$



9.1 ábra: A négyszög tárcsaelem elmozdulás paraméterei

A 9.1 ábra szerinti négyszög "véges elem" csomóponti elmozdulásait az alábbi formában kapjuk:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad (9.5)$$

ahol

$$\mathbf{d}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] = [d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \quad d_5 \quad d_6 \quad d_7 \quad d_8], \quad (9.6)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 & -b/2 & ab/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a/2 & -b/2 & ab/4 \\ 1 & a/2 & -b/2 & -ab/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a/2 & -b/2 & -ab/4 \\ 1 & a/2 & b/2 & ab/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a/2 & b/2 & ab/4 \\ 1 & -a/2 & b/2 & -ab/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a/2 & b/2 & ab/4 \end{bmatrix}. \quad (9.7)$$

A 9.5 egyenletrendszer megoldásával kapjuk az \mathbf{a} vektor értékét:

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}. \quad (9.8)$$

Az \mathbf{A} együttható mátrix inverze egyszerű formában megadható, ha szeparáljuk a 9.5 egyenleteket u_i , v_i változók szerint.

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{A}}_u & 0 \\ 0 & \overset{\circ}{\mathbf{A}}_v \end{bmatrix}. \quad (9.9)$$

ahol

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}_u = \overset{\circ}{\mathbf{A}}_v = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 & -b/2 & ab/4 \\ 1 & a/2 & -b/2 & -ab/4 \\ 1 & a/2 & b/2 & ab/4 \\ 1 & -a/2 & b/2 & -ab/4 \end{bmatrix}. \quad (9.10)$$

Az $\overset{\circ}{\mathbf{A}}_u$ és $\overset{\circ}{\mathbf{A}}_v$ blokkmátrixok inverz mátrixa:

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}_u^{-1} = \overset{\circ}{\mathbf{A}}_v^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/a & 1/a & 1/a & -1/a \\ -1/b & -1/b & 1/b & 1/b \\ 2/ab & -2/ab & 2/ab & -2/ab \end{bmatrix}. \quad (9.11)$$

A 9.9 mátrix inverze:

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}}^{-1} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\mathbf{A}}_u^{-1} & 0 \\ 0 & \overset{\circ}{\mathbf{A}}_v^{-1} \end{bmatrix}. \quad (9.12)$$

A 9.12 alapján a 9.7 mátrix inverze:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/a & 0 & 1/a & 0 & 1/a & 0 & -1/a & 0 \\ -1/b & 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 1/b & 0 \\ 2/ab & 0 & -2/ab & 0 & 2/ab & 0 & -2/ab & 0 \\ \hline 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/a & 0 & 1/a & 0 & 1/a & 0 & -1/a \\ 0 & -1/b & 0 & -1/b & 0 & 1/b & 0 & 1/b \\ 0 & 2/ab & 0 & -2/ab & 0 & 2/ab & 0 & -2/ab \end{array} \right]. \quad (9.13)$$

9.2 Az elemi merevségi mátrix

Az elemi merevségi mátrix meghatározásakor ismét az alakváltozások és az elmozdulás paraméterek közötti összefüggésből indulunk ki.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{a} = \mathbf{D}\mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}, \quad (9.14)$$

ahol ebben az esetben

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix}. \quad (9.15)$$

Az alakváltozások vektorát a 9.15 és 9.13 9.14-be történő behelyettesítésével kapjuk:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} ab \begin{bmatrix} 2y-b & 0 & -2y+b & 0 & 2y+b & 0 & -2y-b & 0 \\ 0 & 2x-a & 0 & -2x-a & 0 & 2x+a & 0 & -2x+a \\ 2x-a & 2y-b & -2x-a & -2y+b & 2x+a & 2y+b & -2x+a & -2y-b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \end{bmatrix}, \quad (9.16)$$

ahol \mathbf{d}_i $i=1,2,3,4$ csomóponti elmozdulás paraméterek.

Az egyensúlyi egyenletrendszert szokásos módon a teljes potenciális energia minimum tétele alapján határozzuk meg:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(A)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{u} dA - \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dP, \quad (9.17)$$

ahol \mathbf{g} a tömegterhelések, \mathbf{p} pedig a peremterhelések vektora.

Az egyensúlyi egyenletrendszert az alakváltozásokra vonatkozó 9.16 kifejezés 9.17-be való behelyettesítésével kapjuk az alábbi módon:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{q}, \quad (9.18)$$

ahol a merevségi mátrix

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}), \quad (9.19)$$

azaz a 9.16 kifejezés együttható mátrixa behelyettesítésével előállítható.

A tehervektor 9.3, illetve 9.4 behelyettesítésével

$$\mathbf{q} = \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{N} dA + \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP. \quad (9.20)$$

ahol

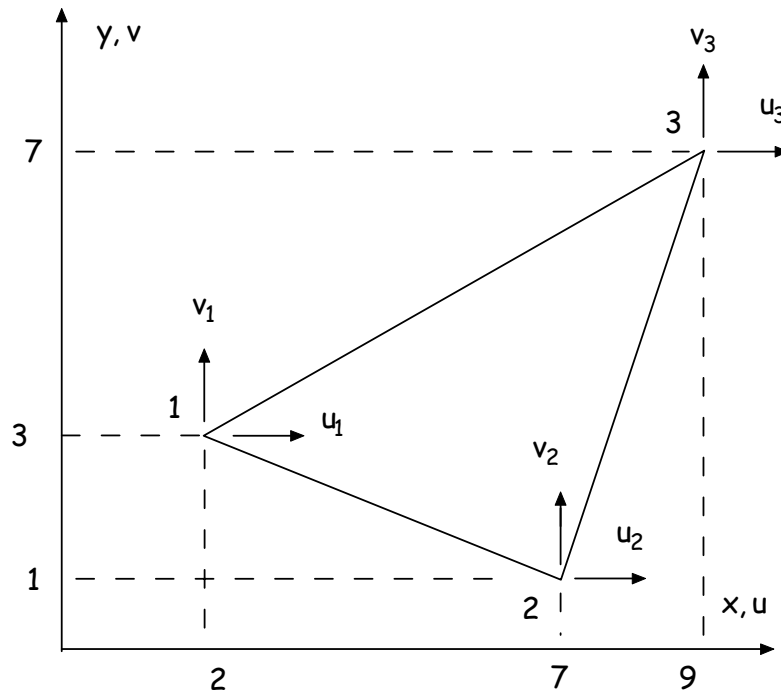
$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1}. \quad (9.21)$$

10. Tárcsák végeselemes modellezése

A tárcsafeladatok végeselemes modellezésére két lehetséges közelítést mutattunk be 8. és 9. fejezetben, a háromszög, illetve négyszög elemekre történő felbontást.

10.1 Az elemi merevségi mátrix meghatározásának bemutatása egy adott példán keresztül

A modell felépítésének főbb lépéseit egy mintapéldán keresztül mutatjuk be, amelyet Bojtár Imre -Gáspár Zsolt: "Végeselem módszer építőmérnököknek" című könyvéből vettünk át. A feladatot az x, y koordinátákban ábrázoltuk a csomópontokhoz rendelt elmozdulásokkal. A Poisson-tényező értéke 0,2.



10.1 ábra: Tárcsa feladat háromszögelemmel

A merevségi mátrix meghatározását a 8.23 szerint végezzük:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}), \quad (10.1)$$

ahol most a síkbeli feszültség állapotra vonatkozó 8.4 szerinti kifejezés

$$\mathbf{E} = \frac{Eh}{1-0,2^2} \begin{bmatrix} 1 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-0,2)/2 \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

Végezzük el 8.16 és 8.18 kifejezések alapján az alábbi mátrixszorzást:

$$\mathbf{BA}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} & 0 \\ y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} \\ 0 & y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad (10.3)$$

és $xy_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $2A = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21}$.

A megoldásként kapott kifejezésbe helyettesítsük be a csomóponti koordináták aktuális értékeit:

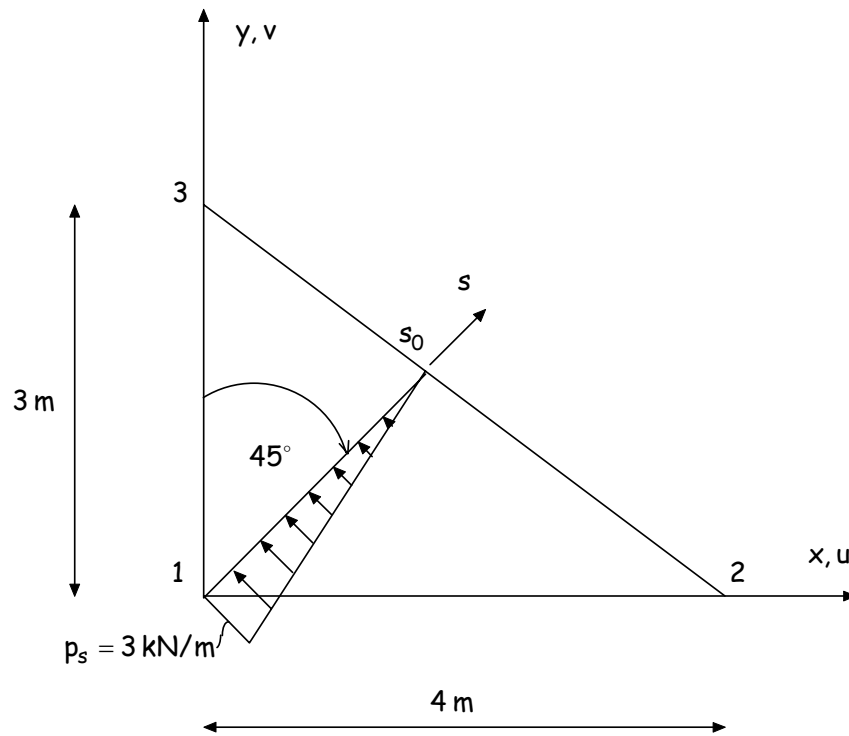
$$\mathbf{BA}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \\ x_{32} & y_{23} & x_{31} & y_{13} & x_{21} & y_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} -6 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -7 & 0 & 5 \\ 2 & -6 & -7 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad (10.4)$$

amelyet a merevségi mátrix 8.23 szerinti kifejezésébe helyettesítve az alábbi megoldásra jutunk:

$$\mathbf{K} = \frac{Eh}{68 \cdot 0,96} \begin{bmatrix} 37,6 & -7,2 & -29,6 & 11,6 & -8 & -4,4 \\ -7,2 & 18,4 & 18,4 & -23,6 & -11,2 & 5,2 \\ -29,6 & 18,4 & 35,6 & -16,8 & -6 & -1,6 \\ 11,6 & -23,6 & -16,8 & 55,4 & 5,2 & -31,8 \\ -8 & -11,2 & -6 & 5,2 & 14 & 6 \\ -4,4 & 5,2 & -1,6 & -31,8 & 6 & 26,6 \end{bmatrix}. \quad (10.5)$$

10.2 A redukált terhek meghatározásának bemutatása egy adott példán keresztül

A redukált terhek vektorának meghatározását szintén egy mintapéldán keresztül mutatjuk be, amelyet ugyancsak Bojtár Imre -Gáspár Zsolt: "Végeselem módszer építőmérnököknek" című könyvéből vettünk át.



10.2 ábra: A tárcsaelem terhelése

A tehervektor meghatározása a külső potenciális energia (8.20) alapján a következő alakban keresendő:

$$\mathbf{q} = \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP. \quad (10.6)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1}, \quad (10.7)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} & 0 \\ y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} & 0 \\ x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} & 0 \\ 0 & xy_{23} & 0 & xy_{31} & 0 & xy_{12} \\ 0 & y_{23} & 0 & y_{31} & 0 & y_{12} \\ 0 & x_{32} & 0 & x_{13} & 0 & x_{21} \end{bmatrix}, \quad (10.9)$$

ahol $xy_{ij} = x_i y_j - x_j y_i$, $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$, $2A = x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21}$.

A mátrix szorzás elvégzése után a bázis függvények az alábbi alakot öltik:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}, \quad (10.10)$$

ahol $N_1 = 1 - \frac{x}{4} - \frac{y}{3}$, $N_2 = \frac{x}{4}$, $N_3 = \frac{y}{3}$.

A 10.2 ábra adatainak behelyettesítésével az x, y szerinti változókat s függvényeként írunk fel:

$$x = y = \frac{s}{\sqrt{2}}, \quad -p_x = p_y = \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right), \quad s_0 = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

A 10.6 kifejezésbe való behelyettesítés után az eredmény:

$$\mathbf{q} = \int_0^{s_0} \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{4\sqrt{2}} - \frac{s}{3\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{4\sqrt{2}} - \frac{s}{3\sqrt{2}} \\ \frac{s}{4\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{s}{4\sqrt{2}} \\ \frac{s}{3\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{s}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{s}{s_0}\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ds, \quad (10.11)$$

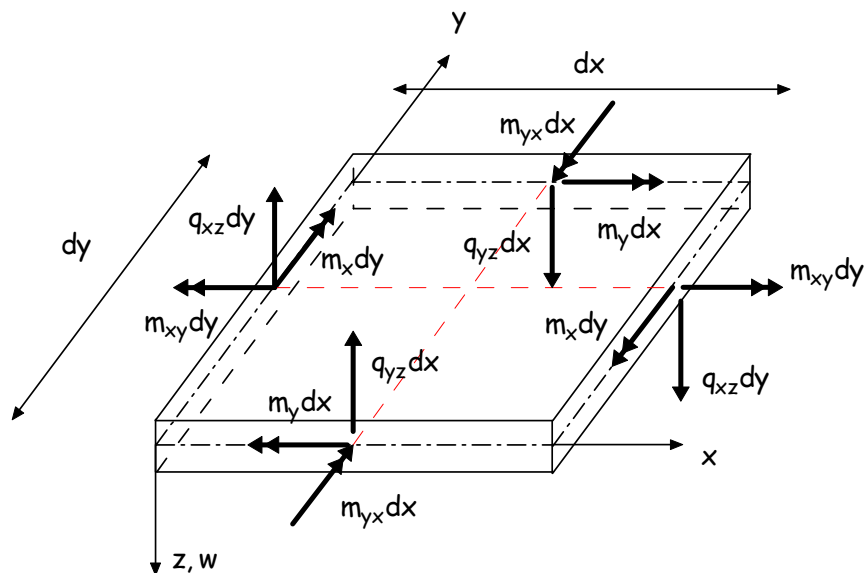
$$\mathbf{q}^T = \frac{1}{49} [-84 \quad 84 \quad -18 \quad 18 \quad -24 \quad 24]. \quad (10.12)$$

11. Lemezek végeselemes modellezése

11.1 Alapfogalmak

A tantárgy keretén belül csak a vékony lemezek végeselemes modellezésével fogunk foglalkozni, azaz síkbeli feszültségállapotot feltételezünk. A 11.1 ábrán x, y koordináta síkban adtuk meg az elemi tartóra ható metszeterőket. A vékonylemezek esetén az elmozdulások vektora csak egy elemet, a 11.1 ábra szerinti $w(x, y)$ lehajlást tartalmazza:

$$\mathbf{u}^T = [w(x, y)]. \quad (11.1)$$



11.1 ábra: A lemezelem belső erői

11.2 Alakváltozások és belső erők vektora

Az alakváltozások vektora:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right]. \quad (11.2)$$

Az anyagtörvény:

$$\mathbf{E} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}. \quad (11.3)$$

A 11.1 ábra szerinti független belső erők vektora:

$$\mathbf{s}^T = [s_x \quad s_y \quad s_{xy}] = [m_x \quad m_y \quad m_{xy}]. \quad (11.4)$$

A belső erők és az alakváltozások közötti összefüggés mátrix alakja:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (11.5)$$

azaz

$$m_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (w_{xx} + \mu w_{yy}), \quad (11.6)$$

$$m_y = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (w_{yy} + \mu w_{xx}), \quad (11.7)$$

$$m_{xy} = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} (1-\mu)w_{xy}. \quad (11.8)$$

11.3 Négyszög elemek

Közelítsük a 11.1 ábra szerinti $w(x,y)$ lehajlás függvényt az alábbi 16 elemű kubikus polinommal:

$$\begin{aligned} w(x,y) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + \\ & a_{10}y^3 + a_{11}xy^3 + a_{12}x^3y + a_{13}x^2y^2 + a_{14}x^2y^3 + a_{15}x^3y^2 + a_{16}x^3y^3, \end{aligned} \quad (11.9)$$

azaz mátrix alakban

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (11.10)$$

ahol

$$\mathbf{X}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad x^2y^3 \quad x^3y^2 \quad x^3y^3] \quad (11.11)$$

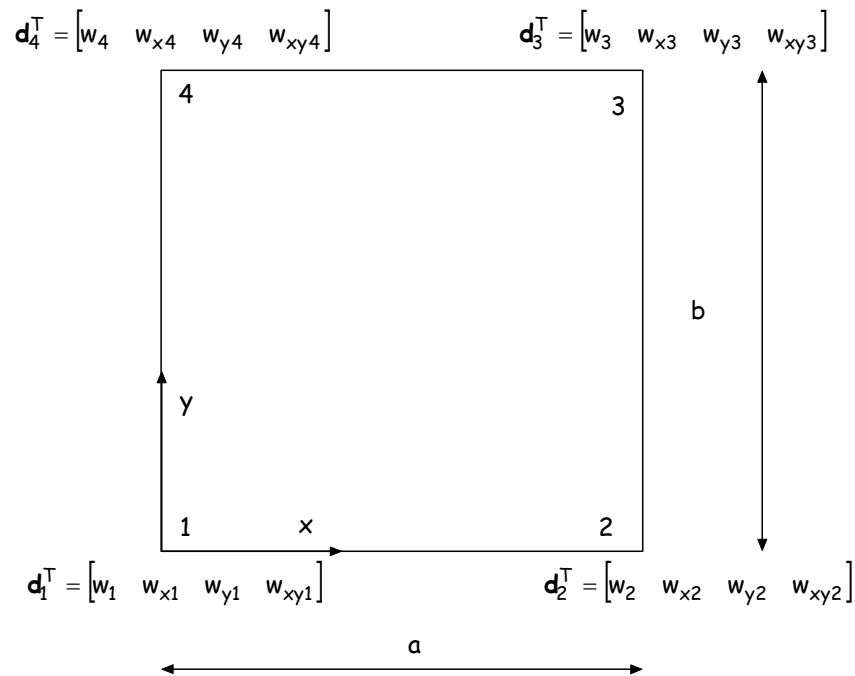
$$\mathbf{a}^T = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10} \ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ a_{15} \ a_{16}]. \quad (11.12)$$

Az elmozdulás paraméterek vektora a közelítő függvénynek megfelelően a 11.2 ábra szerinti négyszögelem sarokpontjaiban felvett

$$\mathbf{d}^T = [d_1 \ d_2 \ d_3 \ d_4], \quad (11.13)$$

ahol

$$\mathbf{d}_i^T = [w_i \ w_{xi} \ w_{yi} \ w_{xyi}], \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (11.14)$$



11.2 ábra: A lemezelem elmozdulás vektorai

Az elmozdulás paraméterek a szokásos módon megadhatók

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{a}, \quad (11.15)$$

így a lehajlás függvényt az alábbi formában kapjuk:

$$\mathbf{w} = \mathbf{X}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{d}. \quad (11.16)$$

Az **A** együttható mátrix előállításához adjuk meg a lehajlás függvény x , y és xy szerinti deriváltjait:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} &= 0 + a_2 + 0 + 2a_4x + a_5y + 0 + 3a_7x^2 + 2a_8xy + a_9y^2 + \\ &0 + a_{11}y^3 + 3a_{12}x^2y + 2a_{13}xy^2 + 2a_{14}xy^3 + 3a_{15}x^2y^2 + 3a_{16}x^2y^3, \end{aligned} \quad (11.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} &= 0 + 0 + a_3 + 0 + a_5x + 2a_6y + 0 + a_8x^2 + 2a_9xy + \\ &3a_{10}y^2 + 3a_{11}xy^2 + a_{12}x^3 + 2a_{13}x^2y + 3a_{14}x^2y^2 + 2a_{15}x^3y + 3a_{16}x^3y^2, \end{aligned} \quad (11.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^2(x, y)}{\partial x \partial y} &= 0 + 0 + 0 + 0 + a_5 + 0 + 0 + 2a_8x + 2a_9y + \\ &0 + 3a_{11}y^2 + 3a_{12}x^2 + 4a_{13}xy + 6a_{14}xy^2 + 6a_{15}x^2y + 9a_{16}x^2y^2, \end{aligned} \quad (11.19)$$

Az **A** együttható mátrix elemeit a 11.1 táblázat tartalmazza. Az **A** együttható mátrix inverzének elemeit a 11.2 táblázatban adtuk meg.

11.4 Az alakváltozások meghatározása

Az alakváltozásokra vonatkozó 11.2 szerinti kifejezés 11.16 behelyettesítésével az alábbi alakot ölti:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = -\mathbf{DXA}^{-1}\mathbf{d} = -\mathbf{BA}^{-1}\mathbf{d}. \quad (11.20)$$

ahol

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 0 & 6xy & 2y^2 & 2y^3 & 6xy^2 & 6xy^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 6xy & 0 & 2x^2 & 2x^2 & 2x^3 & 6x^3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6y^2 & 6x^2 & 8xy & 12xy^2 & 12x^2y & 18x^2y^2 \end{bmatrix}.$$

$$(11.21)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2		1														
3			1													
4					1											
5	1	a		a^2			a^3									
6		1		$2a$			$3a^2$									
7			1		a			a^2				a^3				
8					1			$2a$				$3a^2$				
9	1	a	b	a^2	ab	b^2	a^3	a^2b	ab^2	b^3	ab^3	a^3b	a^2b^2	a^2b^3	a^3b^2	a^3b^3
10		1		$2a$	b		$3a^2$	$2ab$	b^2		b^3	$3a^2b$	$2ab^2$	$2ab^3$	$3a^2b^2$	$3a^2b^3$
11			1		a	$2b$		a^2	$2ab$	$3b^2$	$3ab^2$	a^3	$2a^2b$	$3a^2b^2$	$2a^3b$	$3a^3b^2$
12					1			$2a$	$2b$		$3b^2$	$3a^2$	$4ab$	$6ab^2$	$6a^2b$	$9a^2b^2$
13	1		b			b^2				b^3						
14		1			b				b^2		b^3					
15			1			$2b$				$3b^2$						
16					1				$2b$		$3b^2$					

11.1 táblázat: Az **A** mátrix elemei (az üresen hagyott helyek értéke zérus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			
1	1																		
2		1																	
3			1																
4	$-3/a^2$	$-2/a$			$3/a^2$	$-1/a$													
5	1																		
6	$-3/b^2$		$-2/b$						$3/b^2$		$-1/b$								
7	$2/a^3$	$1/a^2$			$2/a^3$	$1/a^2$													
8			$-3/a^2$	$2/a$			$3/a^2$	$-1/a$											
9		$-3/b^2$		$-2/b$						$3/b^2$		$-1/b$							
10	$2b^3$		$1/b^2$						$-2b^3$		$1/b^2$								
11		$2b^3$		$1/b^2$						$-2b^3$		$1/b^2$							
12			$2/a^3$	$1/a^2$			$-2/a^3$	$1/a^2$											
13	$9/a^2b^2$	$6/ab^2$	$6/a^2b$	$4/ab$	-	$9/a^2b^2$	$3/ab^2$	$-6/a^2b$	$2/ab$	-	$9/a^2b^2$	$-6/ab^2$	$3/a^2b$	$2/ab$	$9/a^2b^2$	$-3/ab^2$	$3/a^2b$	$1/ab$	
14	-	$6/a^2b^3$	$-4/ab^3$	-	$3/a^2b^2$	$-2/ab^2$	$6/a^2b^3$	$-2/ab^3$	$3/a^2b^2$	$-1/ab^2$	$6/a^2b^3$	$4/ab^3$	-	$3/a^2b^2$	$-2/ab^2$	$6/a^2b^3$	$2/ab^3$	$3/a^2b^2$	$-1/ab^2$
15	-	$6/a^3b^2$	-	$3/a^2b^2$	$-4/a^3b$	$-2/a^2b$	$6/a^3b^2$	$3/a^2b^2$	$4/a^3b$	$-2/a^2b$	$6/a^3b^2$	$3/a^2b^2$	$-2/a^3b$	$-1/a^2b$	$6/a^3b^2$	$3/a^2b^2$	$2/a^3b$	$-1/a^2b$	
16	$4/a^3b^3$	$2/a^2b$	$2/a^3b^2$	$1/a^2b^2$	-	$4/a^3b^3$	$2/a^2b^3$	$2/a^3b^2$	$1/a^2b^2$	-	$4/a^3b^3$	$2/a^2b^3$	$2/a^3b^2$	$1/a^2b^2$	-	$4/a^3b^3$	$2/a^2b^3$	$2/a^3b^2$	$1/a^2b^2$

11.2 táblázat: Az A^{-1} mátrix elemei (az üresen hagyott helyek értéke zérus)

11.5 Az elemi tartó merevségi mátrixa és a tehervektor

A merevségi mátrix meghatározásánál most is ugyanúgy járunk el mint a tárcsák esetén, azaz a teljes potenciális energia függvény szélsőértékét keressük:

$$\pi = \frac{1}{2} \int_{(A)} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dA - \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{u} dA - \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{u} dP, \quad (11.22)$$

ahol \mathbf{g} a tömegerők, \mathbf{p} pedig a peremeroők vektora.

Az alapösszefüggések (11.1 - 11.21) kifejezéseinek behelyettesítésével a formailag a tárcsa feladatokéval megegyező, de tartalmilag eltérő összefüggést kapjuk:

$$\pi = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}) \mathbf{d} - \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{N} dA - \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP, \quad (11.23)$$

ahol

$$\mathbf{N} = \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1}, \quad (11.24)$$

az alakfüggvények mátrixa.

Az egyensúlyi egyenletrendszer a 11.23 alapján a teljes potenciális energia minimum tétele alapján írhatjuk fel:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Rightarrow \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{q}, \quad (11.25)$$

ahol

$$\mathbf{K} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left(\int_{(A)} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dA \right) (\mathbf{A}^{-1}), \quad (11.26)$$

$$\mathbf{q} = \int_{(A)} \mathbf{g}^T \mathbf{N} dA + \int_{(P)} \mathbf{p}^T \mathbf{N} dP. \quad (11.27)$$

A merevségi mátrix, illetve a tehervektor meghatározásához szükséges \mathbf{A}^{-1} mátrix értékeit a 11.2 táblázat tartalmazza.

12. Lemezek végeselemes modellezése

12.1 A közelítés pontossága - további lemez modellek

A lemezek végeselemes modellezésénél nem szabad figyelmen kívül hagynunk a lemezvastagság hatását. Az eddig tárgyalt vékony lemezek az ún. klasszikus Kirchoff-Love féle lemezmodellen alapulnak. Ha lemez befoglaló méretének és vastagságának befoglaló méretének aránya kisebb, mint tíz, akkor a lemezvastagság hatása számításainkban már nem hanyagolható el. A lemezvastagság hatását is követő lemezmodellt Reissner-Mindlin féle modellnek nevezzük. A lemezek végeselemes modellezésénél, azaz az alkalmazott végeselemes modell megválasztásánál szintén tekintettel kell lennünk a lemezvastagság hatására. Az előző fejezetben bemutatott 16 szabadságfokú konform négyszögelem mint említettük vékony lemezek esetén alkalmazható. Az ismertetésre kerülő további lemezelemeket, melyek ugyancsak a vékony lemezek modellezésére alkalmasak, Bojtár Imre -Gáspár Zsolt: "Végeselem módszer építőmérnököknek" című könyve alapján állítottuk össze. A vastag lemezek végeselemes modellezésre további lehetőségeket szintén Bojtár Imre -Gáspár Zsolt: "Végeselem módszer építőmérnököknek" című könyvében találhatnak a téma iránt érdeklődők.

12.2 Kilenc szabadságfokú nemkonform háromszögelem

Közelítsük a 12.1 ábra szerinti $w(x,y)$ lehajlás függvényt az alábbi 9 elemű kubikus polinommal:

$$w(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3, \quad (12.1)$$

azaz mátrix alakban

$$w = \mathbf{X}\mathbf{a}, \quad (12.2)$$

ahol

$$\mathbf{X}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3] \quad (12.3)$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9]. \quad (12.4)$$

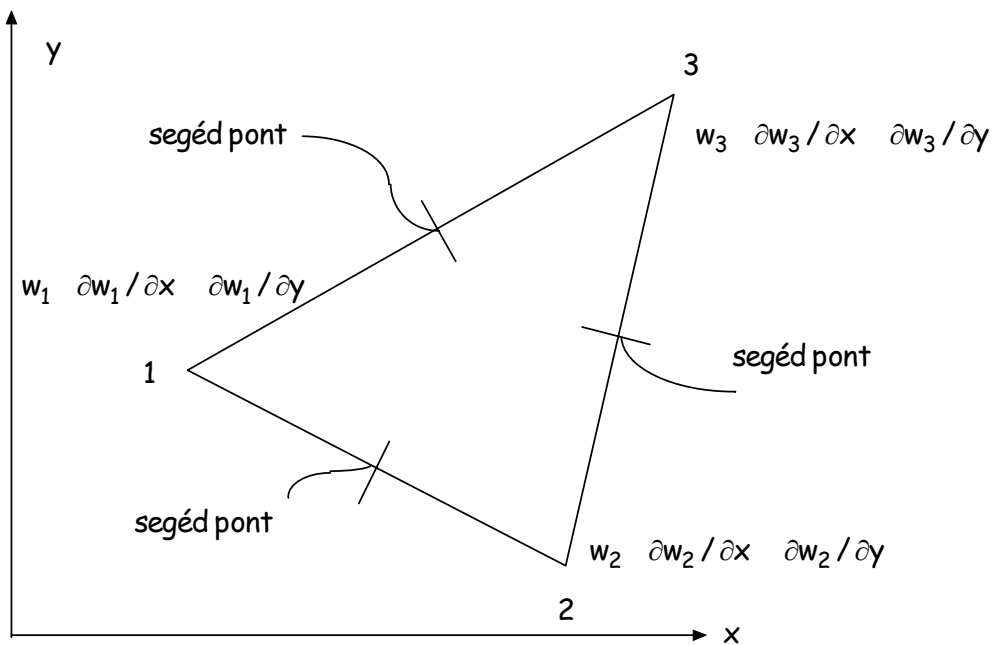
Az elmozdulás paraméterek vektora a közelítő függvénynek megfelelően a 11.2 ábra szerinti négyszögelem sarokpontjaiban felvett

$$\mathbf{d}^T = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \mathbf{d}_3], \quad (12.5)$$

ahol

$$\mathbf{d}_i^T = [w_i \quad w_{xi} \quad w_{yi}], \quad i = 1, 2, 3. \quad (12.6)$$

A 12.1 ábra, valamint a 12.5 és 12.6 formula alapján belátható, hogy ebben az esetben a csomóponti elmozdulások és a közelítő polinom mérete közt csak akkor teremthető meg a kapcsolat, ha a vegyes deriváltakat elhagyjuk.



12.2 ábra: 9 szabadságfokú nemkonform lemezelem

A továbbiakban a merevségi mátrix és a tehervektor meghatározását az előző fejezethez hasonló módon végezzük.

12.3 Huszonegy szabadságfokú konform háromszögelem

A 21 szabadságfokú, a 12.2 ábra szerinti háromszögelem esetén közelítsük a $w(x, y)$ lehajlás függvényt az alábbi 21 elemű ötödfokú polinommal:

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + \dots + a_{18}x^3y^2 + a_{19}x^2y^3 + a_{20}xy^4 + a_{21}y^5, \tag{12.7}$$

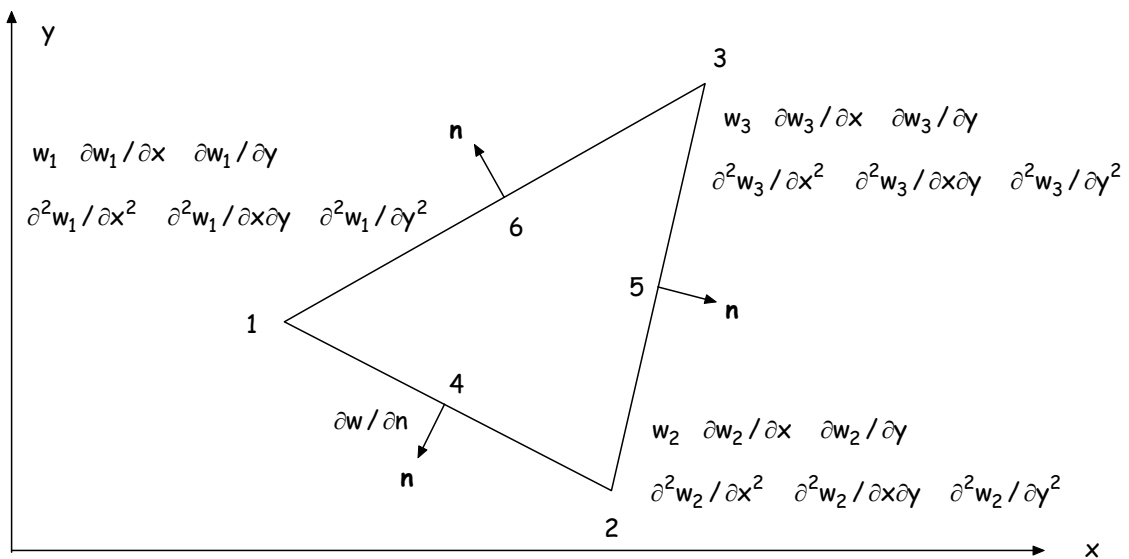
azaz mátrix alakban

$$w = \mathbf{X}\mathbf{a}, \tag{12.8}$$

ahol

$$\mathbf{X}^T = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad \dots \quad xy^4 \quad y^5] \tag{12.9}$$

$$\mathbf{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad \dots \quad a_{20} \quad a_{21}]. \tag{12.10}$$



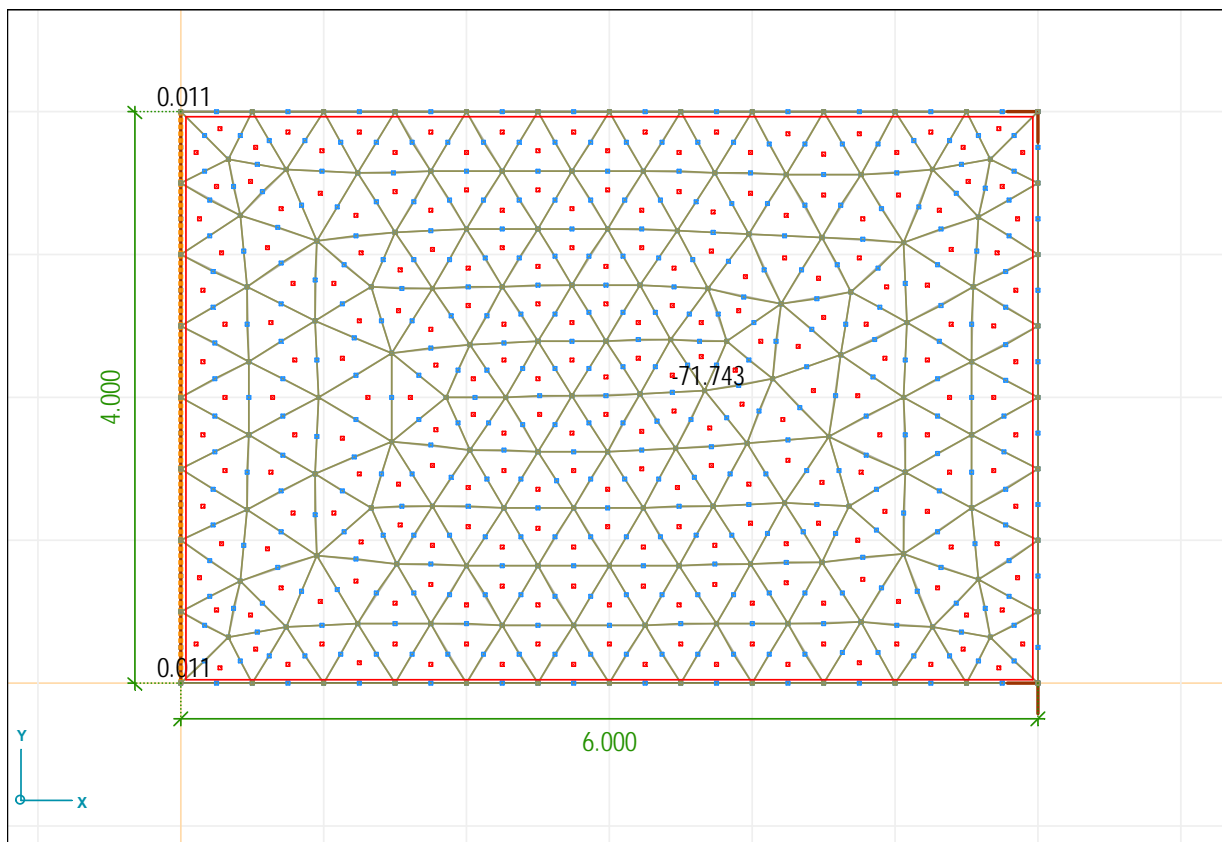
12.2 ábra: 21 szabadságfokú konform lemezelem

A 12.2 ábra szerinti deriváltak előállítására és behelyettesítésére után a további lépések a korábbi fejezeteknek megfelelően történnek.

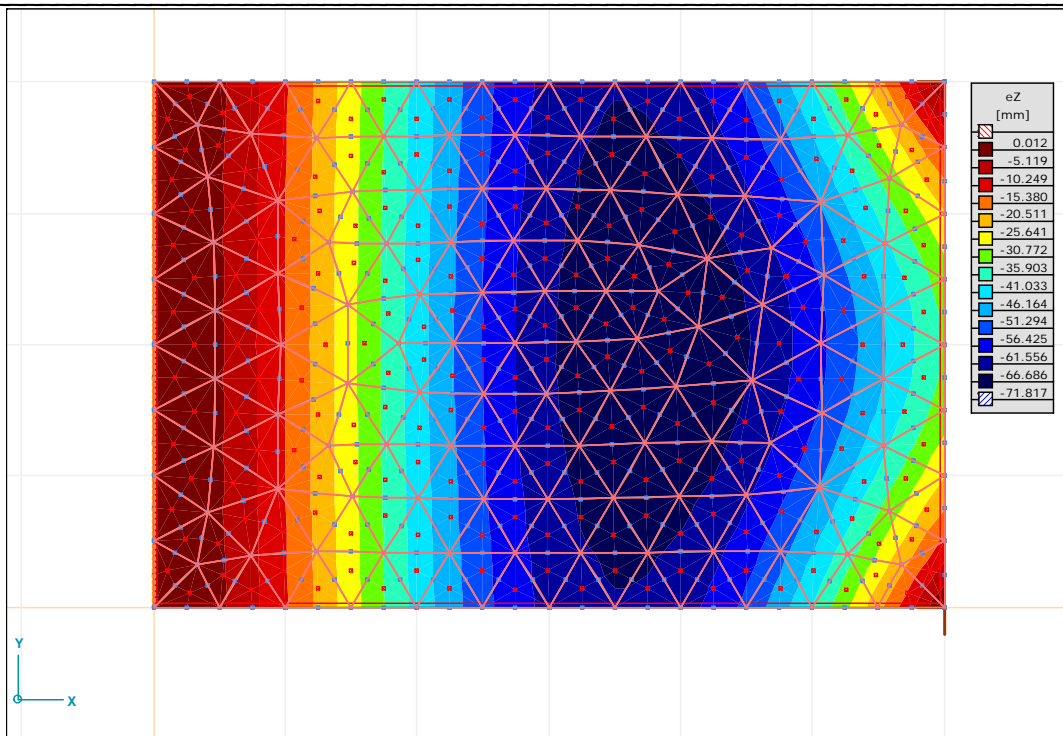
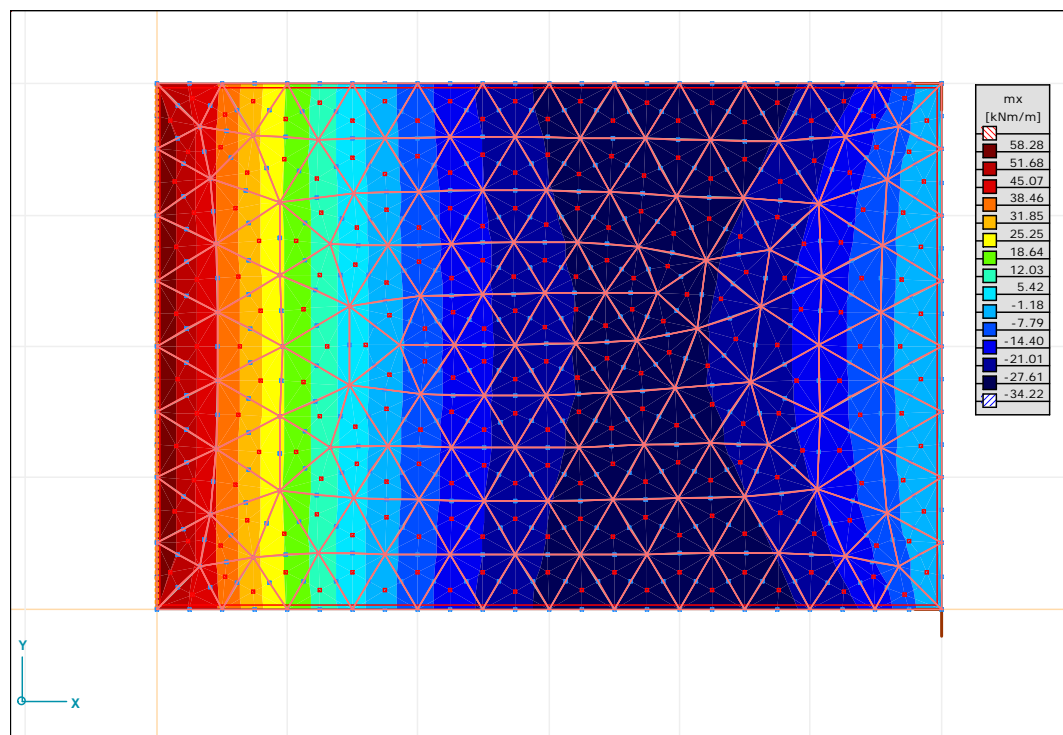
13. Lemezfeladatok megoldása az AXIS program segítségével

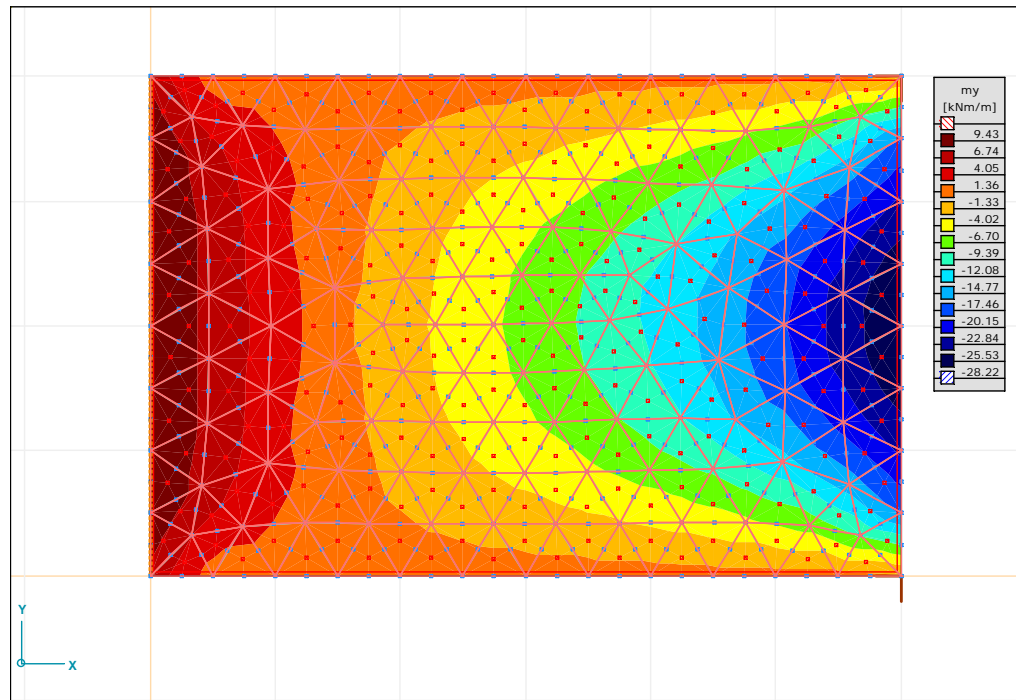
Határozzuk meg a 4,00 x 6,00 m-es vasbeton lemez elmozdulásait és belső igénybevételeit! A lemezvastagság $v = 12$ cm, a beton minősége C20.

A lemez baloldali pereme befogott, a jobboldali sarokpontokban csuklós támaszt alkalmaztunk.

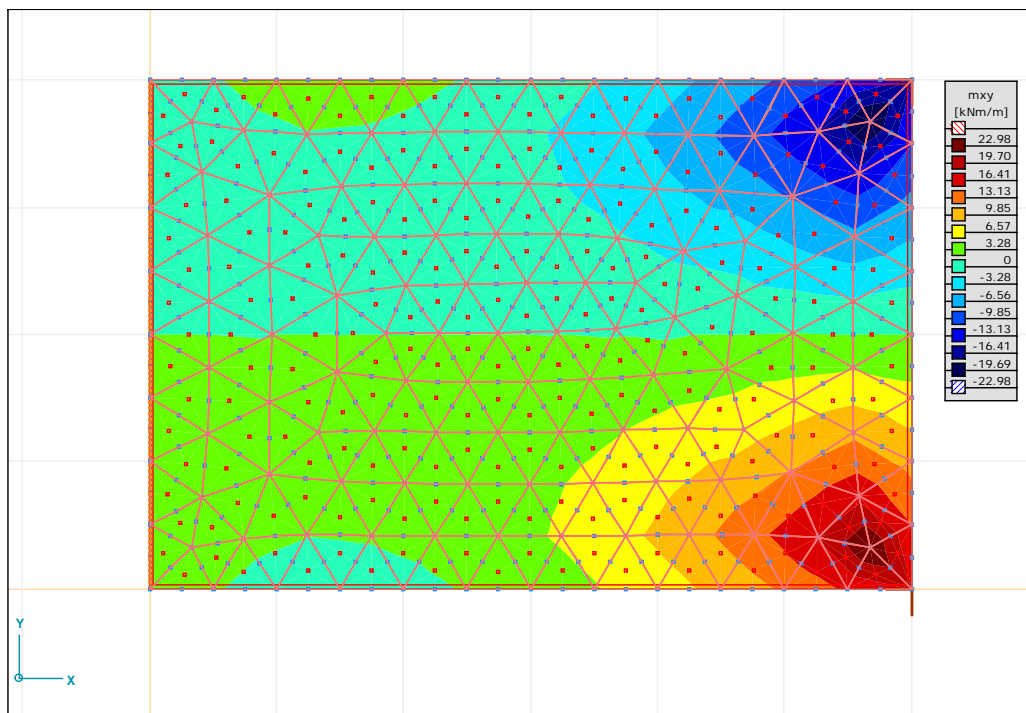


13.1 ábra: A vasbeton lemez lehajlása w_z [mm]

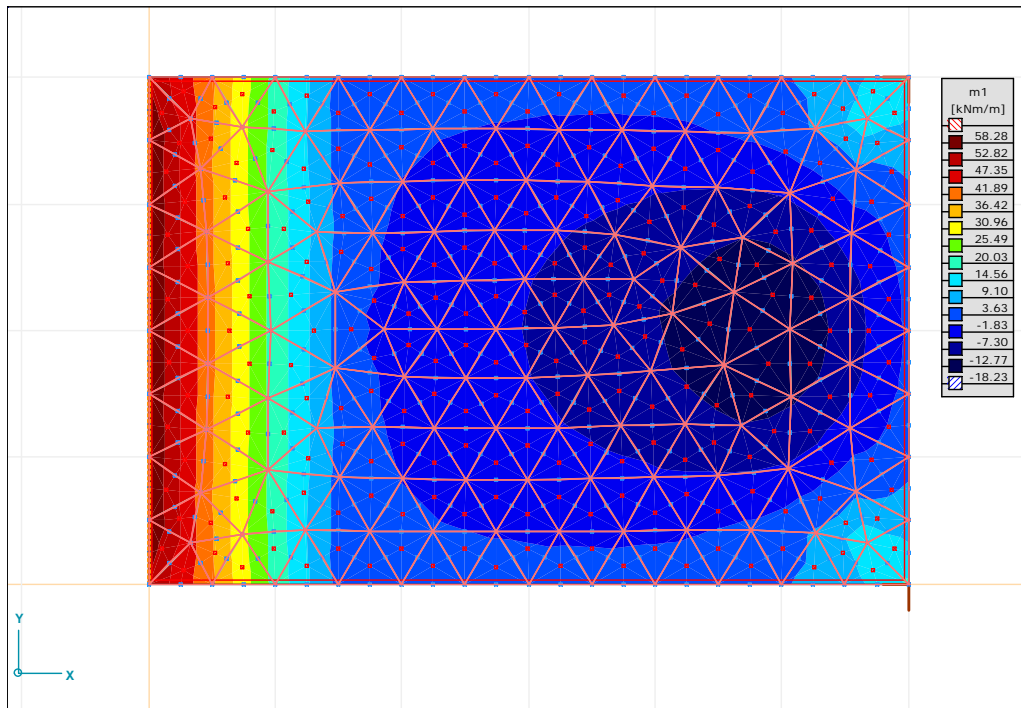
13.2 ábra: A vasbeton lemez lehajlása w_z [mm] - 2D szintfelület13.3 ábra: A vasbeton lemez x irányú nyomatéka m_x [kNm/m] - 2D szintfelület



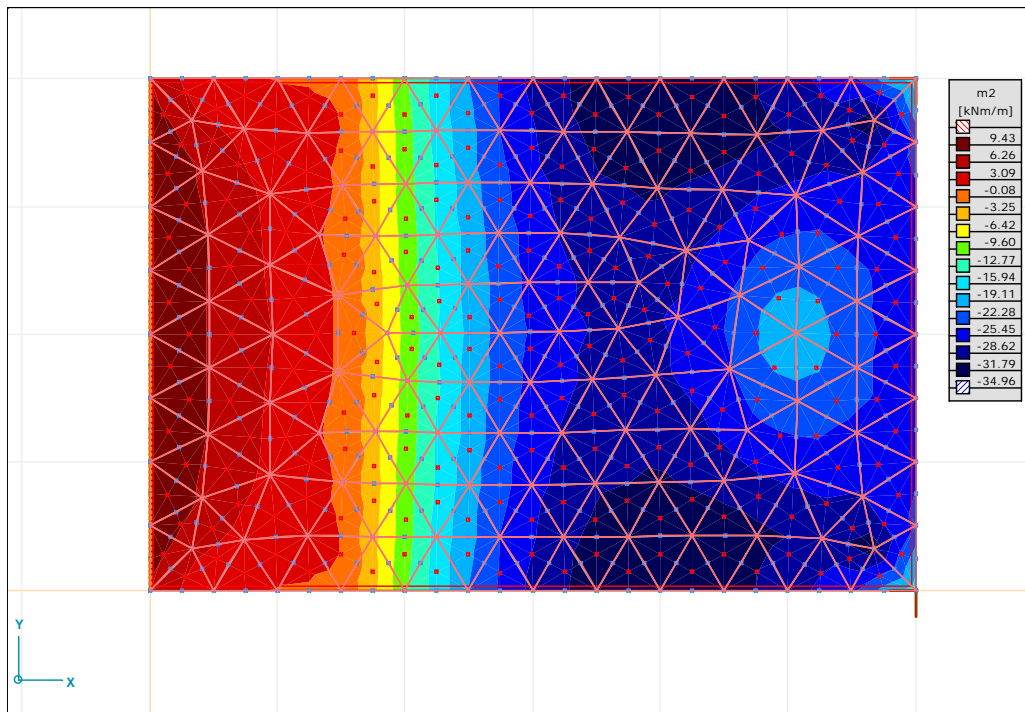
13.4 ábra: A vasbeton lemez y irányú nyomatéka m_y [kNm/m] - 2D szintfelület



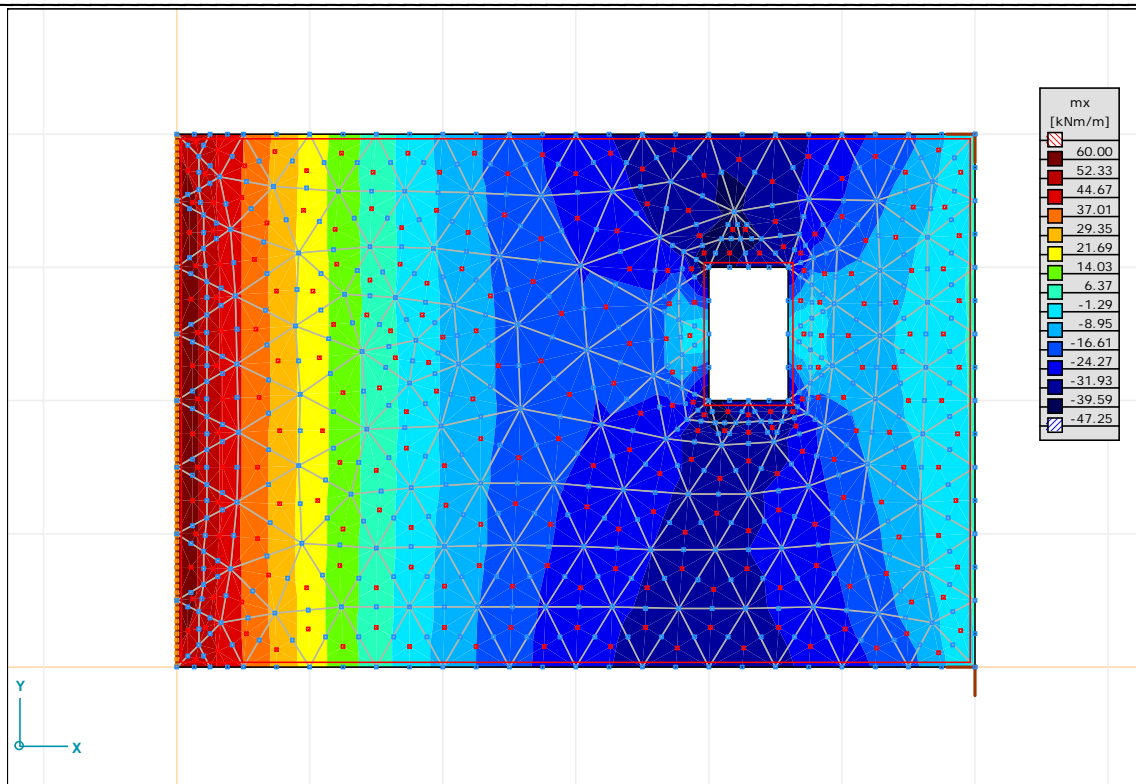
13.5 ábra: A vasbeton lemez xy irányú nyomatéka m_{xy} [kNm/m] - 2D szintfelület



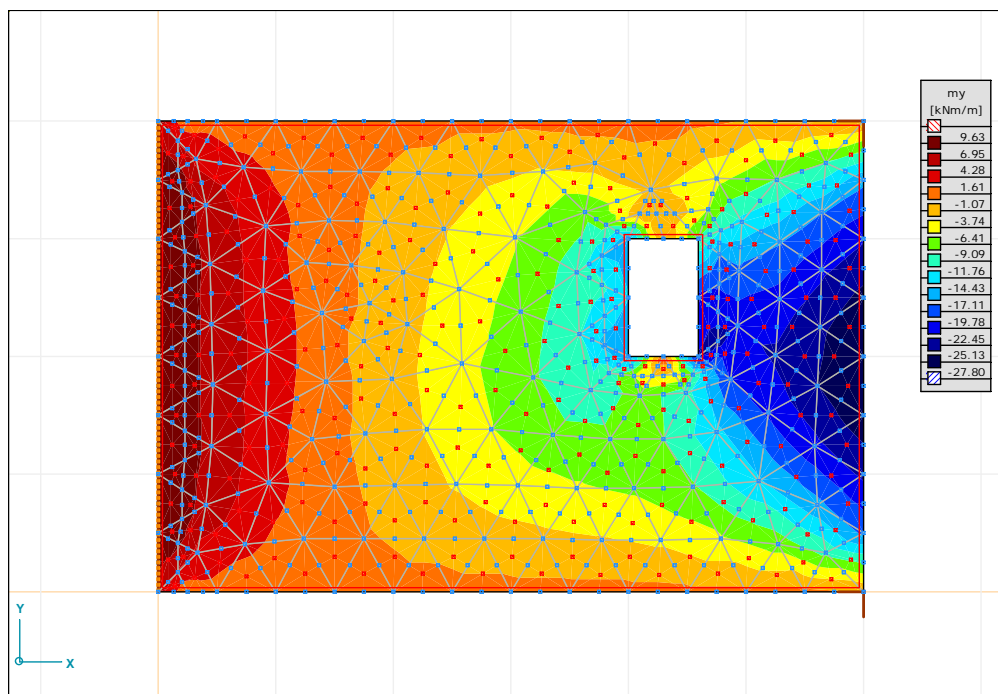
13.6 ábra: A vasbeton lemez 1 főirányú nyomatéka m_1 [kNm/m] - 2D szintfelület



13.7 ábra: A vasbeton lemez 2 főirányú nyomatéka m_2 [kNm/m] - 2D szintfelület



13.8 ábra: A nyílással áttört lemez x irányú nyomatéka m_x [kNm/m] - 2D szintfelület

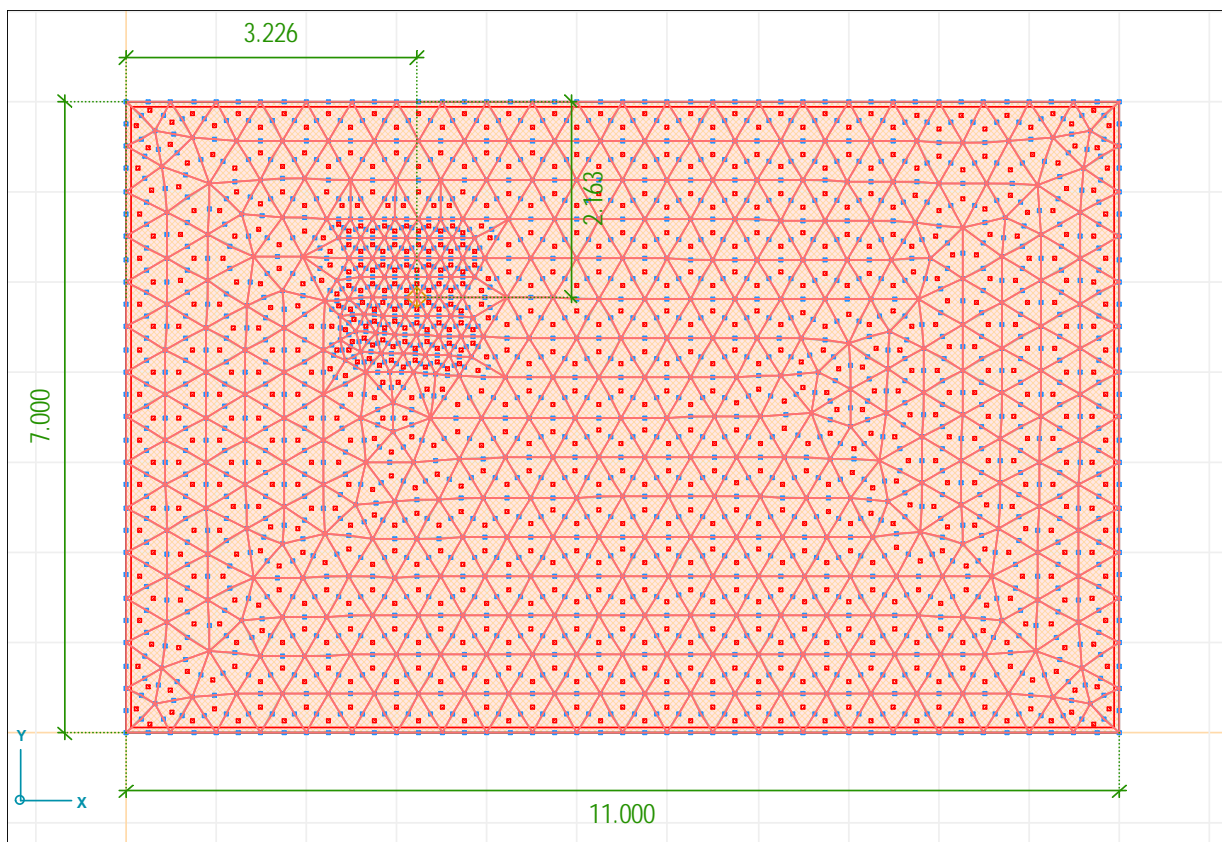


13.9 ábra: A nyílással áttört lemez y irányú nyomatéka m_y [kNm/m] - 2D szintfelület

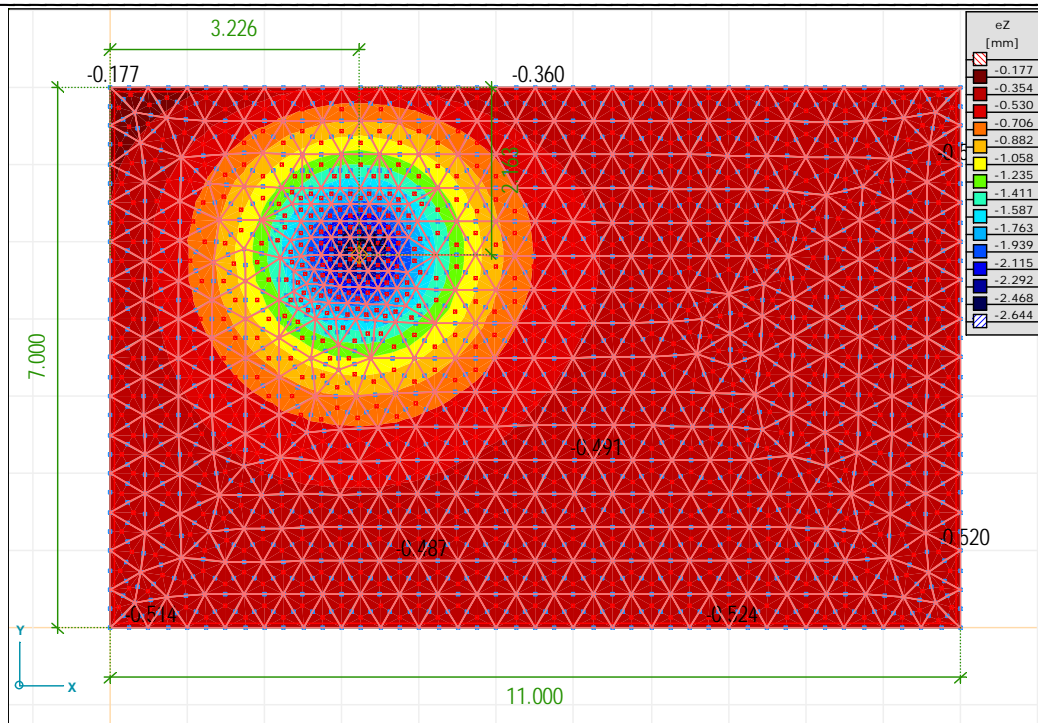
14. Rugalmas ágyazású lemezek végeselemes modellezése

Határozzuk meg a 14.1 ábrán található 7,00 x 11,00 m-es rugalmas ágyazású vasbeton lemez elmozdulásait és belső igénybevételeit! A lemezvastagság $v = 12$ cm, a beton minősége C20.

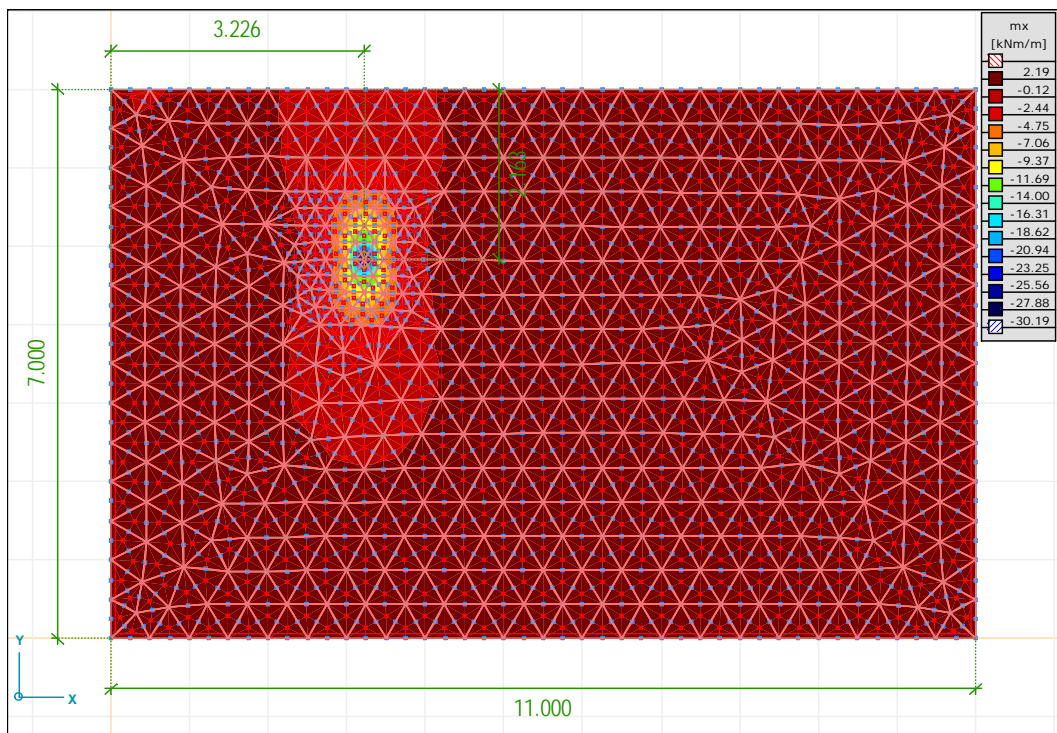
A lemez pereme minden oldalon, szabadon elmozdulhat. A lemez felületén egyenletesen megoszló teher hat. A 14.1 ábrán megadott helyen koncentrált erőt működtettünk, amelynek a környezetében a háló felosztást sűrítettük.



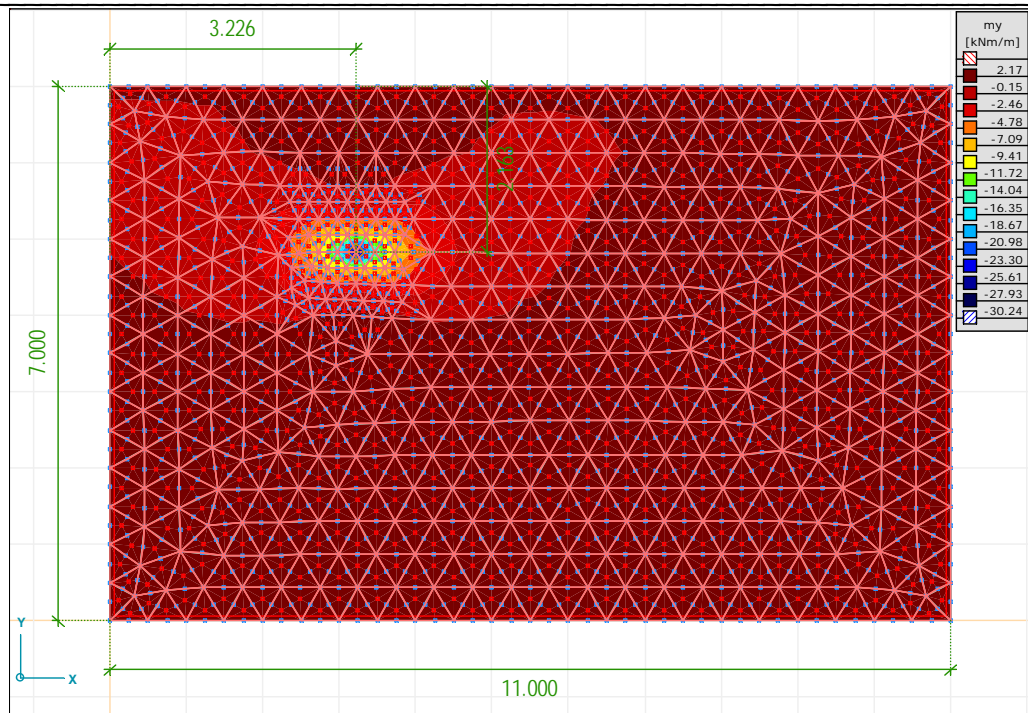
14.1 ábra: A rugalmas ágyazású vasbeton lemez háló generálása



14.2 ábra: A vasbeton lemez lehajlása w_z [mm]



14.3 ábra: A rugalmas ágyazású lemez x irányú nyomatéka m_x [kNm/m]



14.4 ábra: A rugalmas ágyazású lemez y irányú nyomatéka m_y [kNm/m]

Irodalomjegyzék

1. Bojtár Imre -Gáspár Zsolt, Végeselemmódszer építőmérnököknek, TERC Kft, Budapest, 2003
2. Cook, R. D., Concepts and Applications of Finite Element Analysis, second edition, John Wiley & Sons, 1974
3. Hinton, E. - Owen, D. R. J., Finite Element Programming, Academic Press, London, 1977
4. Kurutzné Kovács Márta, Tartók statikája, Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003
5. Thieme, D., Einführung in die Finite Elemente Methode für Bauingenieure, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1990
6. Rózsa Pál, Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974
7. Zienkiewicz, O. C., The Finite Element Method, third edition, McGraw-Hill, 1977