



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM
Pollack Mihály Műszaki Kar



Szilárdságtan és Tartószerkezet Tanszéke

Vasbetonszerkezetek II.

STNA252

Pécs, 2007. november

Szerző: Kiss Rita M.

Műszaki rajzoló: Szabó Imre Gábor

ISBN szám:

Kézirat lezárva: 2007. november 30.

1. Bevezetés

A jegyzet a Vasbetonszerkezetek I-II tantárgy második félévének előadásanyagának összefoglalója. A gyakorlati órák anyaga a Példatár a Vasbetonszerkezetek II. tantárgyhoz elektronikus jegyzet tartalmazza.

E jegyzet témakörei a lemezszerkezetek, keretszerkezetek, rövid konzol méretezése. A könyv szerzője törekedett arra, hogy egyes fogalmakat, szerkezetek viselkedését, egyes szerkezeti elemek méretezését a korábban Tartók Statikájában, Végeselem módszerek, továbbá a Vasbetonszerkezetek I. tárgy körében tanultakhoz kösse. Ezekre egyes hivatkozásokkal is utal. Jobb megértést több mint 80 ábra is segíti.

A könyv jelölései, az ismertetett módszerek az MSZ EN 1992-1-1 (EUROCODE 2) szabványon alapulnak.

Köszönöm Dr. Pálfalvi Dóra gyakorló mérnök megjegyzéseit, korrekcióját, amely lehetővé teszi, hogy a jegyzetet gyakorló mérnökök is támogassák. Külön köszönöm Szabó Imre Gábor munkáját a könyv szerkesztésében és az ábrák rajzolásában.

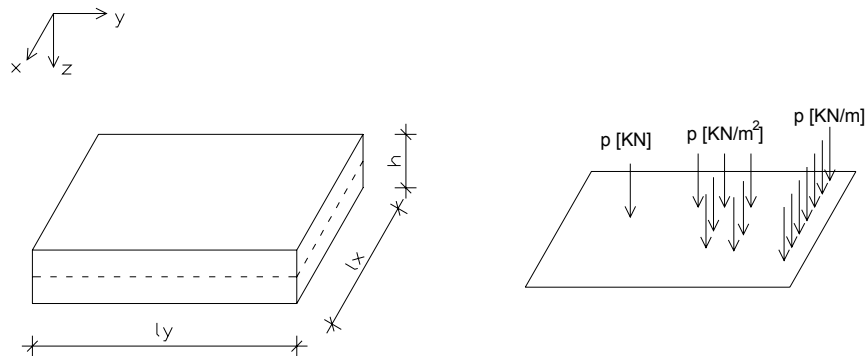
2007. november 24.

Kiss Rita

2. Lemezszerkezet – általános ismeretek

2.1. Definíciók

Lemez definíciója: Lemez sík tartószerkezet, vastagsága lényegesen kisebb, mint a másik két kiterjedése (szélessége és hossza), azaz $h < l_{min}/5$, ahol h a vastagság, l_{min} a legkisebb oldalszélesség. Emiatt a lemezt középsíkjával modellezhetjük. A lemezre ható terhek (pontoszerű, vonal menti, felületen megoszló terhek) merőlegesek a lemez középsíkjára (1. ábra). Megjegyezzük, hogy bizonyos terhelések és statikai vázak esetén a lemez síkjával párhuzamos erők is felléphetnek, ezekkel a Magasépítési vasbetonszerkezetek című tantárgyban fogunk részletesen foglalkozni).



1. ábra Lemez definíciója és a ráható terhek

Előnyei:

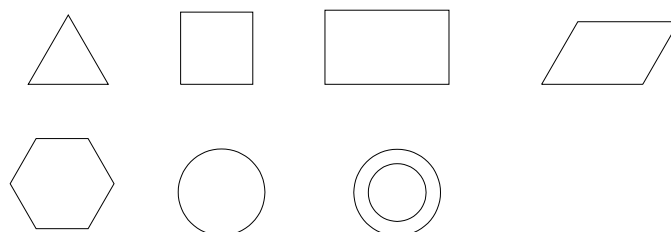
- A lemez fajlagos teherbírása kétirányú teherviselés miatt nagyobb, mint a gerendaszerkezetek vagy a gerendarácsok fajlagos teherbírása;
- A lemezek keresztirányú merevsége miatt a kis felületen megoszló terhekből (pld. koncentrált terhek, kis felületen megoszló, pontoszerű terhek) keletkező igénybevételei kedvezőbbek (jobb teherelosztás);
- A lemezek kis vastagság ($l_{max}/20$ - $l_{max}/40$ – magasépítés; $l_{max}/12$ - $l_{max}/20$ – hídszerkezetek, ahol l_{max} a lemez nagyobbik fesztávolsága);
- Lemezek zsaluzása könnyű, gyors, előregyártható;
- Lemezek vasalása egyszerű, hálós kialakítású, előregyártható (betonacél hálók, hegesztett hálók). Az acélbetétek közötti távolság deciméter nagyságrendű, azaz a betonozás könnyű.

Osztályozása:

Alakja szerint (2. ábra):

- háromszög,
- négyszög (négyzet, téglalap, paralelogramma, rombusz stb),
- kör,
- körgyűrű,

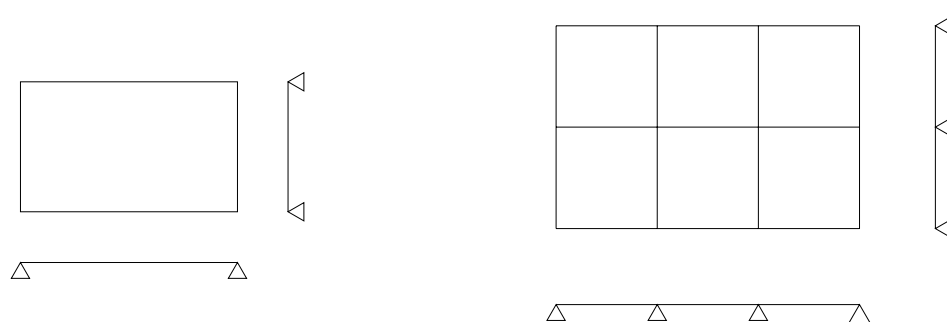
- tetszőleges.



2. ábra Lemez alakjai

Egyedi lemezek és lemezrendszerek.

A lemezek lehetnek „kéttámaszúak”, amelyeket egyedi lemezeknek nevezünk. Több lemez összeépítésével jön létre a lemezrendszer, mely többtámaszúak (3. ábra).



3. ábra Egyedi lemezek és lemezrendszerek

Keresztmetszeti kialakításuk:

A lemezeknek általában állandó vastagságú, izotróp, homogén lemezeket nevezünk. Sajnos ezek a feltételek vasbetonszerkezetek esetén csak megkötésekkel igazak.

Izotrópia-anizotrópia:

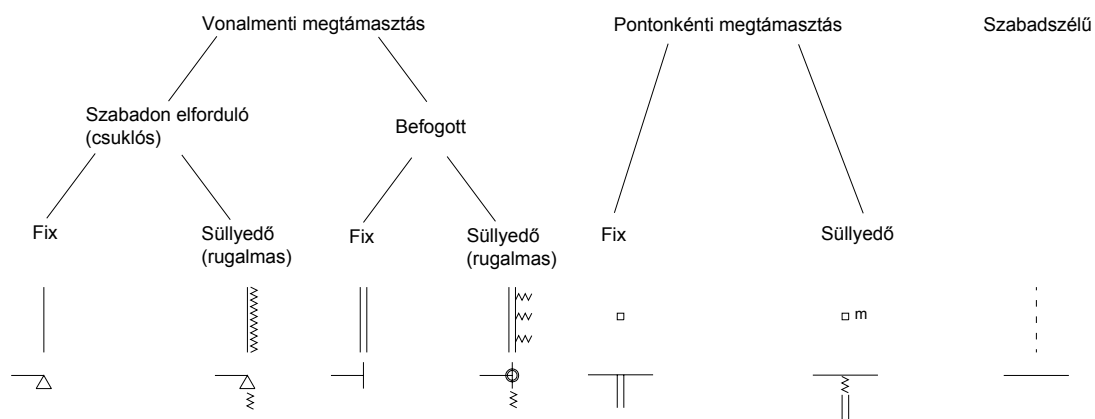
A vasbeton lemezek minden esetben anizotróp anyagú lemezek, mert a kétirányú vasalás a keresztmetszet mentén folyamatosan oszlik meg, az alkalmazott acélmennyiség általában a két irányban nem azonos. Anizotrópiát okoz a bordarendszer alkalmazása is. Ha a bordák egymásra merőlegesek vagy csak egyirányú bordákat alkalmazunk, továbbá a vasalás is egymásra merőleges és a keresztmetszet mentén nem változik, akkor a lemez ortotróp. Statikai számításoknál a vasalás és a bordák okozta anizotrópiától eltekintünk.

Vastagság:

A magaspítési lemezszerkezetek általában állandó vastagságúak. Ha a lemez változó vastagságú, azt külön ki kell emelni.

Megtámasztási módjuk:

A lemezek/lemezmezők általában a széleik mentén vannak megtámasztva, de lehetnek szabadszélűek. A megtámasztás a lemez pereme mentén is változhat. Típusai (4. ábra):



4. ábra Lemezek alátámasztásai

Vonalmenti megtámasztás:

- szabadon elforduló (csuklós):
 - fix
 - süllyedő (rugalmas)
- Befogott:
 - fix
 - süllyedő (rugalmas)

Pontonként megtámasztott:

- fix
- süllyedő

SzabadszélűTeherviselés szempontjából:

- Egyirányban teherviselő szerkezetek
- Kétirányban teherviselő szerkezetek

2.2. Lemezek építésének története

Az első kő lemezek egyirányban teherviselő – előregyártott – lemezek voltak, ilyenek az egyiptomi templomok, a görög templomok vagy az indiai maharadzsa paloták földempaneljai. Az első „vasbeton” lemezt a rómaiak építették, amely a fűtés-csővek csatornáinak 16 cm vastag, körülbelül 1 méter széles lemeze. A római cement anyagú

lemezben 50 milliméter vastag 2-3 cm széles lapos vasak találhatók egymástól körülbelül 20 cm távolságban. Ez ma Klagenfurtban látható.



5. ábra „Előregyártott” kőlemezek

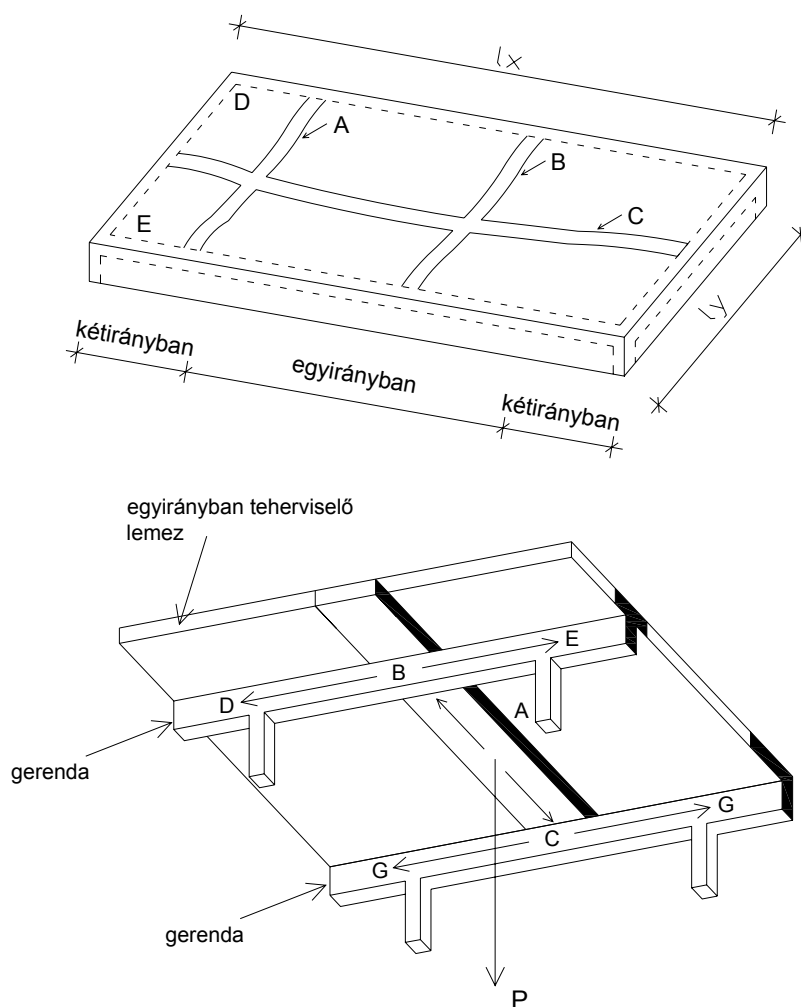
A modern vasbetonból készült első lemezek, akkor készültek, amikor a lemezelmélet kidolgozatlan volt. A lemezek statikai számításához számtalan szabadalom és empirikus megoldás volt „forgalomban”. Valószínűleg az első lemezt, ami gombafödém volt, C.A.P. Turner 1906-ban Minneapolisban építette. Ugyanebben az évben Maillart Svájcban síklemez födémet épített.

Az első lemez elméletet, ami a tartókereszt eljárás – H.T. Eddy dolgozta ki az 1900 évek legelején. 1914-ben J.R. Nicholas a rugalmas lemezekre vonatkozó elméletet publikálta (nem a Kirchoff-féle lemezeqyenlet).

2.3. Lemezek osztályozása statikai szempontból

2.3.1. Egyirányban teherviselő lemezek

6. ábra egyirányban teherviselő lemezt mutat. Geometriai adatait tekintve azt látjuk, hogy az egyik irányban a lemez hossza lényegesen nagyobb, mint a másik irányban.

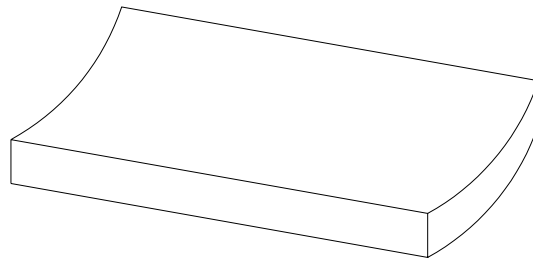


6. ábra Egyirányban teherviselő lemez

A teher útját követve megállapíthatjuk, hogy a lemezre ható erőt (az ábrán P elemi felületen megoszló teher) a lemez „elvezeti” a lemezt alátámasztó gerendáig (B és C pont), innen a gerendát alátámasztó oszlopig (D, E és F, G pontok), és az oszlop ezt levezeti az alapokon keresztül talajra. A tervezésnek mindig a teher útját kell követni (ellentétes az építési ütemmel).

Egyirányban teherviselő lemezek számítása:

Definíció: Egyirányban teherviselőnek nevezzük a lemezt, ha a teher hatására a lemez alakja – a megtámasztások okozta zavart résztől eltekintve – egyszeresen görbült, azaz viselkedése a gerendaszerkezetek viselkedéséhez hasonló 7. ábra.



7. ábra Egyszeresen görbült egyirányban teherrel szembe fordított lemez

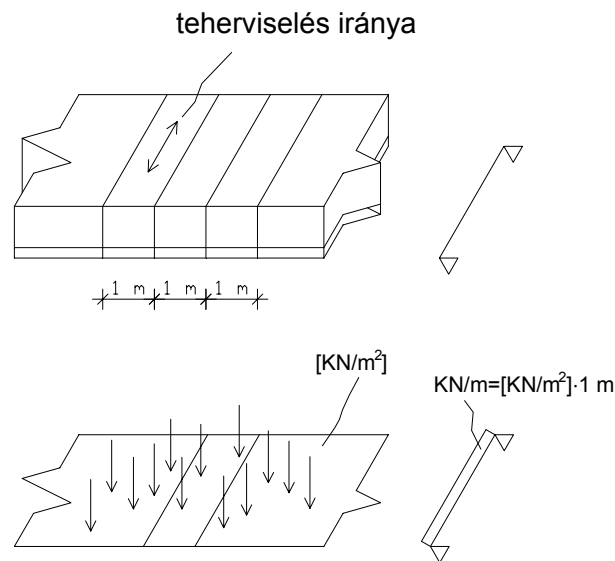
Geometria adataira közelítőleg mondhatjuk, hogy

$$2 < \frac{l_x}{l_y} \text{ vagy } \frac{l_x}{l_y} < \frac{1}{2}$$

arány áll fenn, ahol l_x x irányban l_y y irányban a lemez hossza.

Méretezés:

A fentiek alapján az egyirányban teherrel szembe fordított lemez méretezése megegyezik a gerendaszerkezetek tervezésével és ellenőrzésével. Feltételezzük, hogy a lemez végtelen hosszú és egy méter széles független gerendából áll. A gerenda megtámasztása megegyezik a lemez megtámasztásával, terhei az egy méter széles sávra eső teher (8. ábra).



8. ábra Egyirányban teherrel szembe fordított lemez statikai modellje

Megjegyezzük, hogy a lemezek sohasem végtelen hosszúak, a megtámasztások környezetében kialakult „zavart” zónákat kétirányban teherrel szembe fordított lemezenként kell méretezni (6. ábra).

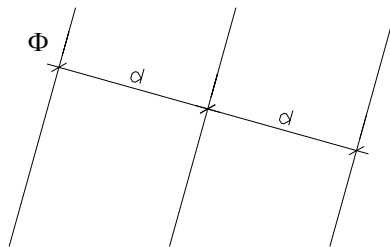
Tervezési szabályok:

A tervezési előírásokat, szerkesztési szabályokat különböző szabványok (Eurocode 2) pontosan rögzítik, az ott összefoglalt előírásokat mindig ellenőrizni kell.

Vastagság: A lemez minimális vastagságát a tűzvédelmi előírások határozzák meg, továbbá az, hogy a lehajlás ne okozzon problémát.

Betonfedés: A betonfedés minimális vastagságát a tűzvédelem, a korrózió védelem, továbbá a beton és az acél közötti megfelelő kapcsolat biztosítása határozza meg.

Vasalás: Lemezszerkezetek esetén a vasalást egy méter széles sávra adjuk meg, mértékegysége mm^2/m . A betonacélokat egymástól adott távolságra helyezzük el, amelynek jele például $\Phi 8/200$. Jelentése a 8 mm átmérőjű betonacélokat egymástól 200 milliméterre (9. ábra).



9. ábra Lemezvasalás elhelyezése

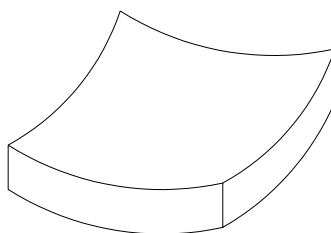
$$A_s [\text{mm}^2 / \text{m}] = A_\Phi [\text{mm}^2] \left(\frac{1000}{d [\text{mm}]} \right), \text{ ahol}$$

- A_s 1 méterre (1000 milliméterre) eső vasalás keresztmetszeti területe,
 A_Φ egy betonacél keresztmetszeti területe,
 d a betonacélok közötti távolság.

A minimális vasmennyiséget az határozza meg, hogy a lemezszerkezetben a zsugorodásból, a kúszásból és a külső–belső hőmérsékletkülönbségből ne keletkezzenek repedések. A betonacél átmérő csökkentésével a repedések tágassága csökkenthető. A lemezben nem lehet olyan rész, ahol nincs betonacél. Részletes szerkesztési szabályokat a Kétirányban teherviselő lemezeknél ismertetjük.

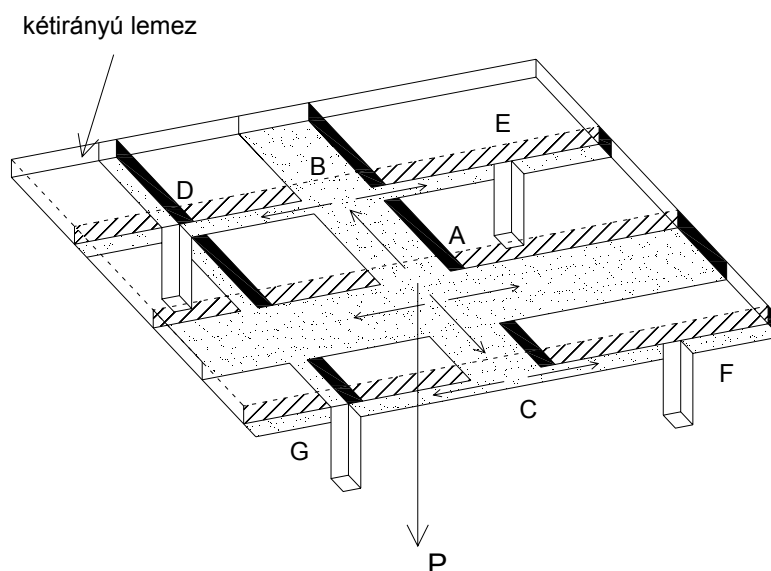
2.3.2. Kétirányban teherviselő lemezek

Ha a lemez a terhet mindkét irányban viszi, akkor kétirányban teherviselő lemezről beszélünk. Kétirányban teherviselő lemezek lehetnek a bordás lemezek (alulbordás vagy felülbordás), a síklemezek, gombafödémek vagy könnyített lemezek. A kétirányban teherviselő lemez esetén a rá ható teher hatására kétszeresen görbült felület alakul ki, a két görbület közel azonos (10. ábra).



10. ábra Kétirányban teherviselő lemez görbületei

Oszlopokkal alátámasztott síklemez földém esetén az a lemezre ható erő „egy részét” (az ábrán P elemi felületen megoszló teher) a lemez „elvezeti” az oszlopok által geometriailag meghatározott fiktív gerendáig (B és C pont), innen a fiktív gerenda a lemezt alátámasztó oszlopig (D, E és F, G pontok), és az oszlop ezt levezeti az alapokon keresztül talajra. Teljesen hasonló a teher másik részének az elvezetése is a másik irányban (11. ábra).



11. ábra Kétirányban teherviselő lemez statikai modellje

Kétirányban teherviselő lemezek számítása:

Definíció: Kétirányban teherviselőnek nevezzük a lemezt, ha lemez alakja a teher hatására kétszeresen görbült. Geometria adataira közelítőleg mondhatjuk, hogy

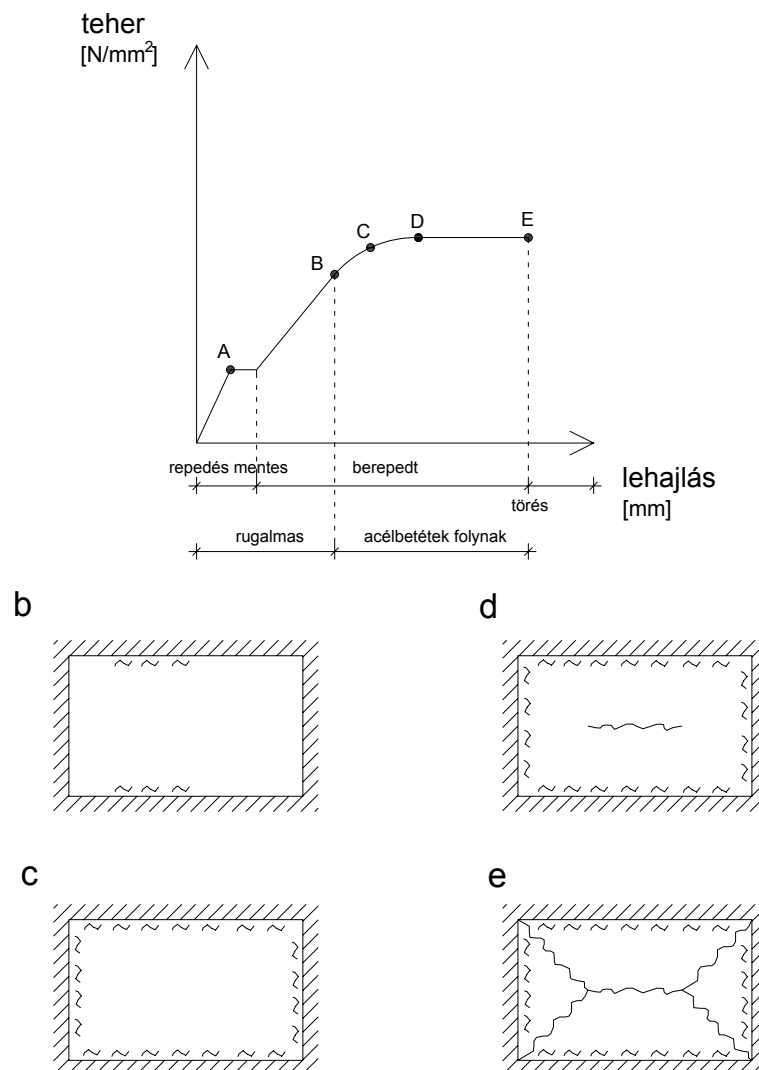
$$2 \geq \frac{l_x}{l_y} \text{ vagy } \frac{l_x}{l_y} \geq \frac{1}{2}$$

arány fenn áll, ahol l_x x irányban l_y y irányban a lemez hossza.

A kétirányban teherviselő lemezek statikai számítása a lemezelméleten alapul. Részletesen e problémával a 2. fejezetben foglalkozunk.

2.4. Hajlított lemez viselkedése törésig

A hajlított lemez viselkedését legalább négy állapotra oszthatjuk 12. ábra.



12. ábra A lemez terhelés története

1. Az első repedés megjelenéséig a vasbeton lemez úgy viselkedik, mint egy izotróp, homogén, lineárisan rugalmas lemez. A lemez összes keresztmetszete I. feszültségállapotban van. Rövid idejű terhek esetén az alakváltozások, feszültségek, nyúlások a rugalmas lemezelmélet alapján számolhatók (A pontig).
2. A terhek növekedésével a húzott betonrészben egymástól véges távolságra repedések alakulnak ki. A beton megrepedése után feltételezzük, hogy a húzott beton húzófeszültséget nem képes felvenni, a berepedt keresztmetszetek merevsége jelentősen csökken. A rugalmas lemezelmélet használható, de csökkentett keresztmetszeti inerciával. A lemez merevsége nem konstans, mert a repedt szakaszok merevsége jóval kisebb, mint a repedésmentes szakaszé,

emiatt a hajlítónyomatékok átrendeződnek, a terhek növekedéséből származó nyomatékok elsősorban a berepedetlen zónákban növekszik. A kísérletek azt mutatják, hogy a lemez viselkedése jól követhető a rugalmas lemezelmélettel, ha a repedt keresztmetszet inerciáját használjuk. Ez az állapot a betonacél megfolyásig vagy a beton megfolyásáig áll fenn, azaz a II. feszültségállapot végéig.

3. Általában a teher növelésével a leginkább igénybevett keresztmetszetekben a betonacélok képlékenyedése indul meg a beton képlékenyedését megelőzően. Ha az acélbetétben keletkező feszültség eléri a képlékenyedést (folyási határfeszültséget), akkor az a keresztmetszet további nyomatékot nem képes felvenni, a keresztmetszet tovább alakváltozik, azaz csuklóként viselkedik. A teher növelésével a nyomatékok átrendeződnek, egyre több keresztmetszetben folyik meg a betonacél, és csuklósorok alakulnak ki. A csuklósorokat törési (vagy folyási) vonalaknak is nevezzük.

Négyoldalon befogott téglalap alakú lemez esetén a betonacél először a hosszabbik oldalon középen a negatív nyomaték maximumánál (befogás keresztmetszete) éri el folyási határfeszültségét, majd halad a másik két szél felé (12. b. ábra). A kialakuló törés (vagy folyási) vonalakat (csuklósorokat) negatív törésvonalnak nevezzük. A következő lépésben a csuklósorok (folyási vonalak-törésvonalak) a rövidebb oldalon – szintén a negatív nyomatéknál, a befogásnál – középen indul meg és halad a sarok felé (12. c. ábra). A kialakuló negatív törésvonalak a teher növekedésével összeérnek (12. c. ábra). A harmadik lépésben a pozitív nyomaték maximumnál a lemez középső keresztmetszetében éri a betonacél folyási határszilárdságát (12. d. ábra). A törési (folyási) vonalak kialakulásával a lemez képlékeny állapotba kerül (12. e. ábra). A lehajlások rohamosan nőnek, de a nyomatékok csak kismértékben. A lemezben egy nyomott ív alakul ki. A nyomott ív hatását a tervezésnél és az ellenőrzésnél nem vesszük figyelembe.

4. A kialakuló képlékeny csuklósorok (törési-folyási vonalak) hálózata következtében a szerkezet labilissá válik, a lemez alakváltozásai további tehernövekedés nélkül is növekednek. A teljesen kialakult törési vagy folyási vonalak a lemezt háromszögekre, trapézokra osztja (12. e. ábra), amelyek rugalmasan, merev testként viselkednek. Ebben az állapotban a lemez viselkedése közelítőleg a törésvonal elmélettel írható le. A lemez képlékeny teherbírásának határát akkor érjük el, ha a nyomott oldalon a beton összemorzsolódik, ezt előidéző terhet törőtehernek nevezzük.

3. Rugalmas lemezelmélet

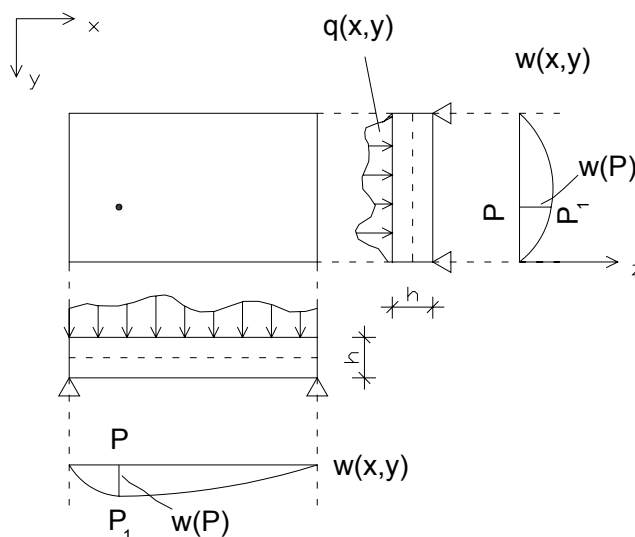
3.1. Rugalmas lemez vizsgálata derékszögű koordináta-rendszerben

A lemezek rugalmasságtan szerinti számításához a következő feltételezéseket kell tenni:

- A lemez anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, azaz követi a Hooke-törvényt;
- A terheletlen állapotban a lemez feszültségmentes
- A lemez vastagsága állandó és a másik két oldalához képest kicsiny ($h < l_{min}/5$, ahol t a vastagság, l_{min} a legkisebb oldalszélesség) (lásd Bevezetés fejezet);
- Érvényes a Kirchoff-Love hipotézis, azaz a középsík valamely pontjának normálisán lévő pontja alakváltozás után is ugyanazon a normálison marad;
- A lemez középsíkjának pontjai csak merőlegesen tolódnak el;
- A lemez középsíkjának alakváltozása (lehajlása) a vastagsághoz képest kicsiny ($w < h/5$, ahol w a lemez középsíkjának merőleges eltolódása);
- A lemez középsíkja feszültségmentes, azaz megegyezik a semleges sikkal;
- A középsíkra merőleges feszültségek elhanyagolhatón kicsinyek;
- A lemez síkjában az elmozdulások szabadon létrejöhetnek.

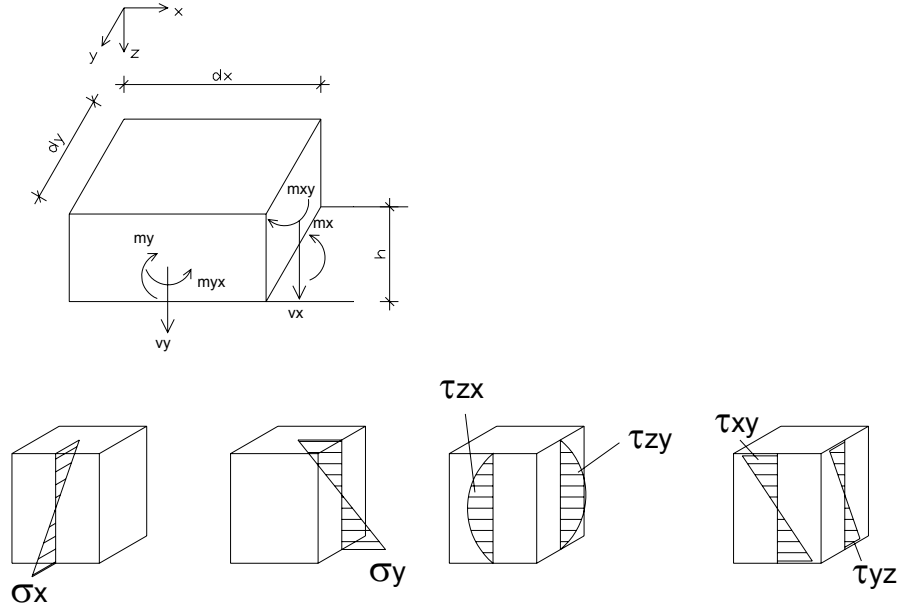
Differenciálegyenlet:

A lemezegyenlet levezetéséhez vizsgáljuk először is a x - y derékszögű koordináta rendszerben adott lemez alakváltozását $q(x,y)$ általános teherre. A lemez középsíkjában lévő tetszőleges P pont a teher hatására az előbbieken összefoglalt közelítő feltételezések alapján merőlegesen eltolódik w értékkel és a P_1 helyzetbe kerül (13. ábra).



13. ábra A kétirányban teherviselő lemez alakváltozása

Vizsgáljuk a P pont körüli dx , dy , h vastagságú elemi nagyságú lemez darabot. A lemez darabra a külső terhelés hatására a rugalmasságtan alapján m_x , m_y fajlagos hajlítónyomaték, v_x , v_y fajlagos nyírőerő és $m_{xy}=m_{yx}$ (felcserélhetőségi tétel miatt azonos) csavarónyomaték hat (14. ábra).



14. ábra A lemezdarab belső feszültségei és igénybevételei

Az elemi darabra felírt egyensúlyi egyenlet alapján

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q(x, y).$$

Megjegyezzük, hogy a $q(x,y)$ teherfüggvényt akkor tekintjük pozitívnak, ha a pozitív $w(x,y)$ lehajlás függvényel azonos irányú (13. ábra).

Feltételezésünk szerint a lemez lineárisan rugalmas (rugalmassági modulusa E_c), érvényes a Hooke-törvény, azaz az anyagegyenletek (fizikai egyenletek) a következőképpen írhatók fel, a Poisson hatást μ_c harántnyúlási-tényezővel vesszük figyelembe ($\mu_c=1/\nu_c$, ahol ν_c a beton Poisson tényezője)

$$\sigma_x = \frac{E_c}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_x + \mu_c \varepsilon_y),$$

$$\sigma_y = \frac{E_c}{1 - \mu_c^2} (\varepsilon_y + \mu_c \varepsilon_x),$$

$$\tau_{xy} = \frac{E_c}{2(1 + \mu_c)} \gamma_{xy}.$$

A kompatibilitási egyenletek (összeférhetőségi egyenletek)

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}, \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}, \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y}.\end{aligned}$$

A fizikai és az összeférhetőségi egyenleteket az egyensúlyi egyenletbe behelyettesítve

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{K}, \text{ ahol}$$

$$K = \frac{E_c h^3}{12(1 - \mu_c^2)}, \text{ ahol}$$

K a lemez hajlító merevsége,

E_c a lemez anyagának (jelen esetben a beton) rugalmassági modulusa,

h a lemez vastagsága,

μ_c a lemez anyagának harántnyúlási tényezője;

$w(x, y)$ lemez középsíkjának eltolódás függvénye;

$q(x, y)$ lemezre ható teher függvénye.

Bevezetve a $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ Laplace-operátor, az egyenlet

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q(x, y)}{K}.$$

A kapott egyenletet a Kirchoff-féle lemezegyenletnek nevezzük. A lemezegyenlet Lagrange-féle, negyedrendű, parciális (kétfváltozós), inhomogén differenciálegyenlet, amely elegendő számú peremfeltétel esetén egyértelműen leírja a $q(x, y)$ terhelés hatására kialakuló $w(x, y)$ lehajlás függvényét. A differenciálegyenlet megoldásának matematikai határozottságához minden perempontban két peremfeltételt kell megadni, amely a lemez megtámasztási viszonyai alapján fogalmazhatók meg. A peremfeltételek felírásakor a n alsó index a megtámasztás vonalára merőleges, t alsó index a megtámasztás vonalával párhuzamos irány.

Peremfeltételek (15. ábra):

Befogás: a perem lehajlása és normális irányú szögelfordulása zérus:

$$\begin{aligned}w &= 0, \\ \varphi_n &= \frac{\partial w}{\partial n} = 0.\end{aligned}$$

Rugalmas befogás: a perem lehajlása zérus és normális irányú szögelfordulása arányos a nyomatékkal. Az arányossági tényező a rugalmas befogás rugó állandója (c):

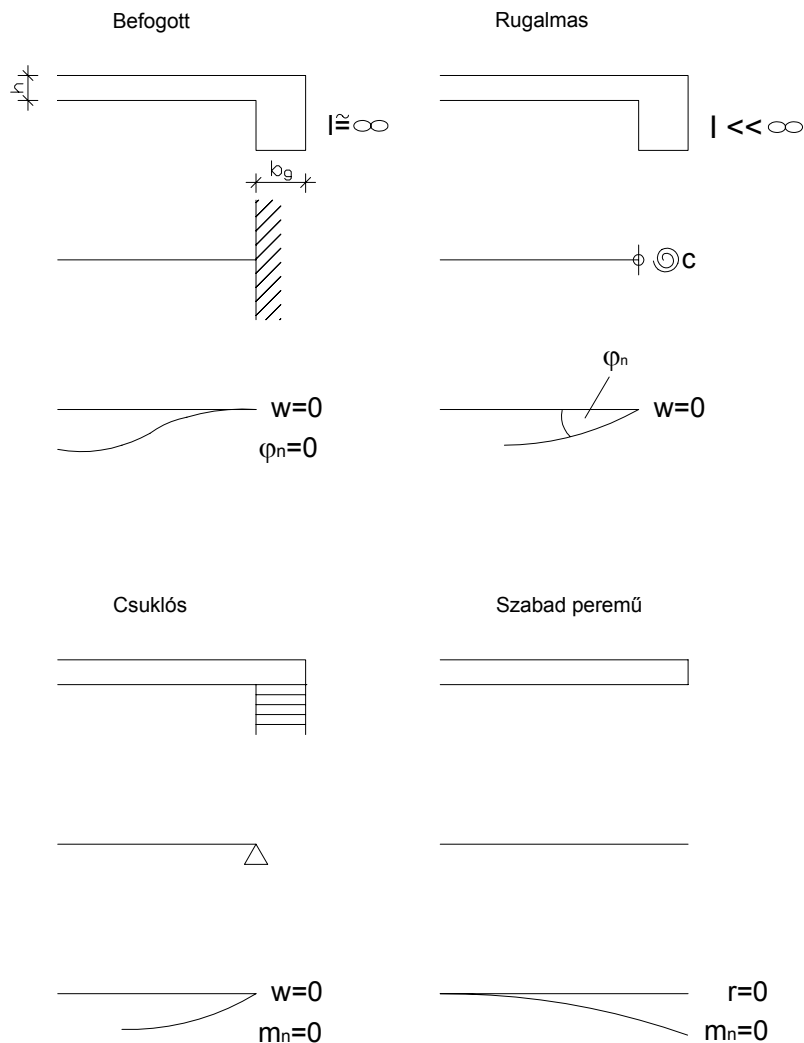
$$w = 0,$$

$$\varphi_n = \frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{c} m_n = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2}.$$

Csuklós megtámasztás (felfekvés): a perem lehajlása és normális irányú (támasz vonalára merőleges) nyomaték zérus:

$$w = 0,$$

$$m_n = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0.$$



15. ábra Peremfeltételek megfogalmazása különböző megtámasztások esetén

Szabad peremű lemez (szabad lemezsél): normális irányú nyomaték és a perem reakcióereje zérus:

$$m_n = \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0$$

$$r = 0.$$

Két megjegyzés a rugalmas lemez elmélet alkalmazásához vasbeton lemezek esetén:

1. A vasbeton lemezek anizotróp viselkedésétől eltekintünk (lásd Bevezetés fejezete).
2. Berepedetlen (repedésmentes), és berepedt II. feszültségállapotban lévő vasbeton lemez lineárisan homogén viselkedése biztosított. A berepedt állapotot csökkentett inerciával (hajlítási merevséggel) kell figyelembe venni. Ez alapján kimondhatjuk, hogy a rugalmas lemezelmélet használati határállapotban elegendően pontos.

A Kirchoff-féle lemezeqyenlet (Lagrange-féle, negyedrendű, parciális, inhomogén) megoldása:

Az inhomogén differenciálegyenletek pontos megoldása két részből tevődik össze. Az első rész a homogén egyenlet ($\Delta \Delta w(x,y) = 0$) megoldása, ami biztosítja a kompatibilitási feltételek kielégítését. A második rész a teljes inhomogén lemezeqyenlet egy partikuláris megoldása, ami a peremfeltételeket elégíti ki. Megjegyezzük, hogy a lemezeqyenlet matematikailag zárt formában való megoldása csak egyes, különleges esetekben lehetséges (például teljes felületen terhelt végtelen lemezsáv, körszimmetrikusan terhelt körlemezek), gyakorlatban előforduló feladatoknál ez általában nem lehetséges.

A differenciálegyenlet analitikus megoldásának egyik legelterjedtebb módja az ismeretlen $w(x,y)$ lehajlásfüggvény és az ismert $q(x,y)$ teherfüggvény Fourier sorba fejtése. Az egyes Fourier tagok egyeztetése után

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

A megoldás gyorsan konvergál, ezért a Fourier sor első 2-3 tagjának felírása elegendő. A lehajlás függvényének ismeretében a kompatibilitási egyenletek segítségével az alakváltozások, a fizikai egyenletek segítségével a feszültségek, majd nyomatékok és nyíróerők

$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \mu_c \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right),$$

$$m_y = -K \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} + \mu_c \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right),$$

$$m_{xy} = m_{yx} = -K(1 - \mu_c) \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y},$$

$$v_x = -K \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right),$$

$$v_y = -K \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right).$$

A legtöbb gyakorlati esetre az analitikus megoldások figyelembevételével táblázatokat (Bareš vagy Čzerny –táblázatok), grafikonokat (Pucher) állítottak össze, amely segítségével a mértékadó keresztmetszetek igénybevételei számíthatók.

A lemezek igénybevételének meghatározására ma a legelterjedtebb a különböző véges elem módszerek használata. A kereskedelmi forgalomban kapható szerkezetszámító programok segítségével a napi tervezési gyakorlatban előforduló lemezek igénybevételei rövid előkészítés után néhány percnyi futtatási idő után rendelkezésünkre állnak. A véges elem programok elméletét és gyakorlati alkalmazásának kérdéseit különböző Mechanika tantárgyak keretében kerültek ismertetésre.

Sok esetben közelítő megoldásokat is használnak az igénybevételek meghatározására. A legelterjedtebb, amikor a lemezt két egymást keresztező gerendával helyettesítik. Erre a célra két módszer a sávmódszer (tartókereszt-eljárás) és a Marcus-módszer terjedt el. A módszer részletes leírása a F1 függelékben található.

Az igénybevételek ismeretében a lemez vasalása meghatározható.

A rugalmas lemezegyenletről levezethető speciális esetek:

Egyirányban teherviselő lemez

Az egyirányban teherviselő lemez definíciójából (lásd Bevezetés) következik, hogy

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

Ennek megfelelően a Kirchoff-féle differenciálegyenlet egyszerűsödik

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} = \frac{q(x, y)}{K}.$$

A nyomatékok

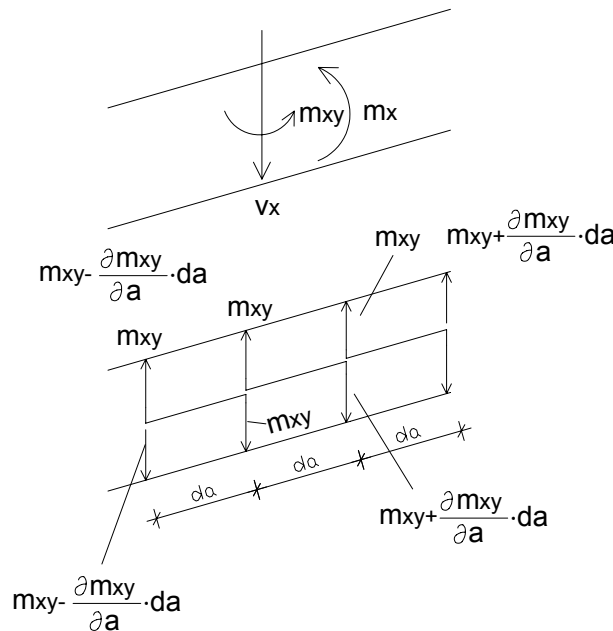
$$m_x = -K \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right),$$

$$m_y = -K \left(\mu_c \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} \right) = \mu_c m_x.$$

Ez azt jelenti, hogy egyirányban teherviselő lemezek esetén a főirányban elhelyezett vasmennyiség harántnyúlási tényezővel szorzott értékét (általában 16-20% a fővasnak) a másik irányban elosztó vasként el kell helyezni.

A lemez peremein fellépő csavarónyomatékok helyettesítése

Peremek mentén fellépő fajlagos csavarónyomatékot statikailag egyenértékű megoszló nyíróerővel helyettesítsük, amihez osszuk fel a lemez szélét da hosszúságú elemekre, és a m_{xy} csavarónyomaték da karú erőpárokkal helyettesíthető (16. ábra). Emiatt a nyíróerő értékét módosítani kell:



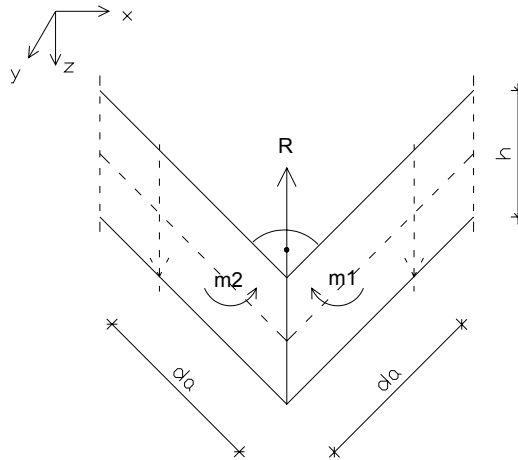
16. ábra Csavarónyomaték-nyíróerő kapcsolat szabadszél esetén [Bölcskei E- Orosz Á: Lemezek, falak, faltartók. Műszaki Könyvkiadó]

$$v_{x,red} = v_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = -K \left[\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \mu_c) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right]$$

A fenti egyesítés a Saint-Venant elv szerint megengedhető, és ezt Kirchoff-féle peremerőnek nevezzük.

Szabadon felfekvő lemez esetén (csuklós megtámasztás) a lemez peremén átadódó reakcióerő megegyezik a $v_{x,red}$ értékével. A szabadon felfekvő lemezsarok találkozásánál a sarokhoz kacsolódó da elemi lemezszéleken m_1 és m_2 nagyságú csavarónyomatékok működnek. Az előbb bemutatott erőpárokkal történő helyettesítés után látható, hogy a lemez sarkon $R = m_1 + m_2$ felfelé mutató koncentrált reakcióerő lép fel. Ha a lemez derékszögű, akkor a koncentrált reakcióerő nagysága $R = 2m_{xy}$. Ebből

következik, ha a lemez sarka nincs leterhelve, vagy lekötve, akkor a lemez sarka felemelkedik (17. ábra).



17. ábra Lemezélek találkozása, lemezsarkok igénybevétele

Ha a lemez peremei befogottak, akkor a peremfeltételből

$$\left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = 0 \right) \text{ következik, hogy a}$$

$$\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x \partial y} = 0, \text{ azaz } m_{xy} = 0.$$

Befogott perem esetén a nyíróerőt nem kell módosítani, a reakció erő és a nyíróerő eloszlása azonos.

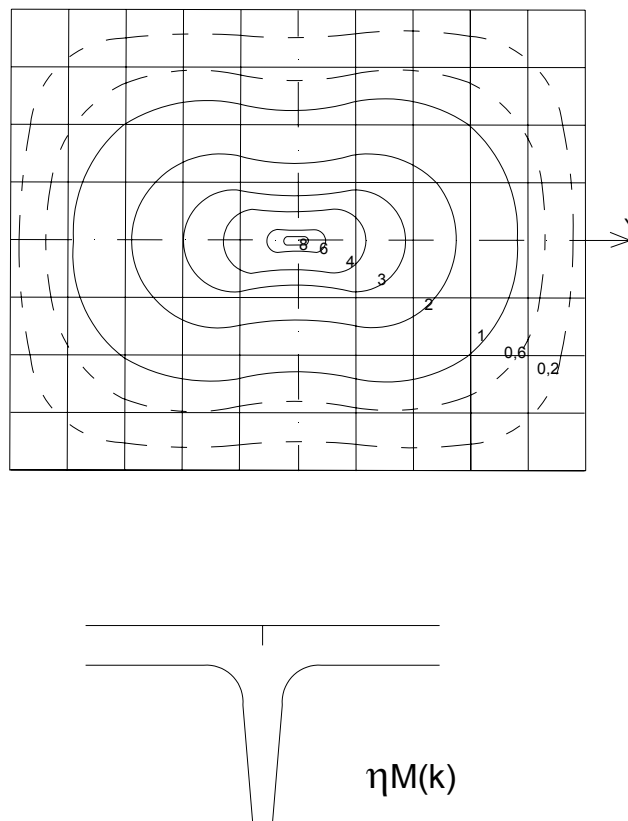
Koncentrált erők esete

Koncentrált teherrel terhelt lemez Kirchoff-féle differenciál egyenletének Fourier-sorbafejtéssel történő megoldása csak nagyon lassan konvergál, és nem vezet megfelelően pontos eredményre.

Gyakorlatban a feladat Pucher-féle hatásfelületek segítségével oldható meg. A hatásfelületeket Pucher osztrák professzor dolgozta ki. A hatásfelületek a hatásábrákhoz hasonlóan a Maxwell-felcserélhetőségi tételén alapul (egy ponton működő egységnyi erő hatására tetszőleges pontban keletkező lehajlás megegyezik az utóbbi pontra állított egységnyi erőből az eredeti pontban számítható lehajlással). A tetszőleges K keresztmetszetben a $q(x, y)$ teherfüggvény hatására keletkező igénybevétel (például hajlítónyomaték) a hatásfelületből $\eta(M_k)$ következő összefüggéssel – numerikus integrálással - számítható

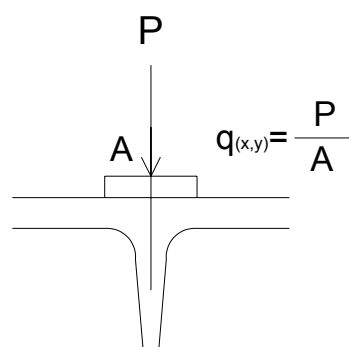
$$M_x^K = \int_A q(x, y) \eta(M_K) dA.$$

A 18. ábrán szabadon felfekvő lemez középső keresztmetszetének szintvonalas ábráját és metszetét láthatjuk koncentrált teher esetére.



18. ábra Pucher-féle hatásfelület és metszet [Bölcskei E-Orosz Á: Lemezek, falak, faltartók. Műszaki Könyvkiadó]

A 18. ábrából jól látszik, hogy a keresztmetszet felett álló koncentrált erőből a keresztmetszetben keletkező nyomaték elvileg végtelen. Gyakorlatban tényleges koncentrált erő nem létezik, csak igen kis felületen megoszló. Ha a vizsgált hatás A felületen oszlik meg, az előbbi képlettel számolható (az integrál véges értéket ad) (19. ábra).



19. ábra Koncentrált erő transzformálása kis felületen megoszló erővé

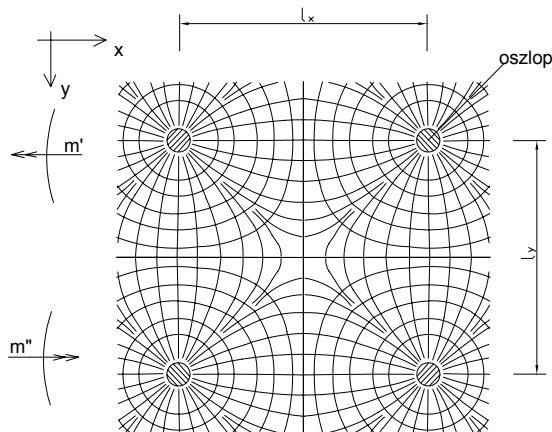
Véges elem módszerek alkalmazása esetén koncentrált terhek esetén külön hangsúlyt kell fektetni a hálózat felvételére, a hálózat sűrítésére.

A lemez vasalásának számítása a rugalmas lemezegyenletből számított igénybevételek esetén:

A Kirchoff-féle lemezegyenlet alapján a lemez tetszőleges pontjában meghatározhatók a pontban keletkező igénybevételek (m_x , m_y , m_{xy}). Ezekből a főnyomatékok

$$m_{1,2} = \frac{m_x + m_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m_x - m_y}{2}\right)^2 + m_{xy}^2} .$$

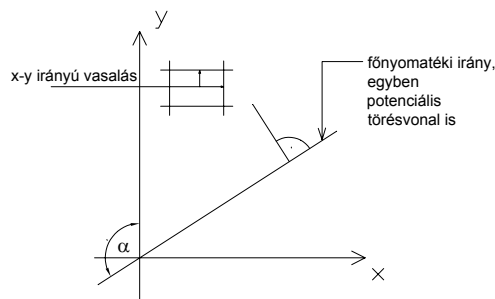
A főnyomatékok értéke és iránya pontról pontra változik. Iránya a trajektória vonalakkal jellemezhető (20. ábra).



20. ábra Oszlopokkal alátámasztott síklemez főfém trajektória vonalai [Farkas: Magasépítési vasbetonszerkezetek. Műegyetem Kiadó]

A főnyomatéki irányokhoz tartozó metszetekben a csavarónyomaték zérus. A főnyomatékokból származó húzóerőt trajektória irányú vasalással célszerű felvenni, de ennek kivitelezése nehézkes. Ha a lemezvasalást egymást merőlegesen keresztező (ortogonális) acélbetétekkel alakítjuk ki, akkor az x irányú fajlagos határnyomaték m_{xH} , az y irányú fajlagos határnyomaték m_{yH} . Az y tengellyel α szöget bezáró határnyomaték Johansen szerint (21. ábra)

$$m_{\alpha,H} = m_{x,H} \cos^2 \alpha + m_{y,H} \sin^2 \alpha .$$

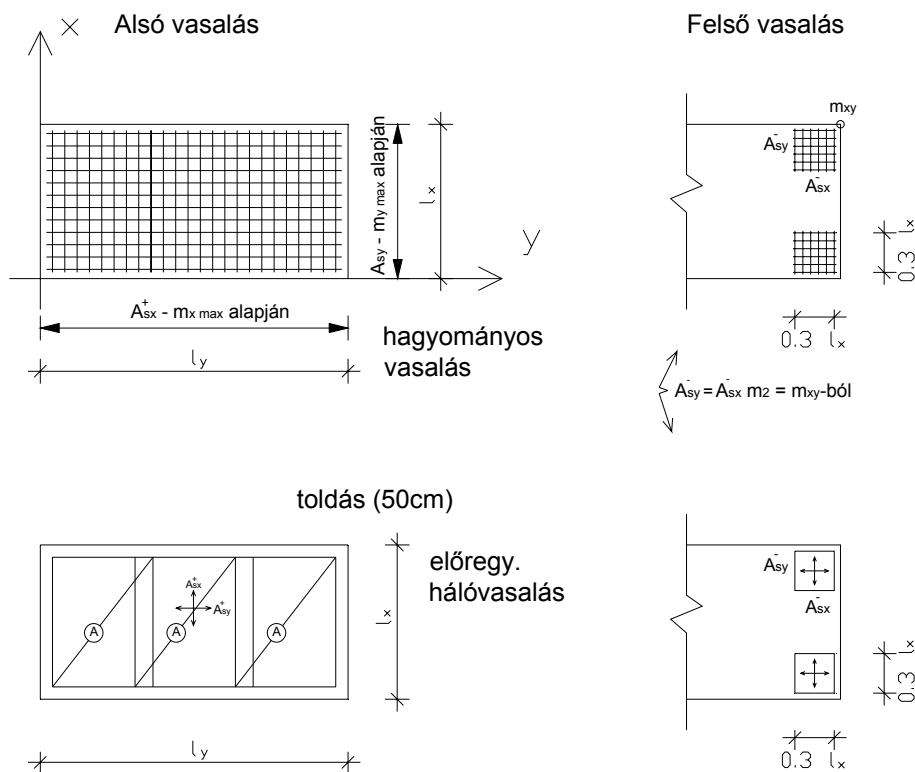


21. ábra x - y irányú vasalás főnyomatéki irányban vett vetületei [Farkas: Magasépítési vasbetonszerkezetek. Műegyetem Kiadó]

Ellenőrzéskor a fenti képlet úgy használható, hogy a α szög legyen a trajektória vonalnak az y tengellyel bezárt szöge, és az így kapott határnyomatéknak a főnyomaték értékénél nagyobboknak kell lenni.

A vasalás tervezésekor az x irányban és az y irányban szükséges vasalást – a biztonság javára történő közelítéssel – a $m_x + m_{xy}$ és $m_y + m_{xy}$ nyomatékokból kell meghatározni.

Egyenletesen megoszló teherrel terhelt peremein feltámaszkodó, derékszögű négyszög alakú lemez vasalásának kialakítását a 22. ábra mutatja.



22. ábra Négy oldalon feltámaszkodó lemez vasalása. [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

A vasbeton lemezek méreteire és vasalására vonatkozóan a következő **szabályokat** kell figyelembe venni [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE előírásai szerint. Terc Kiadó, 2005. 209. oldal 3.4.1.2 pont].

1. A fő teherviselés irányában alkalmazott hosszirányú acélbetétek minimális és maximális mennyiségére, a gerendára vonatkozó szabályok érvényesek:

- a. Minimális vasmennyiség $A_{s,min} = 0,26 \frac{f_{ctm}}{f_{yk}} b_t d \geq 0,0013 b_t d$;

- b. Maximális vasmennyiség $A_{s,max} = 0,04 b_t h$;

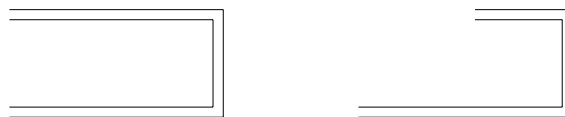
A fenti két képletben

f_{ctm} a beton húzófeszültsége,

- | | |
|----------|---|
| f_{yk} | a betonacél húzószilárdságának karakterisztikus értéke, |
| b_t | a keresztmetszet szélessége, jelen esetben 1000 mm, |
| d | a keresztmetszet hasznos magassága, |
| h | a keresztmetszet magassága, itt a lemez vastagsága. |
2. Egyirányban teherviselő lemezek esetén a mellékirányban szükséges vasalás mennyisége nem lehet kevesebb, mint a főirányban alkalmazott vasalás mennyiségének 20%-a.
 3. Megoszló teherrel terhelt lemezek hosszirányú acélbetéteinek távolsága nem lehet nagyobb, mint
 - a. főirányban $3,0h$ és 400 mm közül a kisebbik;
 - b. mellékirányban $3,5h$ és 450 mm közül a kisebbik;
 4. Koncentrált teherrel lemezek esetén a koncentrált teher környezetében hosszirányú acélbetéteinek távolsága nem lehet nagyobb, mint
 - a. főirányban $2,0h$ és 250 mm közül a kisebbik;
 - b. mellékirányban $3,0h$ és 400 mm közül a kisebbik.
 5. A mezőben alkalmazott húzott hosszvasalás legalább felét a támaszig kell vezetni.

A lemezek kialakításánál a következő javaslatokat célszerű betartani [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]:

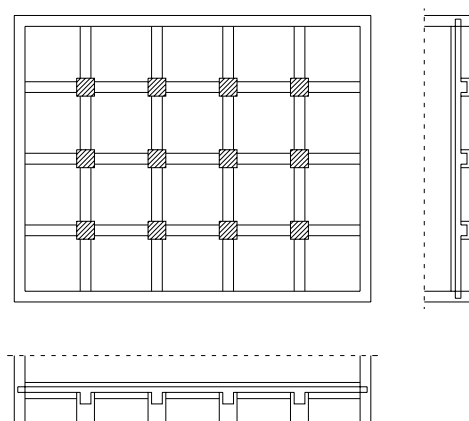
6. A lemez vastagsága minimálisan 60 mm, konzolos lemez befogási keresztmetszetében 100 mm.
7. A lemezben elhelyezett acélbetétek minimális átmérője 5 mm, hegesztett hálós vasalás esetén 4,2 mm, a vasátmérő ne legyen nagyobb a lemez vastagság nyolcadánál ($\phi_{max} < t/8$).
8. A lemez szabad széleivel párhuzamosan szegély acélbetéteket (hajtúvasakat) kell elhelyezni. Ezek távolsága 400 mm vagy a lemezvastagság kétszerese. A hajtúvasak kialakíthatók egyedileg vagy a végi vitt (a lemez szélre merőlegesen) acélbetétek visszahajtásával (23. ábra).



23. ábra Hajtúvasak kialakítása

3.2. Vasbeton lemezrendszerek vizsgálata

Definíció: Több lemez egyirányban vagy mindkét irányban való összekapcsolásával lemezrendszerek jönnek létre. Ennek megfelelően a lemezrendszerek egy vagy mindkét irányban többtámaszúak (24. ábra).



24. ábra Lemezrendszerek kialakítása

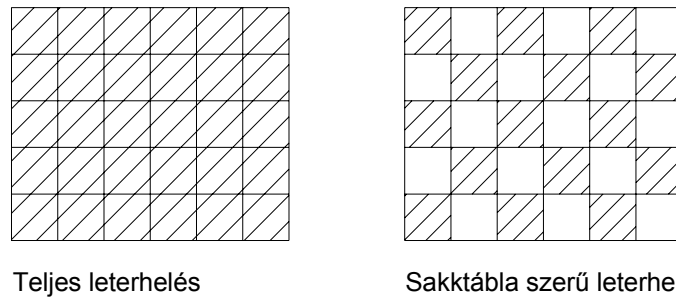
Számítása: A lemezrendszerek pontos vizsgálata véges elem módszeren alapuló számítógépes programokkal történik.

Közelítő számítása: A kétirányban teherviselő lemezrendszerek maximális nyomatékainak közelítő számítása történhet a lemezrendszer vizsgált mezőjével azonos méretű, különálló lemezen. A közelítő vizsgálat elvégzéséhez feltételezni kell:

- A lemezrendszer vastagsága állandó;
- A lemezrendszert mezőnként egyenletesen megoszló, konstans teher terheli;
- A lemezmezők kétirányban teherviselők;
- A lemezt alátámasztó peremek (általában gerendák) megtámasztása nem befolyásolja a lemez igénybevételeit;
- A lemezmezők hajlításra mereven kapcsolódnak egymáshoz, de a megtámasztási vonalak mentén szabadon elforduló.

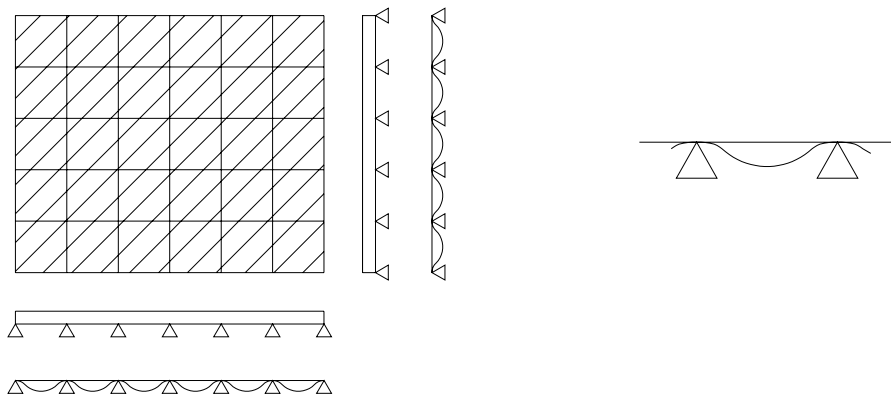
A lemezrendszerek maximális nyomatékait a mezőközépen (mezőnyomaték) és az alátámasztások felett (támasz feletti nyomaték/támasznyomaték) kell meghatározni.

A lemezrendszer maximális mezőnyomatékát akkor kapjuk, ha az önsúly teherrel (g) a teljes lemezrendszert, az esetleges (hasznos teherrel) (p) a lemezrendszert sakk táblaszerűen terheljük le (25. ábra).



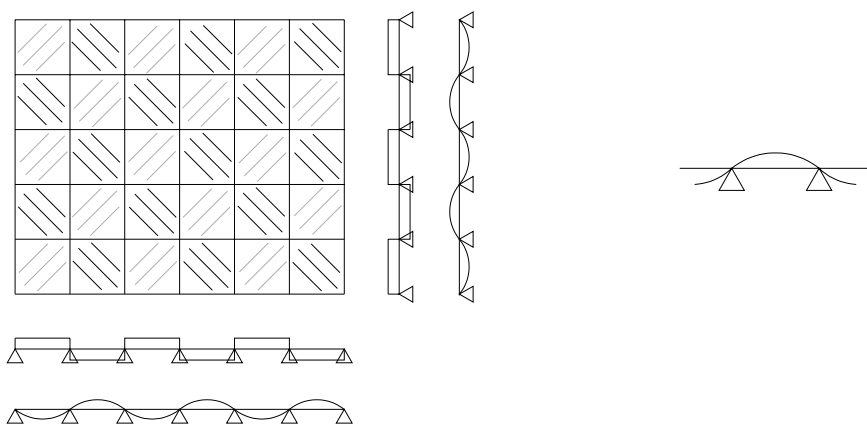
25. ábra Lemezrendszerek leterhelésének típusa (teljes és sakktáblaszerű leterhelés)

A teljes lemezrendszer leterhelésének hatására kialakuló alakváltozást elemezve megállapíthatjuk, hogy a lemezrendszert alkotó belső lemezmezők mind a négy oldalon befogott lemezként viselkednek (26. ábra).



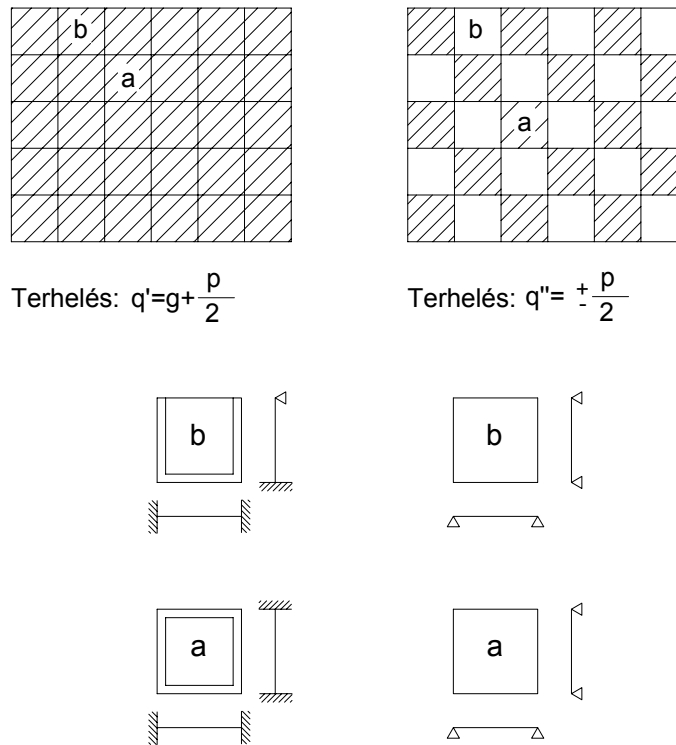
26. ábra Teljes felületen történő leterhelés hatására kialakuló alakváltozás

Ha az egymás melletti lemezmezőket ellentétes irányú, de azonos nagyságú teherrel terheljük, akkor a lemezrendszert alkotó belső lemezmezők, mind a négy oldalon csuklós (szabodon elforduló) lemezként modellezhetők (27. ábra).



27. ábra Váltakozó irányú leterhelés hatására kialakuló alakváltozás

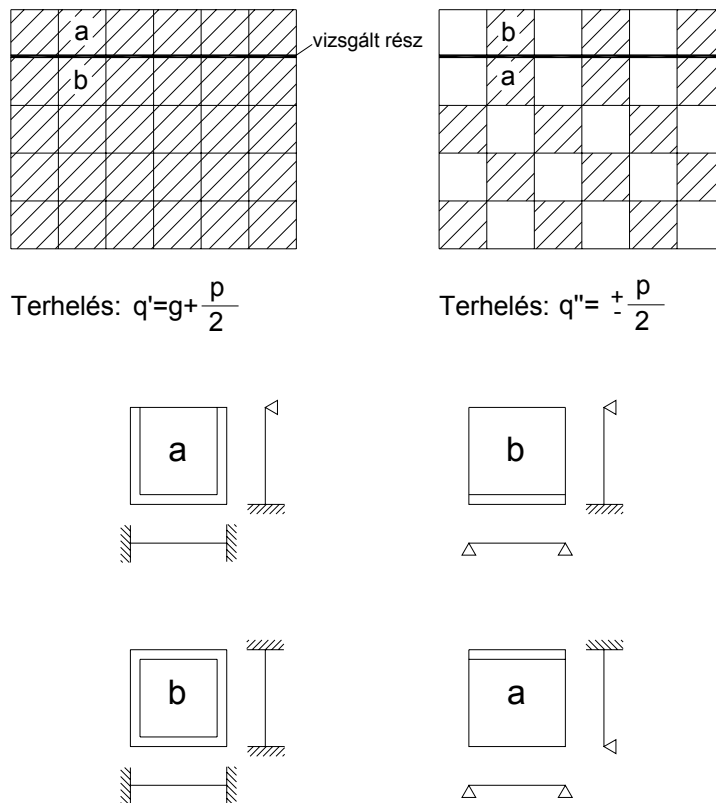
Ezt figyelembe véve a mindkét irányú mezőnyomatékok az összes mezőben meghatározhatók, ha a vizsgált lemezmezőt különálló lemezként modellezzük. Az első esetben a csatlakozó peremek mentén tökéletes befogást tételezünk fel és a lemezre ható terhelés $q' = g + \frac{p}{2}$ (28.ábra).



28. ábra Helyettesítő lemezmezők statikai vázlatai mezőnyomaték számításához [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

A második esetben a vizsgált lemezmezőt négy oldalon csuklós megtámasztásnak tételezzük fel, és a lemezre ható terhelés $q'' = \pm \frac{p}{2}$ (28.ábra). A legnagyobb mezőnyomaték a két esetből származó nyomaték összege, a legkisebb mezőnyomaték a két esetből származó nyomaték különbsége.

A lemezrendszer maximális támasznyomatékát akkor kapjuk, ha az önsúly teherrel (g) a teljes lemezrendszert, az esetleges (hasznos teherrel) (p) a lemezrendszert sakk táblaszerűen terheljük le, de a vizsgált támaszhoz csatlakozó mindkét lemezt leterheljük (29. ábra). Itt is két teheresetet kell figyelembe venni. Az első tehereset a teljes leterhelés, amikor a csatlakozó mindkét lemezmező mind a négy oldalán tökéletes befogást tételezünk fel, a terhelés a q' . A második eset a váltakozó leterhelés, amikor a csatlakozó lemezmezők csatlakozó oldalán tökéletes befogást, a többi oldalon csuklós (szabandon elforduló) megtámasztást tételezünk fel, a terhelés q'' . A támasznyomaték minimális értéke a két esetből meghatározható nyomatékok összege. A vasalás számításánál a csatlakozó lemezmezők alapján számított támasznyomatékok átlagát kell figyelembe venni.

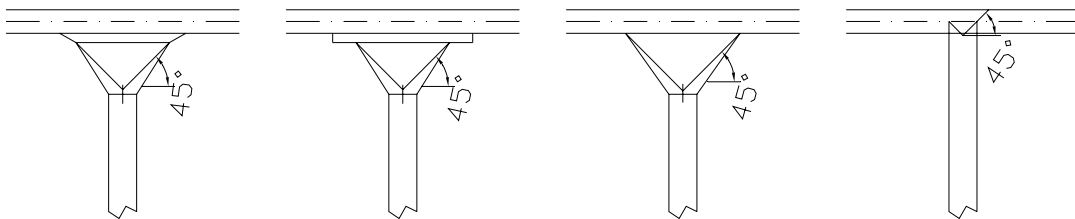


29. ábra Helyettesítő lemezmezők statikai vázlatai támasznyomaték számításához [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

4. Oszlopokkal alátámasztott lemezek (födémek)

Definíció: Oszlopokkal alátámasztott lemezek (födémek) esetén a lemezek (födémek) az oszlopokra közvetlenül (tartógerendák-bordák nélkül) támaszkodnak.

Osztályozása: Az oszlopokkal közvetlenül alátámasztott lemezeket az oszlopfej kialakítása alapján osztályozhatjuk. Ha az oszlopfej kiszélesedik, akkor gombafödémről (30. ábra), ha az oszlop és a síklemez födém közvetlenül – kiszélesedés nélkül – csatlakozik egymáshoz, akkor síklemez födémekről beszélhetünk (30. ábra).



30. ábra Oszlopokkal alátámasztott lemezek típusai [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

Alkalmazásának előnye és hátrányai: Bódi és Farkas szerint [Bódi - Farkas: Vasbetonlemezek. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke] a síklemez födémek alkalmazásának előnyei:

- Egyszerű, gyors zsuzálás, állványozás, vasszerelés;
- Jobb térkihasználás a gerendák és oszlopfejek elmaradása miatt;
- Kiseb kötöttségek az alaprajzi elrendezésben;
- Jobb természetes bevilágítás.

Hátrányai:

- Bonyolultabb erőjáték, igénybevételek pontos számítása nehézkes;
- Közelítő módszerek túlméretezéshez vezetnek;
- Nagyobb alakváltozások;
- A lemez és oszlop kapcsolatának modellezése bizonytalan.

Vasalás meghatározása:

A gomba és síklemez födémek vasalásának ellenőrzésekor és tervezésekor legalább két feladatot kell elvégezni a hajlítási méretezést, és az átszúródás vizsgálatot.

Hajlítási méretezés:

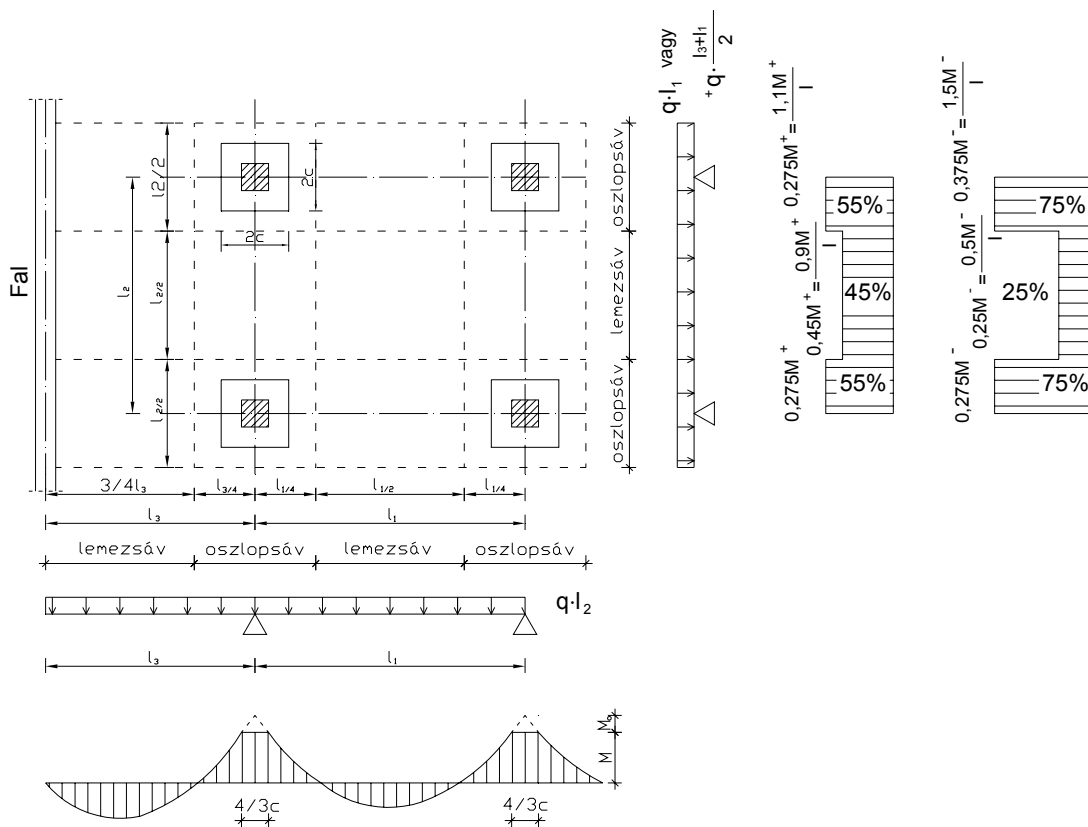
A gomba- vagy síklemez födémek függőleges terhekből származó igénybevételei a rugalmas lemezegyenlet (Kirchoff-féle lemezegyenlet) megoldásával határozhatók meg. Feltételezzük, hogy az oszlopra átadódó reakcióerő az oszlop felületén egyenletesen oszlik meg (lásd Koncentrált teher esete). A lemezegyenlet megoldása történhet numerikusan (általában véges elemes módszer) és analitikusan. Legelterjedtebb a véges elem módszereken alapuló számítógépes programok

használata, a véges elemes hálózat felvételénél az oszlopok környezetében a véges elemes hálózatot megfelelően sűríteni kell.

A lemezegyenlet analitikus megoldása zárt formában szinte sohasem történhet, a Fourier-sorok alkalmazása a lassú konvergencia miatt nehézkes. A gyakorlatban az analitikus megoldásokon alapuló táblázatok lehet használni. A táblázatok segítségével szabályos elrendezésben megtámasztott, négyszög alaprajzú lemezrendszerek a kritikus keresztmetszeteiben a mértékadó nyomaték és a reakcióerők nagysága határozható meg.

A gomba- és síklemez födécek maximális igénybevételeinek meghatározására közelítő eljárás is alkalmazható, ha az alátámasztások aránya mindkét irányban 0,8 és 1,25 közé esik.

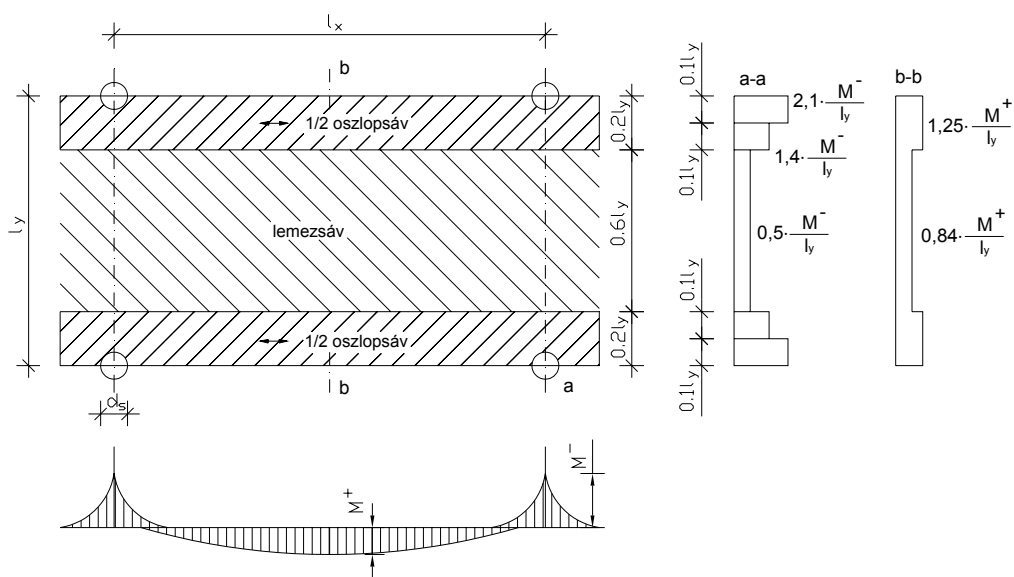
A gombafödém lemezének nyomatékait egy olyan x vagy y irányú helyettesítő többcímű gerendán határozzuk meg, melynek támaszköze az oszlopok tengelyeinek távolsága a gerenda tengelyével párhuzamosan, a gerenda terhelése az adott iránynak megfelelő teljes lemezszélesség terhelése (31. ábra).



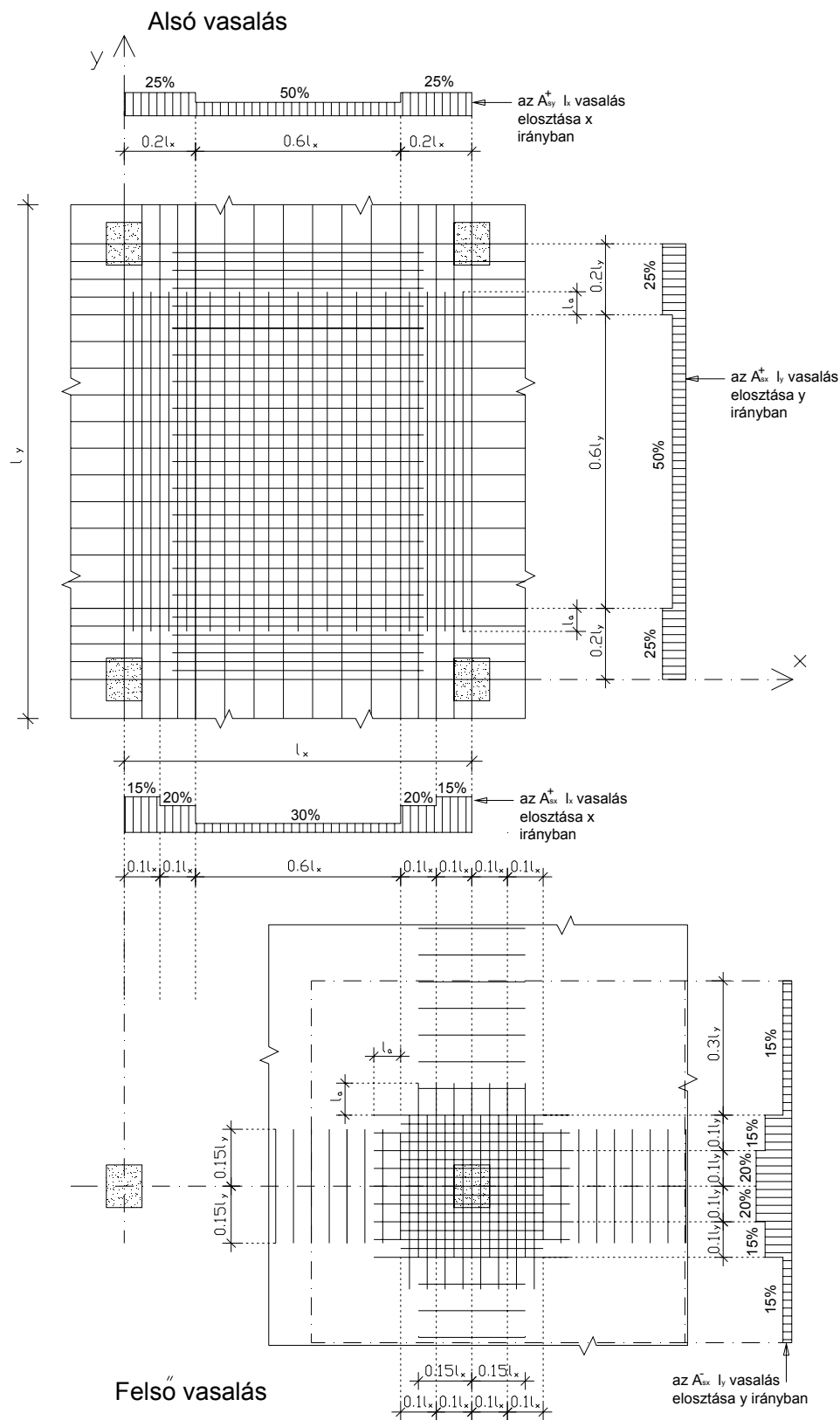
31. ábra Gombafödémek nyomaték és vasalás számítása közelítőleg [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke tananyagban lévő ábra bővítésével]

A helyettesítő gerendán számítható mezőnyomaték 45%-t a $0,5l$ szélességű lemezsáv, a mezőnyomaték 55%-t a $0,5l$ szélességű oszlopsáv veszi fel. A helyettesítő gerenda támasznyomatékának 25%-t a lemezsáv, 75%-t az oszlopsáv veszi fel. A lemez hajlítási vasalását e szerint kell kialakítani.

A síklemez födémek esetén a maximális hajlítónyomatékok hasonló módon határozhatók meg közelítőleg. A kisebb feltámaszkodási felület miatt a nyomatéki átrendezés különböző (32. ábra). A lemez hajlítási vasalását e szerint kell kialakítani (33. ábra).



32. ábra Síklemez födémek nyomatékainak és vasalásának közelítő számítása [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

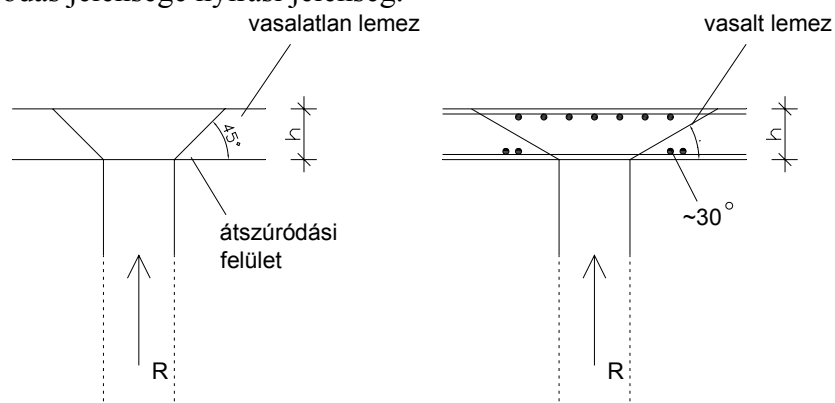


33. ábra Síklemez fődémekek nyomatókainak és vasalásának közelítő számítása [Bódi-Farkas: Vasbetonlemez. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

Átszúródás vizsgálata:

A kis felületen átadódó reakció erő következtében az átszúródás vizsgálata kritikus. Ez különösen igaz síklemez födécek esetén.

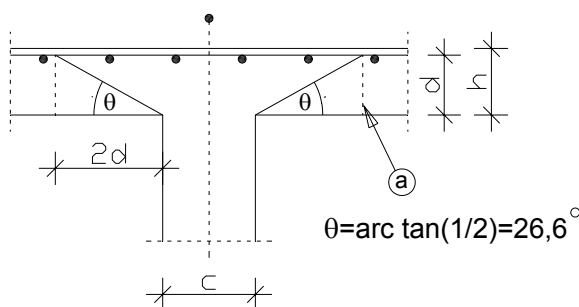
Átszúródás jelenség: Kísérletek alapján a központos oszlop reakció esetén az átszúródás kör alakú oszlop esetén csonka kúp, négyzet alakú oszlop esetén csonka gúla idom szakad ki a lemezből az oszlop környékén. A kiszakadó gúla vagy kúp hajlásszöge vasalatlan lemez esetén 45 fok, vasalt lemez esetén kb. 30 fok (34. ábra). Az átszúródás jelensége nyírási jelenség.



34. ábra Kiszakadó csonka kúp vagy gúla szerkesztése, hajlásszögek

Átszúródás ellenőrzésének elvi alapjai: A lemez átszúródásra megfelel, ha az átszúródási vonal mentén fellépő fajlagos mértékadó nyíróerő nem haladja meg a lemez nyírási ellenállását, amely függ a lemez hasznos magasságától, a beton húzószilárdságától és az átszúródásra elhelyezett vasalás határerejétől.

Átszúródás számítása az EUROCODE előírása szerint [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint. 3.3.1.4. pont 187. oldal]: Az átszúródási vonal meghatározásához szükséges paramétereket a 35. ábra tartalmazza.



Ⓐ =kritikus átszúródási vonal

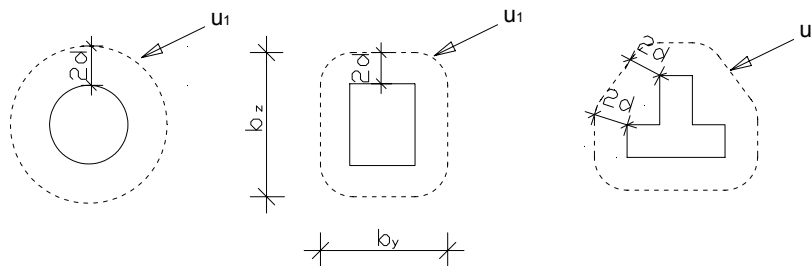
35. ábra Az átszúródás vizsgálat egyes fogalmainak definíciója [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint. 3.3.1.4. pont 187. oldal]

A kritikus átszűrődési vonal meghatározásakor a lemez hasznos magasságát az alábbi értékkel kell figyelembe venni

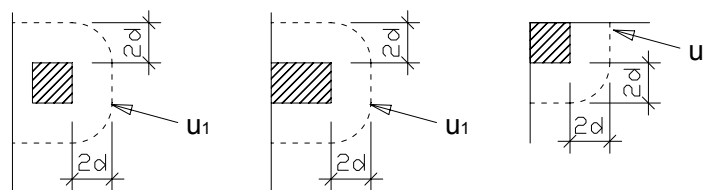
$$d = d_{eff} = \frac{d_x + d_y}{2}, \text{ ahol}$$

d_x, d_y egymásra merőleges x, y irányú, kritikus átszűrődési vonalon belül elhelyezett hajlítási vasalás helyzetéből számított hasznos magasságok.

A kritikus átszűrődési vonalat általános esetben az. 36. ábrán, speciális esetekben (lemez szélek esetében) a 37. ábrán adjuk meg.



36. ábra Az átszűrődési vonal meghatározása általános esetben [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint. 3.3.1.4. pont 187. oldal]



37. ábra Az átszűrődési vonal meghatározása speciális esetben [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint. 3.3.1.4. pont 187. oldal]

Az átszűrődési vasalást nem kell alkalmazni, ha

$$v_{Ed} \leq v_{Rd,c}, \text{ ahol}$$

v_{Ed} az átszűrődési fajlagos nyíróerő tervezési értéke, melyet

$$v_{Ed} = \frac{V_{Ed}}{u_i d} \text{ képlettel számolhatunk központos nyomás esetén;}$$

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed}}{u_i d} \text{ képlettel számolhatunk külpontosan működő átszűrődési erő}$$

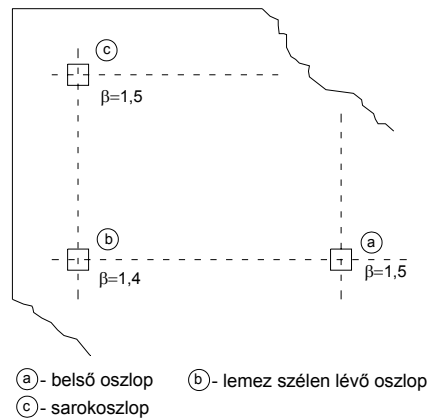
esetén, ahol

V_{Ed} központosan működő átszűrődési erő,

u_i átszűrődési vonal kerülete,

d hasznos magasság,

β külpontosságot figyelembe vehető tényező, ami akkor használható, ha a támaszközök hosszai 25%-nál nagyobb értékben nem térnek el. Értékeit a 38. ábra tartalmazza.



38. ábra β tényező meghatározása

$v_{Rd,c}$ átszűrődési teherbírás tervezési értéke átszűrődési vasalás nélkül, melyet

$$v_{Rd,c} = \left(\frac{0,18}{\gamma_c} k (100 \rho_l f_{ck})^{\frac{1}{3}} + 0,10 \sigma_{cp} \right) \frac{2d}{a} \geq (v_{\min} + 0,10 \sigma_{cp}) \frac{2d}{a} \text{ képlettel}$$

számolunk, ahol

γ_c

a beton biztonsági tényezője (1,5),

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d[\text{mm}]}} \leq 2,0,$$

$$\rho_l = \sqrt{\rho_{lx} \rho_{ly}} \leq 0,02$$

kétirányú acélhányad,

$$\rho_{li} = \frac{A_{sli}}{bd} \leq 0,02$$

oszlop körüli együttdolgozó

lemezszélességben (oszlop szélessége meg $3d$ lemezsáv mindkét oldalon) elhelyezett tapadásos vasalás átlagos acélhányada,

f_{ck}

a beton határszilárdságának karakterisztikus értéke,

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{cx} + \sigma_{cy}}{2}$$

a lemez átlagos normálfeszültsége az

átszűrődési vonalon belül a kétirányból számolva,

$$v_{\min} = 0,0035 k^{\frac{3}{2}} f_{ck}^{\frac{1}{2}},$$

d

lemez hasznos magassága

a

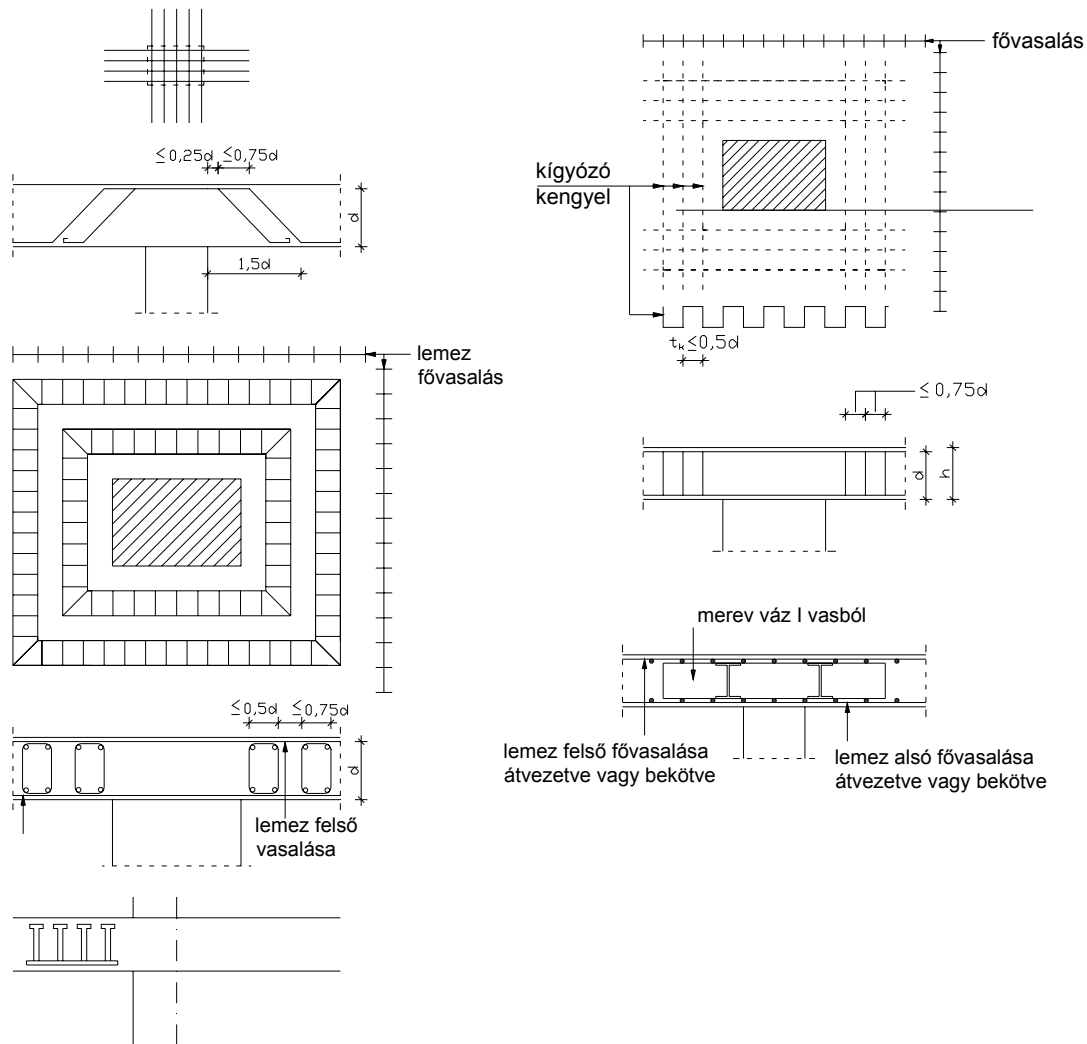
az oszlop széle és a figyelembe vett

átszűrődési vonal távolsága

Megjegyezzük, hogy a kritikus vonalon a

$2d/a = 1$

Ha az előbbi feltétel nem teljesül (azaz az átszűrődési fajlagos nyíróerő tervezési értéke nagyobb, mint az átszűrődési teherbírás tervezési értéke átszűrődési vasalás nélkül), akkor az átszűrődésre vasalást kell elhelyezni, melynek kialakítását a 39. ábrán láthatjuk.



39. ábra Átszűrődési elleni vasalás típusai, különböző kialakítási módjai [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek. Oktatási segédanyag. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

A kialakításnál figyelni kell arra, hogy a külső acélbetét sor $1,5d$ távolságnál ne kerüljön távolabb az átszűrődési vonaltól (40. ábra). Ebben az esetben az alábbi két feltételt kell kielégíteni

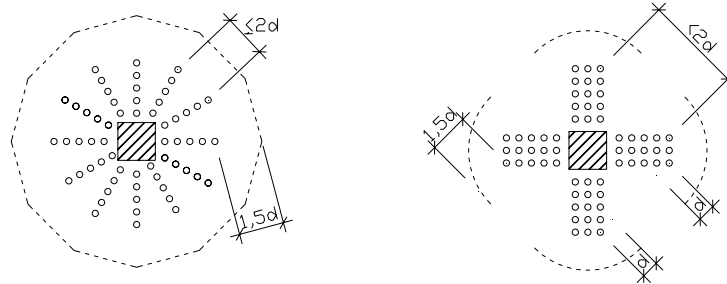
$$v_{Ed} \leq v_{rd,cs}$$

$$v_{Ed} \leq v_{rd,max} , \text{ ahol}$$

$$v_{rd,cs} = 0,75v_{rd,c} + 1,5 \frac{d}{s_R} \frac{A_{sw} f_{ywd,eff}}{u_i d} \sin \alpha , \text{ ahol}$$

- d a lemez hasznos magassága,
- s_R koncentrikus körök távolsága (egyetlen sor felhajlított acélbetéttel kialakított átszűrődési vasalás esetén $d/s_R = 0,67$),

- A_{sw} egy körön elhelyezett átszűrődési vasalás keresztmetszeti területe,
 $f_{ywd,eff} \left[\frac{N}{mm^2} \right] = 250 + 0,25d [mm] \leq f_{ywd}$ átszűrődési vasalás csökkentett értéke,
 f_{ywd} átszűrődési vasalás határszilárdságának tervezési értéke,
 α átszűrődési acélbetétek tengelyének a lemez síkjával bezárt szöge.



40. ábra Átszűrődési vasalás elhelyezése [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint. 3.3.1.4. pont 187. oldal]

A feladat során ellenőrizni kell a ferde nyomott betonrudak teherbírását (második feltétel ($v_{Ed} \leq v_{rd,max}$)).

A ferde nyomott rácsrúd teherbírása

$$v_{Rd,max} = 0,5v_f^{cd}, \text{ ahol}$$

$$v = 0,6 \left(1 - \frac{f_{ck}}{250} \right)$$

- f_{ck} a beton nyomószilárdságának karakterisztikus értéke,
 f_{cd} a beton nyomószilárdságának tervezési értéke.

5. Vasbeton lemezek képlékeny teherbírása

12. ábrán bemutattuk a vasbeton lemez jellegzetes viselkedését, terhelés-történetét a teher-lehajlás diagram segítségével. Az ábrán jól látszik, hogy az I. és II. feszültség állapotban a tartó rugalmasan viselkedik, a megfelelő közelítések alkalmazásával a Kirchoff-féle lemezegyenlet használható. A terhelések növelésével egyes keresztmetszetekben a betonacél eléri folyási határszilárdságát képlékeny csuklók, csukló-(folyási/törés-) vonalak alakulnak ki, a szerkezet labilissá válik.

A biztonság kárára tévedhetünk, ha nem vesszük figyelembe, hogy a szerkezet alakváltozó képessége a berepedezetté válás, a lokális képlékenyedés stb. miatt a teherszint növekedésével növekszik, a gazdaságosság kárára tévedhetünk, ha nem vesszük figyelembe, hogy a szerkezetnek az igénybevétel-átrendeződés lehetősége miatt jelentős teherbírasi tartalékai lehetnek.

Igénybevétel-átrendeződés csak statikailag határozatlan erőjátékú szerkezetekben lehetséges, mint folytatatólagos többtámaszú gerendák, a keretszerkezetek esetén. A felületszerkezetek is statikailag határozatlan erőjátékúak, mert igénybevétel-eloszlásuk a legkritikább esetben vehető fel egyértelműen az alakváltozások analízise nélkül.

Az ideálisan rugalmas viselkedéstől való eltérés figyelembevételére számtalan különböző részletességű elvi modellt dolgoztak ki. A lemezek tervezésére alkalmazott képlékenységtani módszerek elvi alapját a képlékenységtan főtételei alkotják. Ezek a tételek korlátlan képlékeny alakváltozó képességgel bíró szerkezetekre érvényesek feltétel nélkül. Korlátozott képlékeny alakváltozású szerkezetek esetén akkor alkalmazható, ha a vizsgálat kiterjed az alakváltozásokra vonatkozó korlátozások ellenőrzésére is.

Számítási módszerek:

A képlékeny alakváltozások és feszültségek között nincs egyértelmű összefüggés, a képlékeny alakváltozások nem reverzibilisek. A szerkezetek képlékeny teherbírásának vizsgálatánál a következő feltételeket kell kielégíteni:

1. Egyensúlyi feltétel, amely szerint a szerkezetre működő összes erőnek egyensúlyban kell lennie;
2. Mechanizmusa a merev testek kinematikailag határozott láncolata. A láncolatban bármelyik a láncolat mozgásában részt vevő elem egyetlen mozgáselemét megváltoztatva, a láncolat minden elemének a helyzete e változás és a láncolat geometriája által egyértelműen meghatározott módon változik meg. Mechanizmus kialakulásának feltétele, hogy a törési mechanizmushoz elegendő képlékeny csuklónak kell létrejönni. Ez a rugalmasságtanban a kompatibilitási feltételnek felel meg;
3. Teherbírasi feltétel, amely szerint a szerkezet összes keresztmetszetében a külső terhekből keletkező igénybevételek nem haladhatják meg az adott keresztmetszet teherbírását. Vasbeton keresztmetszet esetén ez bekövetkezhet,

ha a keresztmetszet nyomott szélső szálában elérjük a beton határösszenyomódását, vagy a keresztmetszetben lévő acélbetétek elszakadnak (vasbeton keresztmetszet teherbírasi határállapotának –III. feszültségállapot – feltétele).

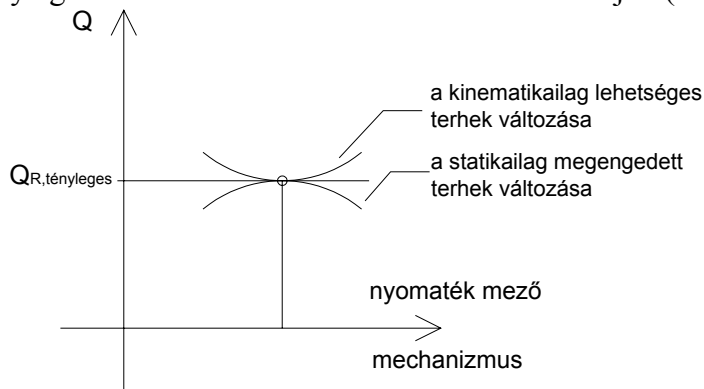
A szerkezet képlékenységi teherbírása két számítási módszerrel határozható meg [Hegedűs István: Lemezek. Hidak és Szerkezetek Tanszéke Segédlet, 2007]:

1. *Statikai főtétel*: Statikailag lehetséges feszültségeloszlásnak nevezünk egy feszültségeloszlást, ha az adott eloszlású teherrel terhelt szerkezet minden pontjában maradéktalanul kielégíti az egyensúlyi feltételeket. Szilárdságilag elérhetőnek egy-egy feszültségeloszláshoz rendelt azon teherintenzitást nevezzük, amely nem növelhető anélkül, hogy a szerkezet valamely pontjában a képlékenységi határt meghaladó feszültségek lépjenek fel. A statikai főtétel kimondja, hogy a törőteher intenzitása a statikailag lehetséges feszültségeloszlások szilárdságilag elérhető teherintenzitásainak felső korlátja. A statikai főtétel alapján minden olyan Q_i terhelés, amelynek egy statikailag megengedett feszültségmező felel meg kisebb, vagy legfeljebb azonos a szerkezet Q_R törőterhénél $Q_{i,stat} \leq Q_R$. A statikailag megengedett nyomatékmező kielégíti az egyensúlyi és a teherbírasi feltételeket.
2. A képlékenységtani vizsgálatok általában felteszik, hogy a képlékeny alakváltozások nagyságát az anyagtulajdonság nem korlátozza. A szerkezet alakváltozásai a képlékeny viselkedés kialakulása után jó közelítéssel olyanok, mintha a belső alakváltozások egy-egy *képlékenyedési helyre* - rúdszerkezeteknél egy-egy képlékenyedő pontra, felületszerkezeteknél vonalra, tömbszerű szerkezeteknél felületre - koncentrálnának, a képlékenyedési helyek közt pedig merev testként mozdulnának el a szerkezet részei.

A képlékenyedési helyek a megtámasztásai miatt merevtest-szerű elmozdulásra képtelen szerkezetet olyan tartományokra bontják, amelynek elemei a merev testekből álló láncolatok mozgástörvényei szerint egymáshoz képest elmozdulhatnak. Ha a képlékenyedési helyek a szerkezetet mechanizmussá alakítják át, a szerkezet terhe nem növelhető tovább, amint az is, hogy újabb képlékenyedési hely kialakulására már nincsen lehetőség. Egy szerkezet *törési mechanizmusainak* nevezzük azokat a kinematikailag határozott láncolatokat, amelyekké a szerkezet feltételezett képlékenyedési helyekkel feldarabolható. Egy törési mechanizmus minden feltételezett képlékenyedési helyéhez kapcsolati teherbírás-ként hozzárendelhetjük a szerkezet ottani képlékeny ellenállását, amellyel a képlékenyedési helyen feltételezett relatív elmozdulást akadályozni képes. Ezt megtéve, a szerkezet minden terhéhez hozzárendelhetünk egy teherintenzitást, amellyel a teher képes "beindítani" a feltételezett törési mechanizmust, azaz olyan teherintenzitást, amely a feltételezett képlékenyedési helyek közt abszolút merevnek feltételezett testekből álló, de a képlékenyedési helyeken csak a helyi képlékeny ellenállás értékének eléréséig "blokkolt" kapcsolatú mechanizmust képlékeny alakváltozásra kényszeríti. Ezt a teherintenzitást a vizsgált teher *egy kinematikailag elégséges teherintenzitásának* nevezzük.

A képlékenységtan kinematikai főtétele alapján a törőteher intenzitása a kinematikailag elégséges teherintenzitások alsó korlátja. A tétel szerint egy "találomra" kiválasztott törési mechanizmushoz kiszámolt kinematikailag elégséges teherintenzitás mindig felső korlátja a törőteher intenzitásának. A képlékenyedések feltételezett helyének a variálásával megkeressük azt a törési mechanizmust, amelyhez a legkisebb kinematikailag elégséges teherintenzitás tartozik. $Q_{i,kint} \geq Q_R$. A kinematikailag megengedett nyomatékmező kielégíti az egyensúlyi és a mechanizmus kialakulásának feltételeit.

Ha egy kinematikailag lehetséges törési mechanizmushoz hozzárendelhető egy statikailag megengedett nyomatékmező, akkor a hozzájuk tartozó Q_i közös terhelés, a szerkezet tényleges teherbírása. Ezt az unicitás tételének hívjuk (41. ábra).



41. ábra Unicitás-tétele [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek képlékeny teherbírása. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]

Vasbeton lemezek képlékeny teherbírásának meghatározása

A vasbeton lemezek képlékeny teherbírásának meghatározásához a statikai és a kinematikai tétel egyaránt használható. A következőkben kinematikai tételen alapuló Johansen-féle törésvonal elméletet mutatjuk be. A törésvonal elmélet lényege, hogy a lemezen kinematikailag lehetséges törésvonal konfigurációinak felvételével olyan törési mechanizmus alakul ki, amelyhez a szerkezet törőterhének felső korlátja meghatározható. A törésvonal elmélet alkalmazásakor következő alapfeltételezéseket kell tenni [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek képlékeny teherbírása. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]:

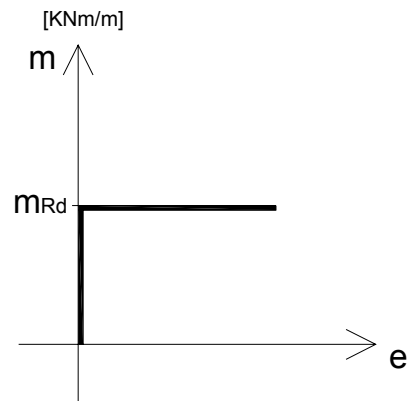
- A törésvonalak mentén a nyomaték állandó és megegyezik az acélbetétek folyásához tartozóhatárnyomatékkal;
- A törésvonalak által határolt lemeztáblák merev test szerűen fordulnak el a csuklós (szabadon elforduló) vagy a tökéletesen befogott peremek körül;
- Oszlopokkal megtámasztott lemez esetén az elfordulási tengely átmegy az oszlop tengelyén.

Ezekből az alapfeltevésekből az alábbiak következnek [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek képlékeny teherbírása. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke]:

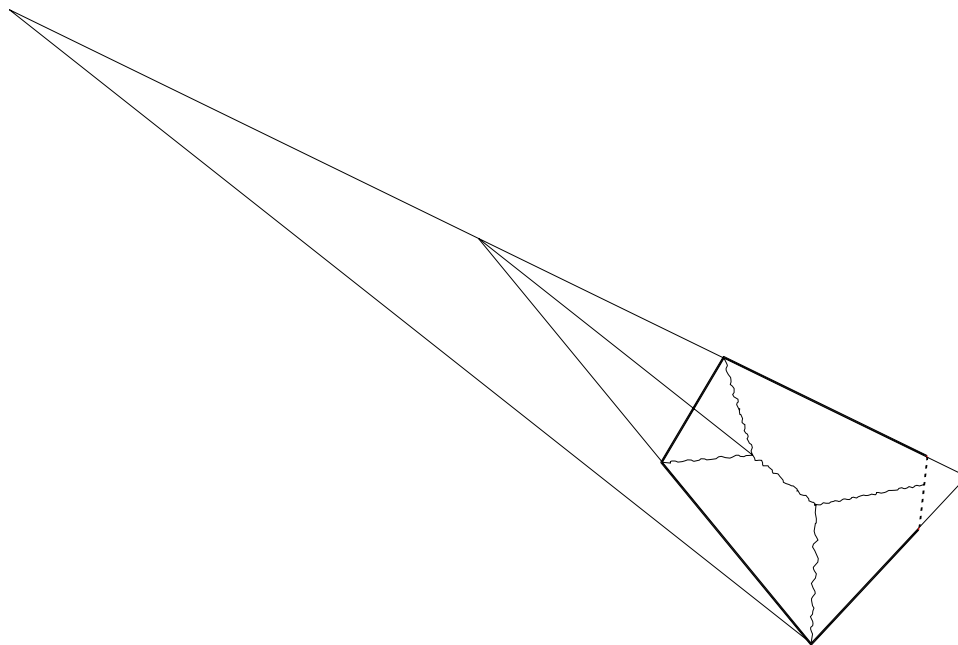
- A képlékeny viselkedés kialakulása során olyan nagyságú képlékeny alakváltozások jöhetnek létre, amelyek mellett a rugalmas alakváltozások

elhanyagolhatóan kicsinyek, azaz vizsgált lemez viselkedése merev-képlékeny (42. ábra), a törésvonalak egyenesek;

- A befogott peremen mindig törésvonalat (negatív) kell feltételeznünk;
- Minden törésvonal átmegy annak a két lemeztáblának az elfordulási tengelynek a metszéspontján, amelyet elválaszt (43. ábra);



42. ábra Merev-képlékeny viselkedés

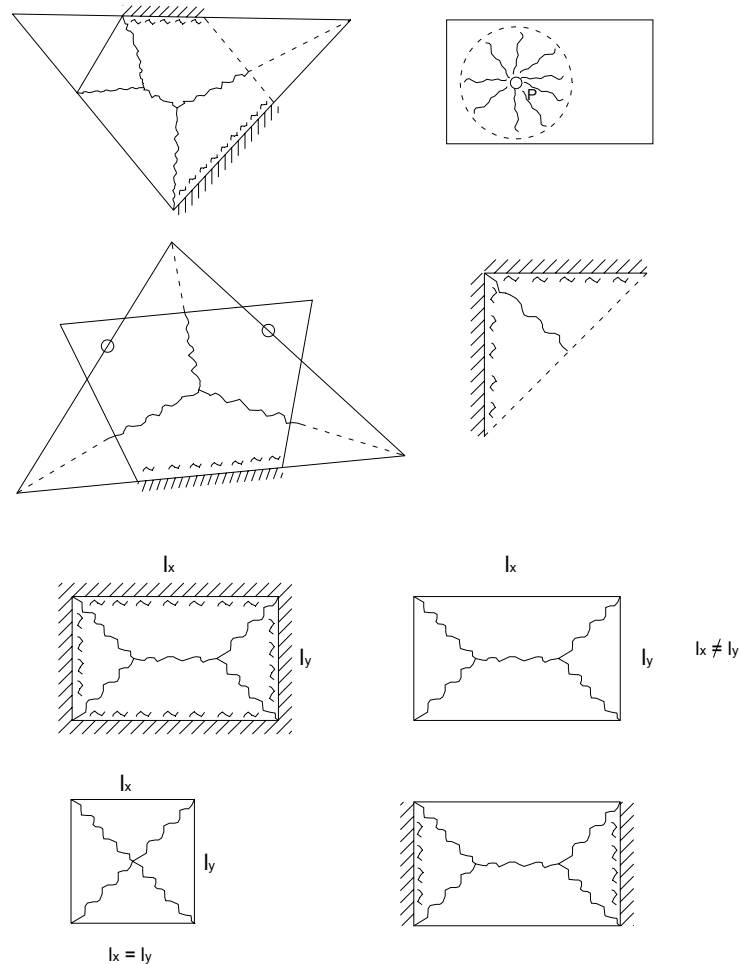


43. ábra Törésvonalak szerkesztése

- Ha a törésvonalak a lemez felületét n lemeztáblára osztják, és minden elfordulási tengely ismert, akkor $n-1$ geometriai paraméterrel lehet leírni a törési mechanizmust;

- Általános esetben minden lemeztábla elfordulási tengelye ismert. Ha k a nem-ismert elfordulási tengelyek száma, akkor a törési mechanizmust $i = n - l + k$ geometriai paraméter szükséges a törési mechanizmus leírásához.

A fent összefoglaltak alapján néhány esetben bemutatjuk a kinematikailag lehetséges törésvonalakat (44. ábra).



44. ábra Különböző alakú és megtámasztású lemezek lehetséges törésképei

A törőteher felső korlátjának meghatározásához a virtuális munka tételét célszerű alkalmazni. A számítás legfontosabb lépéseit a következőkben foglaljuk össze [Bódi-Farkas: Vasbetonlemezek képlékeny teherbírása. Oktatási Segédlet. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke].

A törési mechanizmus kialakulása után a törésvonalak, vagy a lemez széle által határolt lemeztáblára a következő terhek hatnak:

- A külső terhek (önsúly és hasznos terhelés) a felületen megoszló q , vagy vonal mentén megoszló q , vagy koncentrált Q erő;
- A törésvonalak mentén fellépő m hajlító és m_T csavarónyomatékok;
- A törésvonalak mentén, a két csatlakozó lemeztábla között keletkező nyíróerők.

Legyen a lemez egy végtelenül kicsi eleme $dxdy$ felülettel jellemezve, ha ennek a virtuális elmozdulása $\delta(x,y)$ akkor a teljes lemezre a külső erők virtuális munkája

$$L_K = \iint_A q \delta(x,y) dx dy + \int_l q \delta(l) dl + \sum Q \delta_i .$$

Legyen $\underline{\theta}_i$ a törési mechanizmus egy lemezelemének virtuális elfordulása, s_i egy az elemet határoló törésvonal szakasz hossza, és \underline{m}_i az s_i törésvonalon működő fajlagos nyomaték. Ekkor a nyomatékok belső virtuális munkája a teljes lemezre

$$L_B = \sum_i (\underline{m}_i s_i) \underline{\theta}_i = \sum_i s_i (\underline{m}_i \otimes \underline{\theta}_i),$$

ahol $\underline{m}_i \otimes \underline{\theta}_i$ skalárszorzat $\underline{m}_i \otimes \underline{\theta}_i = |\underline{m}| \cdot |\underline{\theta}| \cos(\underline{m}, \underline{\theta})$.

A csavarónyomatékok és a nyíróerők munkája teljes lemezre zérus (mivel a törésvonal két oldalán ezek azonos értékűek, de ellenkező előjelűek).

A külső és belső munkák egyenlősége alapján ($L_K=L_B$), az m nyomatékok meghatározhatók a q_R törőteher és a törésképet jellemző λ_i paraméterek függvényében:

- a) A feladat megoldása az $m = m(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n, q_R)$ függvény maximálásából áll és a következő egyenletrendszer megoldására vezet

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial m}{\partial \lambda_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial m}{\partial \lambda_n} = 0.$$

Az egyenletrendszert megoldva λ_i értékei és az m nyomaték, a q_R függvényében meghatározhatók ($i = 1, 2, \dots n$).

- b) Másik lehetséges megoldás: a q_R törőteher a lemez ismert vasalásából számítható törőnyomatékok és a törésképet jellemző λ_i paramétereinek függvényében határozzuk meg. Ekkor a $q_R(\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n, m_R)$ függvény minimumát kell kiszámítani a következő egyenletrendszerből

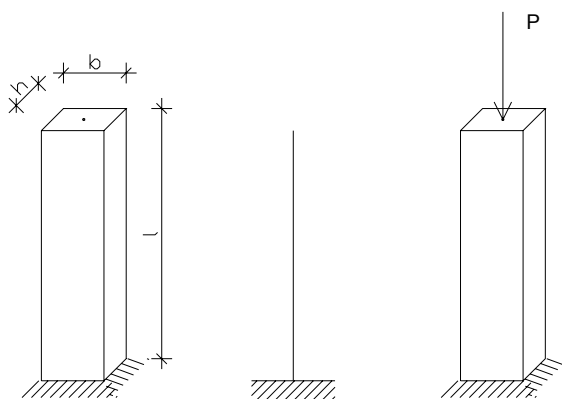
$$\frac{\partial q_R}{\partial \lambda_1} = 0; \quad \frac{\partial q_R}{\partial \lambda_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial q_R}{\partial \lambda_n} = 0.$$

Ez a megoldás az adott vasalású lemez törőterhének felső korlátját adja.

6. Keretszerkezet

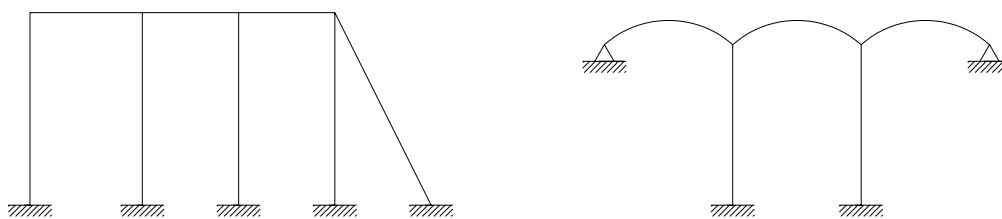
6.1. Definíciók

Az oszlop definíciója: Az oszlop vonalas tartószerkezet, két keresztmetszeti mérete (h , b) lényegesen kisebb, mint a harmadik, a tartószerkezet hossza (l). Az oszlopot számottevő normálerő terheli, a gravitációval párhuzamos erők az oszlop tengelyével párhuzamosan hatnak (45. ábra). Önálló oszlopokkal ritkán találkozunk a gyakorlatban, az oszlop általában keretszerkezet egyik eleme.



45. ábra Oszlop definíciója

A keret definíciója: A keret tetszőleges irányú egyenes vagy görbe tengelyű rudakból összekapcsolt szerkezet. Egyenes tengelyű rudakból, azaz függőleges oszlopokból és vízszintes gerendákból összekapcsolt szerkezeteket kereteknek (46. ábra) nevezzük. A görbetengelyű rudakból álló szerkezetek az ívtartók (46. ábra). A gerenda és oszlop csatlakozása sarokmerev, azaz egy csomópontban találkozó rúdvégek valamely külső hatás következtében előálló szögelfordulása és eltolódása azonos.

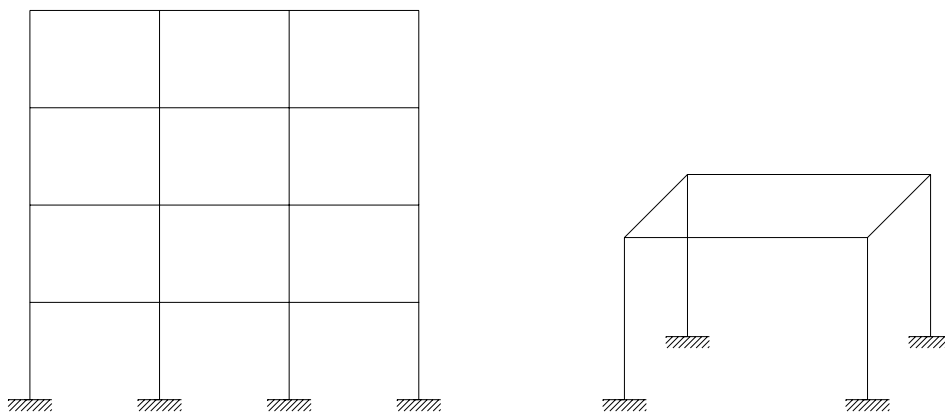


46. ábra Keret definíciója, egyenes rudakból álló keret és ívtartó

Keretek osztályozása [Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája, Műegyetem Kiadó 2006.] felhasználásával:

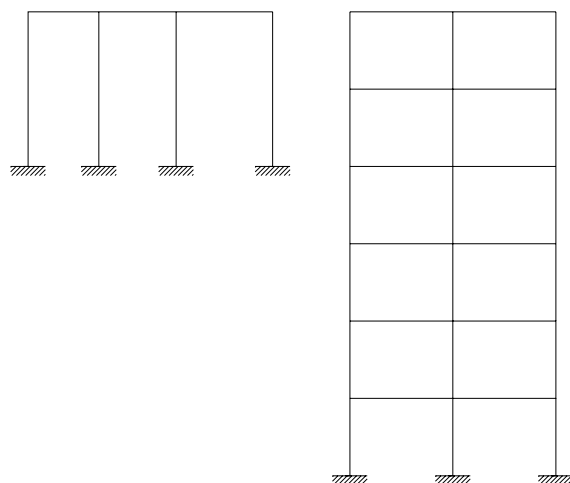
Elrendezés szerint:

Síkbeli és térbeli keretek (47. ábra): A térbeli kereteket sok esetben síkbeli keretekkel közelítik, modellezik. Ebben az esetben külön figyelmet kell fordítani a síkbeli keretek közötti teherelosztásra (Lásd Teherelosztás).



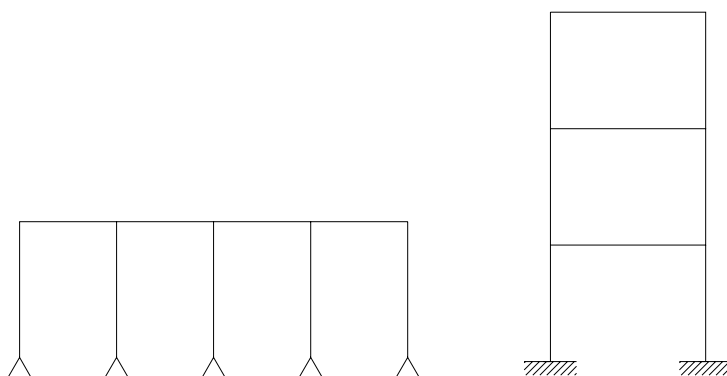
47. ábra Síkbeli és térbeli keret

Egyszintes és többszintes keretek (48. ábra): A gyakorlatban a többszintes keretek az elterjedtek. Az ipari csarnokok általában egyszintes keretek.



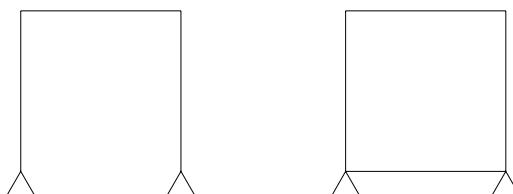
48. ábra Egyszintes (többhajós) és többszintes (többhajós) keret

Egyhajós és többhajós keretek (Egy- és többnyílású keretek) (49. ábra): A gyakorlatban legtöbbször többhajós keretekkel találkozunk, de többszintes keretek esetén az egyhajós szerkezetek is elterjedtek.



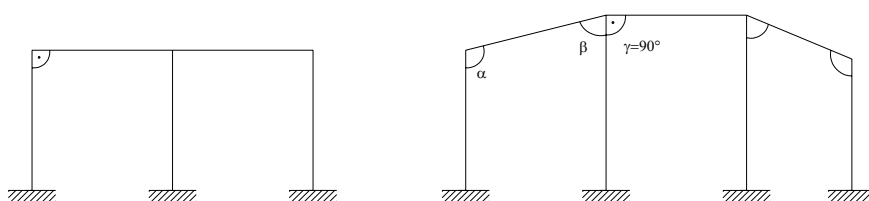
49. ábra Többhajós (egyszintes) és egyhajós (többszintes) keret

Nyitott vagy zárt keretek (50. ábra): A vasbetonból készült keretek általában nyitott keretek, zárt keretekkel ritkán találkozunk.



50. ábra Nyitott keret és zárt keret

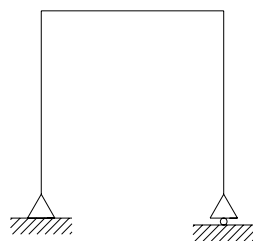
Derékszögű és ferdeszögű keretek (51. ábra): Kapcsolódó rúdelemek egymással bezárt szöge derékszög vagy attól eltérő.



51. ábra Derékszögű és ferdeszögű keret

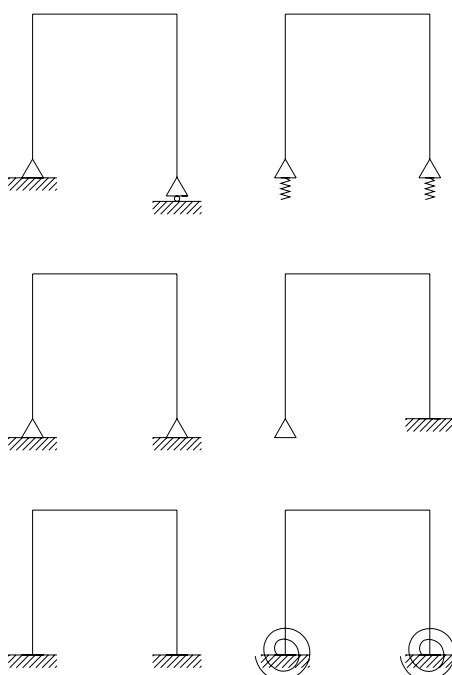
Statikai szempontból:

Statikailag határozott és statikailag határozatlan keretek: Egyszintes, egyhajós csuklós-görgős megtámasztású szerkezeteket (52. ábra) kivéve a keretszerkezetek statikailag többszörösen határozatlan szerkezetek.



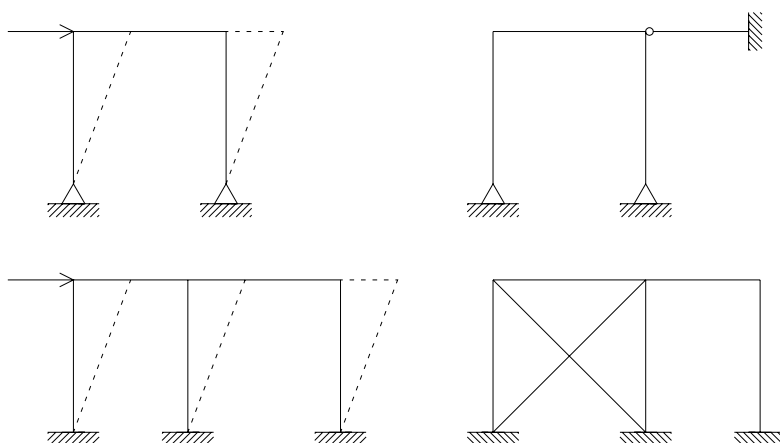
52. ábra Statikailag határozott keret

Megtámasztási mód (53. ábra): A keretek megtámasztása lehet csuklós-görgős, kétcsuklós szerkezet, befogott, rugalmas, vegyes megtámasztás.



53. ábra Megtámasztási módok

Kilendülő és nem kilendülő keretek (54. ábra): Vízszintes teher hatására elmozduló kereteket kilendülő kereteknek nevezzük. A kilendülő kereteket vízszintes irányban nem támasztja meg szerkezet. A nem-elmozduló keretek, amelyeket vízszintes irányban merevítő szerkezet támaszt meg, a nem kilendülő keretek.



54. ábra Kilendülő és nem kilendülő keret

Statikailag határozatlan keretszerkezetek előnyei és hátrányai:**Előnyök:**

- A statikailag határozott szerkezetekhez képest merevebbek, alakváltozásuk és elmozdulásuk kisebb;
- Az erőjellegű terhekből származó igénybevételek szélső értékei kisebbek, eloszlásuk egyenletesebb;
- Anyag felhasználásuk (beton és betonacél) is kisebb.

Hátrányok:

- Számításuk nehezebb;
- Kinematikai terhek hatására (hőmérsékletváltozás, gyártási mérethiba, támaszmozgás) igénybevételek keletkeznek a tartóban.

6.2. Keretek igénybevételeinek számítása

A keretekre függőleges (önsúly, hasznos, hó stb.), vízszintes (szél, földrengés) és kinematikai teher (hőmérsékletváltozás, méretpontatlanság, stb.) hat.

6.2.1. Keretek pontos számítása

A statikailag többszörösen határozatlan tartók megoldásánál is feltételezzük a következőket:

- A keret anyaga homogén, izotróp, lineárisan rugalmas, azaz követi a Hooke-törvényt;
- A terheletlen állapotban a keret feszültségmentes;
- A keret rudak alkotják, amelyeknek két keresztmetszeti mérete (b és h) a harmadik mérethez (rúd hossza l) képest elhanyagolható;
- Érvényes a Bernoulli-Navier hipotézis, azaz a középsík valamely pontjának normálisán lévő pontja alakváltozás után is ugyanazon a normálison marad;
- A két rúd csatlakozása tökéletesen sarokmerv, nyomatékíró.

A statikailag többszörösen határozatlan szerkezetek számítása történhet erőmódszerrel és elmozdulásmódszerrel. A két módszer alapelve, számításának lépései és mintapéldák a [Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája, Műegyetem Kiadó 2006] tankönyv 5. és 6. fejezetben találhatók.

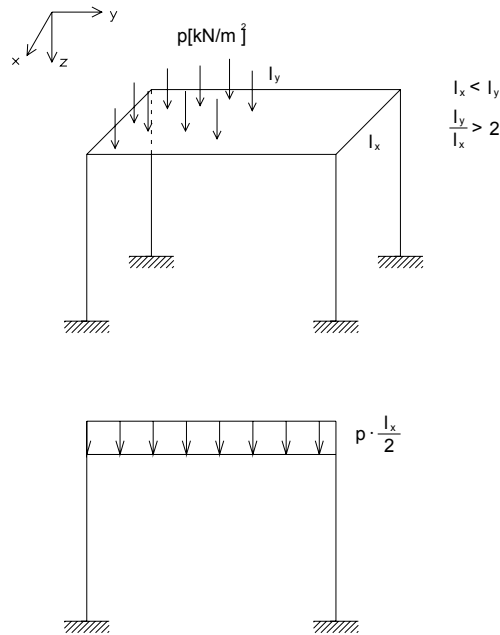
Az ott bemutatott mintapéldák alapján is jól látható, hogy statikailag sokszorosán határozatlan keretek kézi számítása nehézkes, időigényes. A számításoknál az egyszerűség kedvéért feltételeztük, hogy a keretek síkbeliek és rudak nyújthatatlanok. A kereskedelmi forgalomban kapható keretszámító programok és végeelem programok segítségével a síkbeli és a térbeli keretek igénybevételei rövid előkészítés után gyorsan megkaphatók. A gépi számításnál nem kell feltételezni, hogy a rudak nyújthatatlanok. A mátrix-elmozdulásmódszeren alapuló gépi számítás matematikai alapjait és síkbeli keretekre történő alkalmazását a [Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája, Műegyetem Kiadó 2006] tankönyv 7. fejezete foglalja össze. A végeelem módszeren alapuló gépi számítás alapjai és alkalmazásai a [Bojtár Imre-Gáspár Zsolt: Végeelem módszer építőmérnököknek, Terc Kiadó, 2003] tankönyv különböző fejezeteiben találhatók.

A keretek méreteinek felvételéhez, a statikai váz kialakításához a gépi számítás előkészítéséhez és ellenőrzéséhez közelítő számítások szükségesek. A közelítő számításoknak gyorsnak és megfelelően pontosnak kell lenniük. A közelítő számításokat minden esetben síkbeli kereteken célszerű végezni.

6.2.2. Keretek közelítő számítása függőleges teherre

Tehelosztás

A térbeli kereteket a közelítő számítások elvégzéséhez síkbeli keretekre kell bontani. Ha a keretgerendákra támaszkodó lemezek egyirányban teherviselők, akkor a (lemez hosszabbik irányával párhuzamos) keretekre átadódó terhek kéttámaszú átvitelrel határozhatók meg (55. ábra).



55. ábra Kéttámaszú átvitel egyirányban teherviselő lemez esetén

Ha a keretgerendákra támaszkodó lemezek kétirányban teherviselők, akkor a keretekre átadódó terheket a lemezek törésvonala alapján célszerű számolni. Közelítő számítások esetén a sarokpontból szögfelezőként kiinduló törésvonalat feltételezhetünk (56. ábra).

Közelítő méretfelvétel

A keretek gerendáinak méretfelvételénél azzal a közelítéssel élhetünk, hogy a szélső gerenda befogott-megtámasztott, míg a közbenső gerenda kétoldalon befogott (57. ábra). A képlékeny nyomatékátrendezést figyelembe véve a támasz feletti (M) és a mezőközépi (M^+) hajlítónyomaték azonosnak tekinthető

$$M^+ = M^- = \frac{\bar{q}\bar{l}}{11,6}, \text{ ahol}$$

\bar{q} a nyílásokra ható esetleges teher átlaga (57. ábra szerint $\bar{q} = \frac{q_1 + q_2}{2}$),

\bar{l} a nyílások támaszközének átlaga (57. ábra szerint $\bar{l} = \frac{l_1 + l_2}{2}$).

A keret oszlopának méretfelvételénél csak a nyomóerőt vesszük figyelembe. Az oszlop keresztmetszeti területének szükséges feltétele

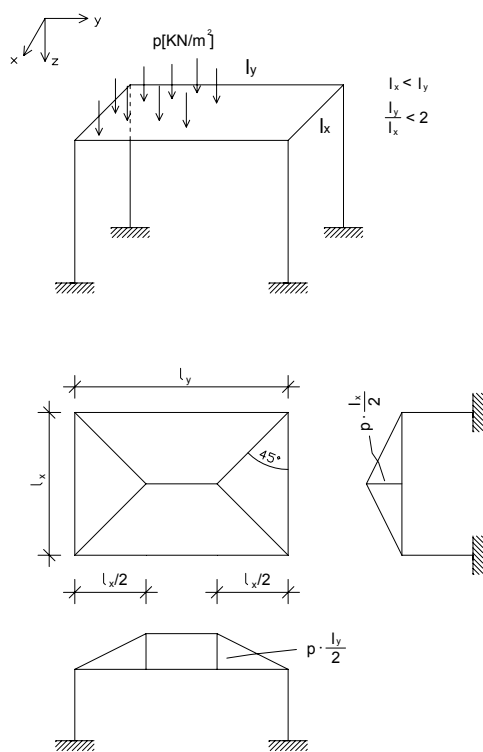
$$f_{cd} \geq \frac{N}{A_c}, \text{ ahol}$$

f_{cd} a betonszilárdság tervezési értéke,
 N oszlopra ható normál erő, melyet közelítőleg a 57. ábra jelöléseivel számolva

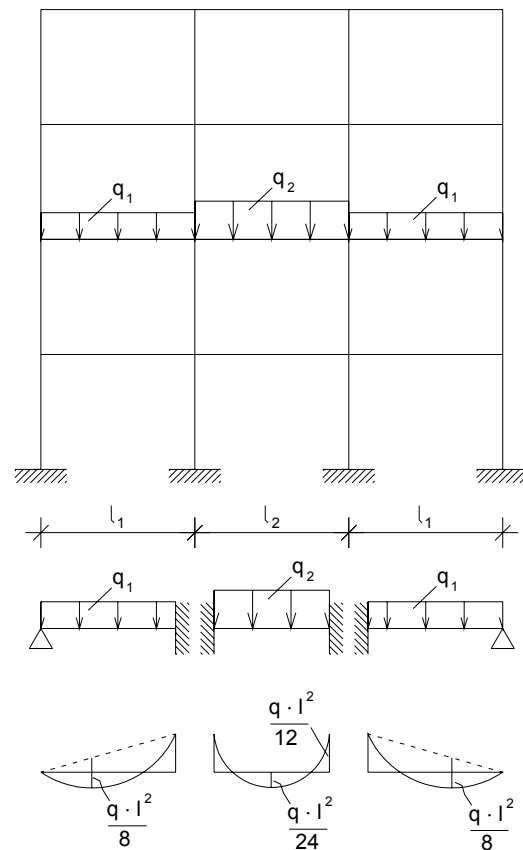
$$N = \frac{q_1 l_1}{2} + \frac{q_2 l_2}{2},$$

A_c az oszlop befoglaló méretének területe.

Célszerű, esztétikus és könnyen zsálužható, ha az oszlop egyik (vagy mindkét) oldalát az adott oldalhoz csatlakozó gerenda szélességével megegyezően vesszük fel.



56. ábra Teherelosztás kétirányban teherrelő lemez esetén

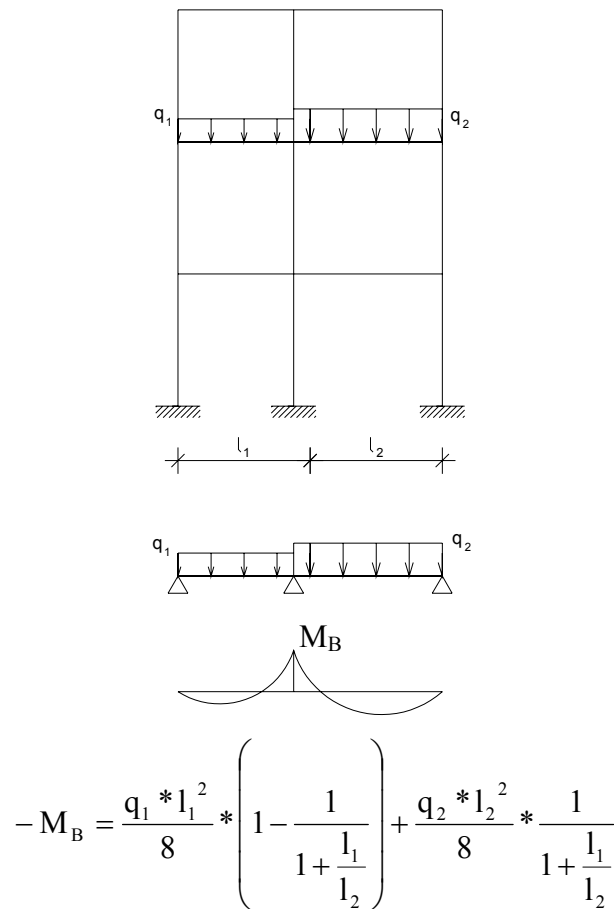


57. ábra Keretgerenda igénybevételeinek közelítő számítása a méretfelvételhez

Közelítő számítás

A keret gerendája többtámaszú gerendaként közelíthető (58. ábra) és a hajlítónyomatékokat e szerint határozzuk meg. Háromtámaszú tartó esetén a hajlítónyomatékok a 58. ábrán láthatók.

A keret oszlopainak számításánál helyettesítő keret célszerű alkalmazni (59. ábra), melyet a legkönnyebben elmozdulás-módszerrel vagy nyomatékosztás módszerének alkalmazásával oldhatunk meg. A 59. ábrán merev (tökéletes) befogásokat jeleztem. E befogások a valóságban nem befogottak és nem is csuklósak, hanem rugalmasan befogottaknak tekinthetők, ami a csomópont merevségétől függ. A csomóponti merevség függ a csomópontoz kapcsolódó rudak inerciájától, fesztávjától, a másik oldali befogás viszonyaitól. A közelítő számításnál ezt elhanyagoljuk, és merev befogást tekintünk, a gerendát csökkentett (általában felére csökkentett) inerciával vesszük figyelembe.



58. ábra A keretgerenda igénybevételeinek közelítő számítása töbtámaszú tartóval

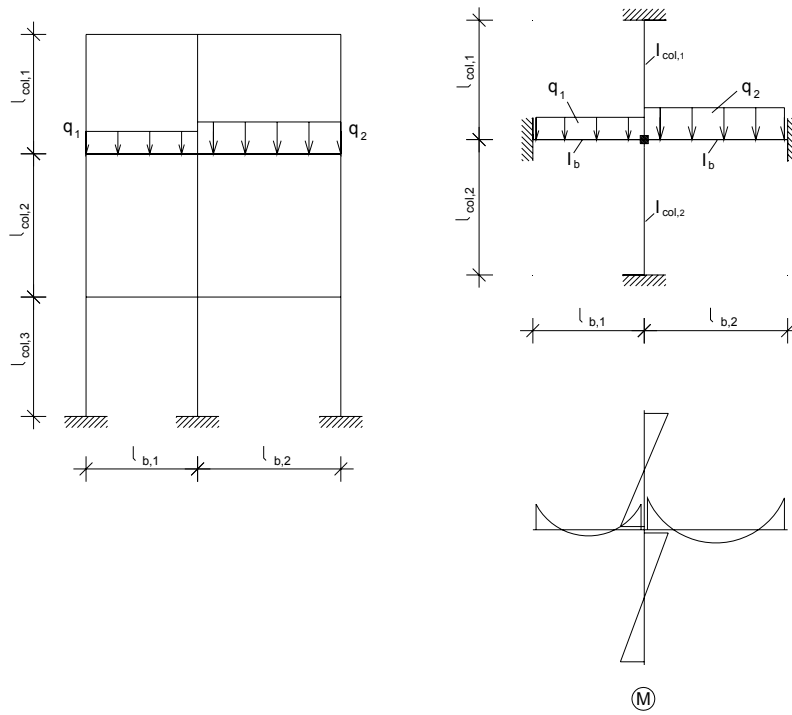
Keretek mértékadó leterhelése

A keretek pontos számítása, mint a fejezet elején összefoglaltuk általában számítógépes programokkal történik. Az előkészítő munka fontos lépése a mértékadó leterhelések meghatározása. A mértékadó leterhelések meghatározásához a hatásábrák megszerkesztése nyújt segítséget. Keretek esetén legcélszerűbbnek a kinematikai hatásábra szerkesztés tűnik. A módszer lényegét, számításának lépéseit [Kurutzné Kovács Márta: Tartók statikája, Műegyetem Kiadó 2006] tankönyv is tartalmazza. A legfontosabbak:

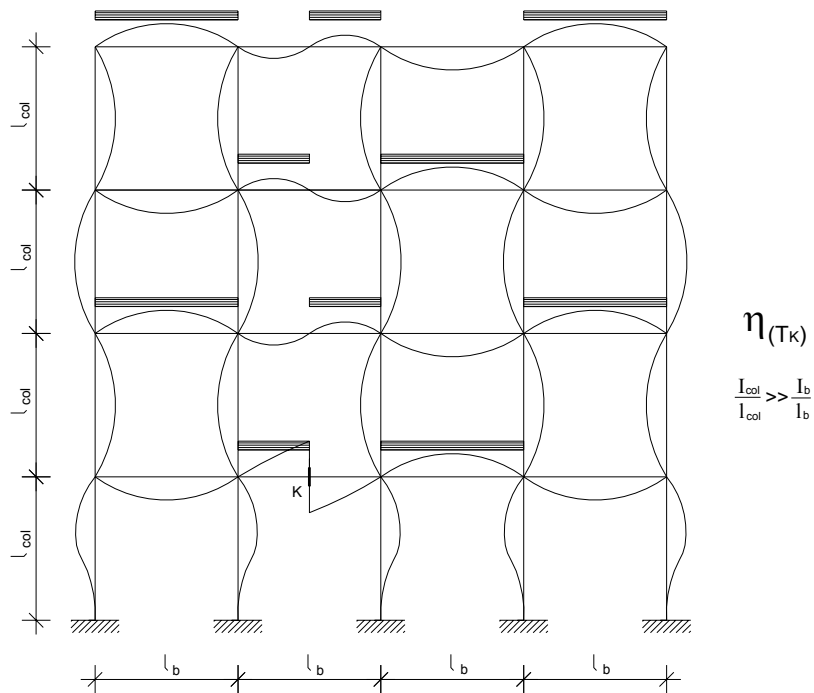
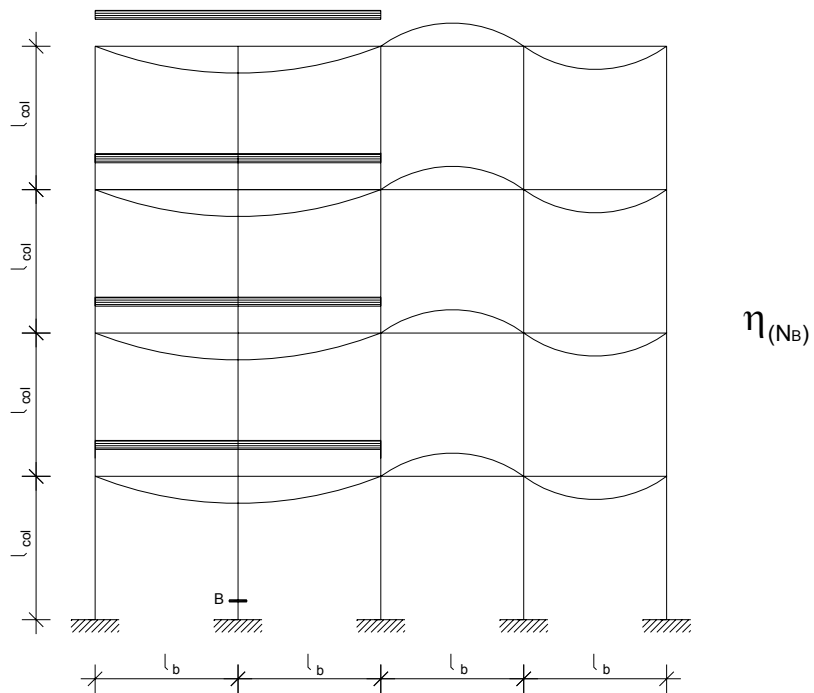
1. A vizsgált keresztmetszetben a rúdszerkezetet elvágom;
2. A igénybevételnek megfelelő egységnyi alakváltozást iktatok be;
3. Felrajzolom az egységnyi alakváltozás után létrejövő alakot.

A 60. ábrán néhány jellegzetes kinematikai hatásábrát mutatunk be. Felhívjuk a figyelmet, hogy a hatásábrák szerkesztésénél az oszlop és a gerenda egymáshoz viszonyított merevségét figyelembe kell venni.

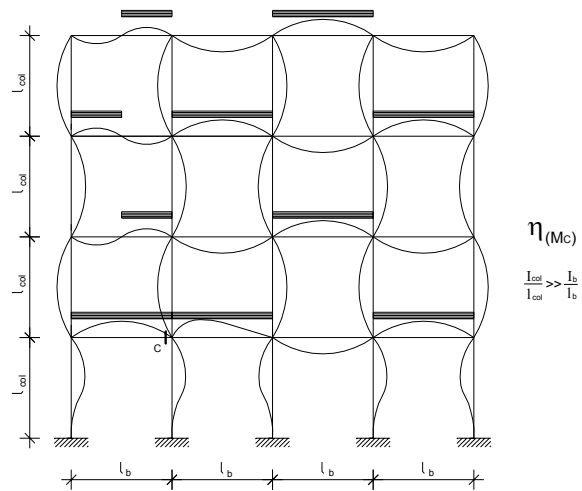
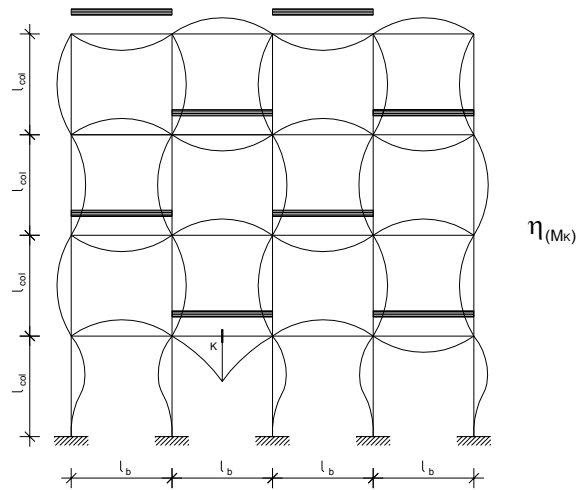
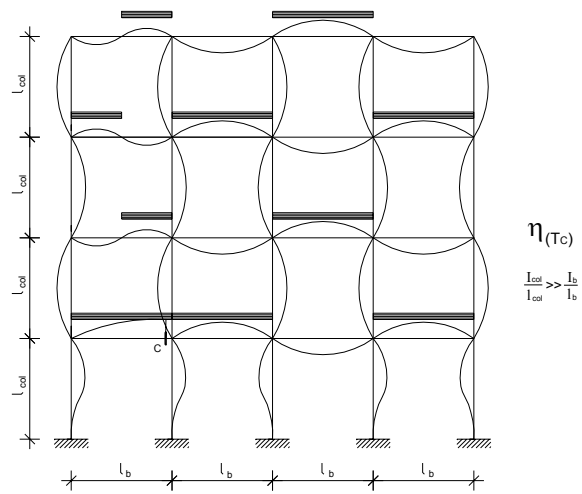
A 60. ábrán a hatásábrákon megadtuk a mértékadó leterheléseket is.



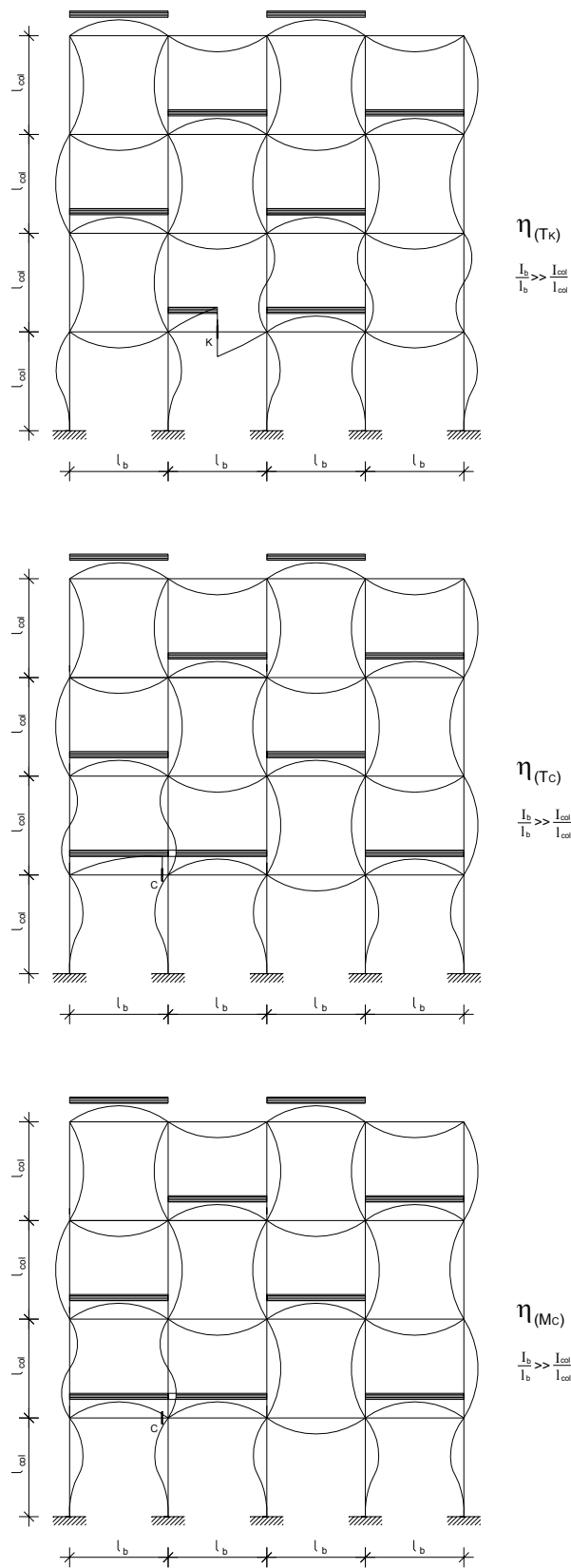
59. ábra A keretoszlopok közelítő számítása



60. ábra Keret hatásábrái I.



60. ábra Keret hatásábrái II.



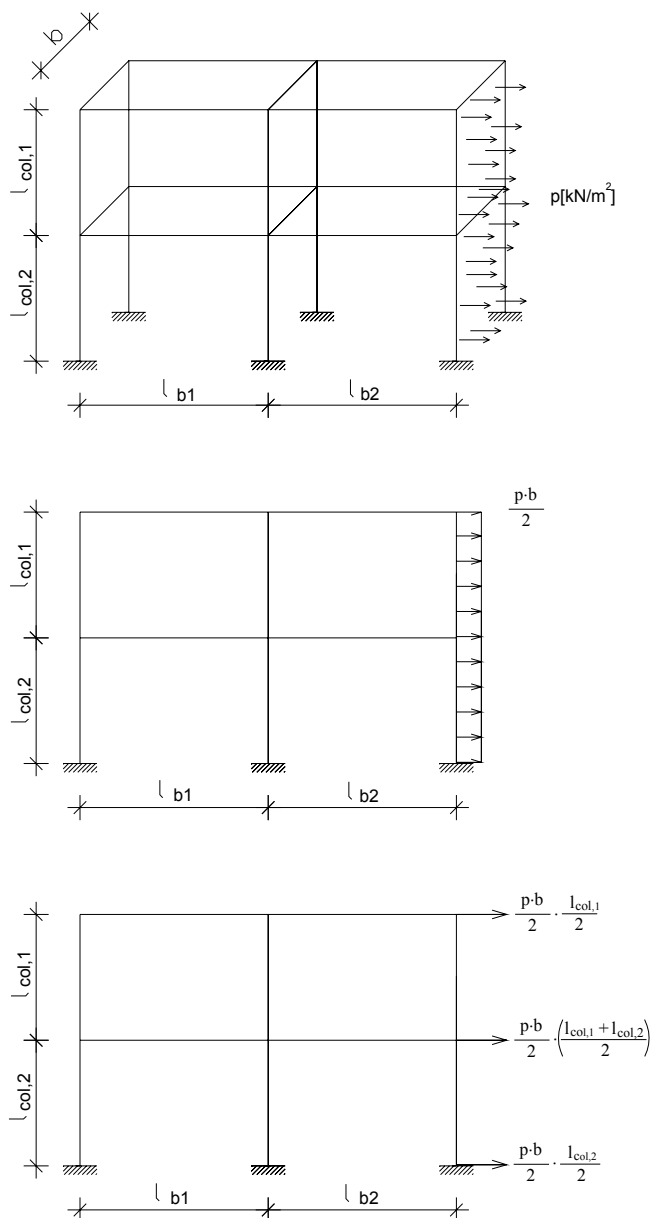
60. ábra Keret hatásábrái III.

6.2.3. Keretek közelítő számítása vízszintes teherre

A keretszerkezetre ható vízszintes terhek a szélteher, a földrengés teher és az épület globális ferdeségéből származó vízszintes erő.

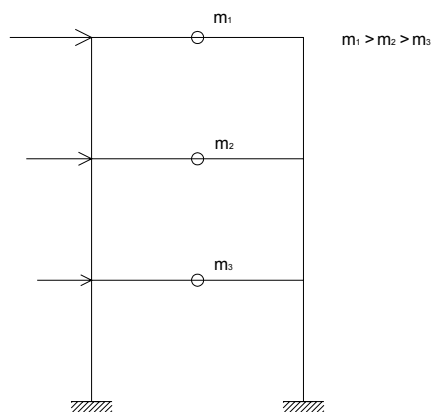
Terhek meghatározása, teherelosztás

A szélteher felületen megoszló teher. Térbeli keretek esetén a síkbeli keretekre történő redukálás a kéttámaszú átvitel történik. Kéttámaszú átvitelt alkalmazunk a csomópontra történő redukálás esetén is (61. ábra).



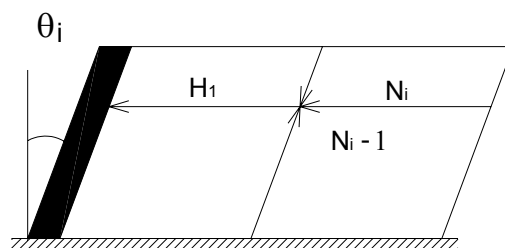
61. ábra Vízszintes terhek esetén a kéttámaszú átvitel alkalmazása

A földrengés hatására az épületek mozgásba jönnek, az épületszerkezetekre a tömegükkel és a gyorsulásukkal arányos tehetetlenségi erők hatnak. A földrengésre történő méretezés visszavezethető földrengésre történő teherre való vizsgálatra. A földrengési hatásokból keletkező erők meghatározása a Magasépítési vasbetonszerkezetek tantárgy témája, megoszlása a 62. ábrán látható.



62. ábra Földrengés teher modellezése

Az épület globális ferdeségéből származó vízszintes erő oka, hogy az építési pontatlanságok miatt a tartószerkezet geometriája eltér a tervezettől. Ezt a pontatlanságot az oszlopok méretezésénél és az igénybevételek számításánál is figyelembe kell venni. Többszintes épületek esetén a ferdeségből származó vízszintes erő számítása az EUROCODE előírásai alapján történik [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média Kiadó, 2007.]. Biztonság javára történő közelítés (63 ábra):

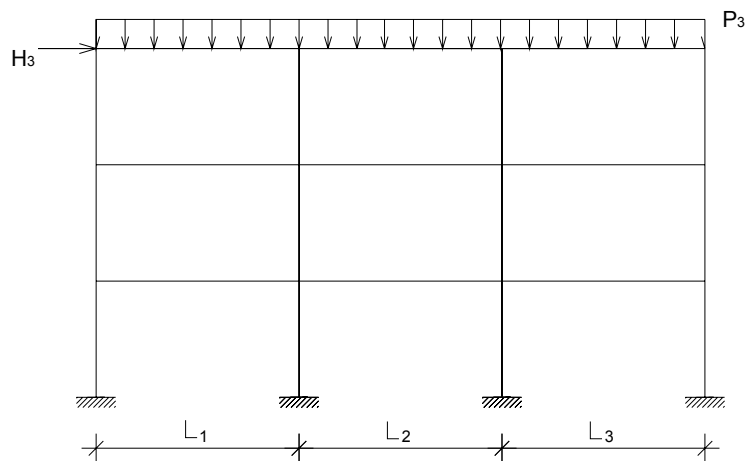


63. ábra Globális ferdeségből származó vízszintes erő definíciója

$$H_i = \frac{N_i - N_{i-1}}{200}, \text{ ahol}$$

H_i a keret i . szintjén ható vízszintes erő,
 N_i és N_{i-1} a keret i . szintjén a belső erők (normálerők).

A képlet q_3 megoszló erővel terhelt keretszerkezet 3. szintjén a ferde külpontos erő (64. ábra)



64. ábra Globális ferdeségből származó vízszintes eő számítása megeoszló teher esetén

$$H_3 = \frac{p_3 \sum_j L_j}{200}$$

Pontosabb számítás képlete

$$H_i = \theta_i (N_i - N_{i-1}), \text{ ahol}$$

θ_i i. szint ferdesége

$$\theta_i = \alpha_n \alpha_m \theta_0, \text{ ahol}$$

$\theta_0 = 1/200$ ferdeség alapértéke,

$\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{l}}$ az épület teljes magasságától (l) függő tényező, és

$$2/3 \leq \alpha_n \leq 1,$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m} \right)}, \text{ egy szinten lévő oszlopok számától } (m)$$

függő tényező.

Méretfelvétel

A vízszintes terheket az oszlop és a gerenda méretfelvételénél nem vesszük figyelembe.

Közelítő számítás

A kinematikai hatásabrák előállításánál láttuk, hogy a gerenda és az oszlop merevségének egymáshoz képesti aránya lényegesen befolyásolja a szerkezet alakváltozását.

Az első eset, ha az oszlopok jóval merevebbek a gerendáknál, $\frac{I_b}{l_b} \ll \frac{I_{col}}{l_{col}}$, ahol

I_b és I_{col} a gerenda és az oszlop inercianyomatéka, a betonkeresztmetszet méreteivel számolva,

l_b és l_{col} a gerenda és az oszlop hossza.

Ez igen ritkán alakul ki, általában 2-4 szintes épületek esetén találunk ilyen merevség eloszlást.

Ebben az esetben a vízszintes erők hatására a keretet alkotó oszlopok tetőponti eltolódása azonos, és a gerendák közepén inflexiós pont alakul ki (65. ábra). Ekkor keret konzollokkal helyettesíthető (egy oszlop = egy konzol), a konzolokra ható erő

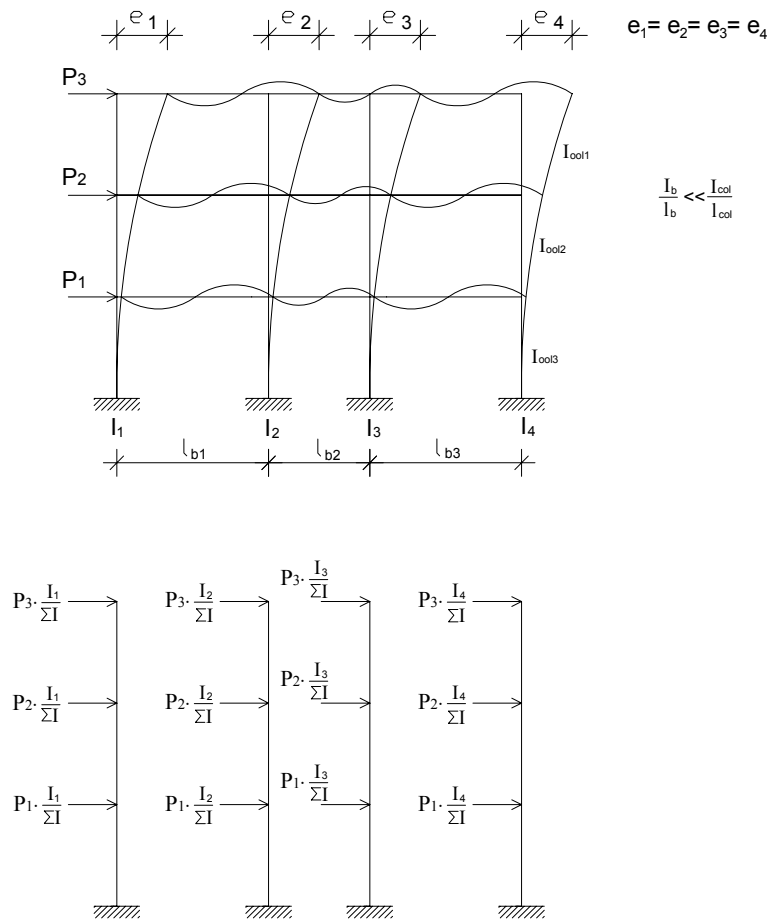
$$P_{i,j} = P_i \frac{I_j}{\sum_k I_k}, \text{ ahol}$$

$P_{i,j}$ az i. szinten a j. oszlopra ható erő,

P_i az i. szintre ható teher,

I_j az j. oszlop inercianyomatéka (a beton keresztmetszetéből számolva),

I_k tetszőleges oszlop inercianyomatéka (a beton keresztmetszetéből számolva).



65. ábra Konzol módszer alkalmazása, ha $\frac{I_b}{l_b} \ll \frac{I_{col}}{l_{col}}$

Az oszlopokban keletkező hajlítónyomaték megegyezik a fenti módon terhelt konzolok hajlítónyomatékával.

A második eset, ha gerenda jóval merevebb, mint az oszlop, $\frac{I_b}{l_b} \gg \frac{I_{col}}{l_{col}}$, ahol

I_b és I_{col} a gerenda és az oszlop inercianyomatéka, a
betonkeresztmetszet méreteivel számolva,
 l_b és l_{col} a gerenda és az oszlop hossza.

Ebben az esetben, az inflexiós pontok az oszlopokban alakulnak ki. Feltételezzük, hogy az inflexiós, vagy nyomatéki nullpontok az oszlopok közepén jönnek létre, azaz az oszlop felső és alsó végén keletkező befogási nyomatékok értéke azonos. Feltételezzük továbbá, hogy a gerendák hossza (nyílások szélessége) nyílásonként közel azonos. E feltételek mellett a vízszintes erőknek a képzelt csuklókon felvett valamely átmetszésre ható eredője az oszlopmerevségek arányában számítható (66. ábra)

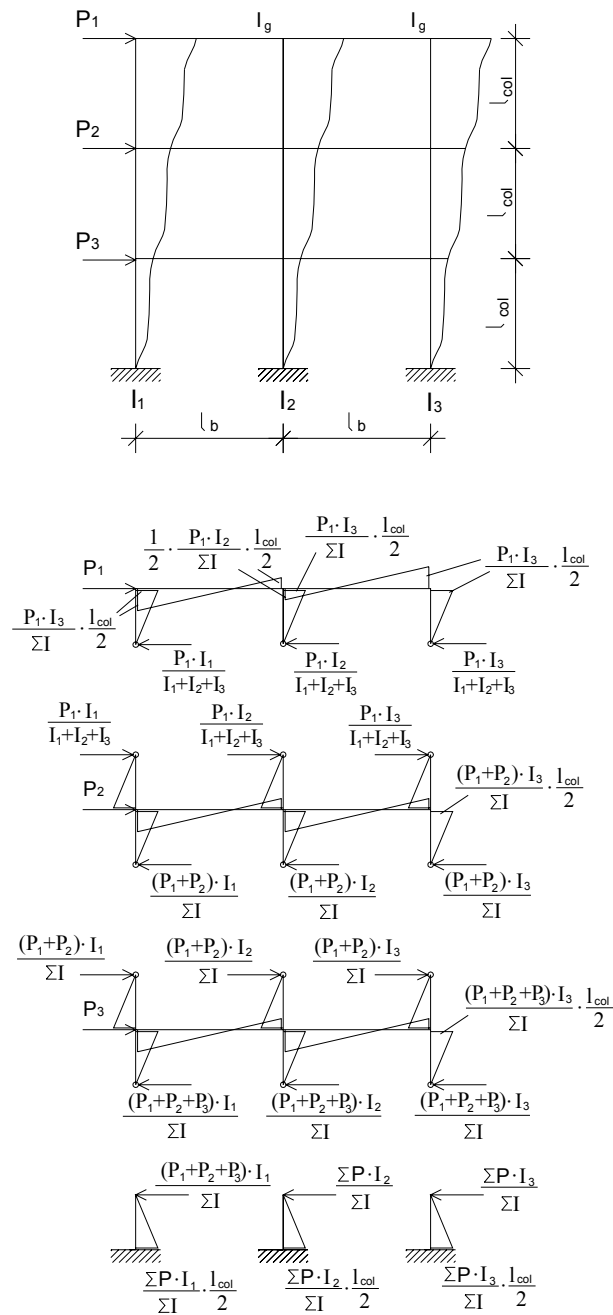
$$R_{ij} = P_i \frac{I_j / l_j}{\sum_k I_k / l_k}, \text{ ahol}$$

$R_{i,j}$ az i. szint alatt a j. oszlopra közepén felvett csuklón kialakuló eredője,
 P_i az i. szintre ható teher,
 I_j az i. oszlop inercianyomatéka (a beton keresztmetszetéből számolva),
 l_j az i. oszlop hossza (magassága),
 I_k tetszőleges oszlop inercianyomatéka (a beton keresztmetszetéből számolva),
 l_k tetszőleges oszlop hossza (magassága).

Ha az oszlopok magassága – általában – egy szinten azonos, a fenti képlet tovább egyszerűsödik

$$R_{ij} = P_i \frac{I_j}{\sum_k I_k}.$$

A gerendák támaszponti hajlítónyomatékainak meghatározásához feltesszük, hogy a csomópontba befutó oszlopnyomatékok összege a gerendák között a gerendák merevsége arányában oszlik meg.



66. ábra Keretek alakváltozása, szintekre bontása és a vízszintes erők nagysága, ha

$$\frac{I_b}{l_b} \gg \frac{I_{col}}{l_{col}}$$

Ha a gerendák hossza nyílásonként lényegesen eltér és az oszlopok merevsége azonos, akkor a Portál-módszert célszerű használni. A Portál-módszer lényege, hogy keretet nyílásonként, az inflexiók ponton csuklót feltételezve kapukra ossza (67. ábra).

Egy kapura jutó teher

$$P_{ij} = P_i \frac{l_{bj}}{\sum_k l_{bk}}$$

$P_{i,j}$ az i. szinten a j. nyílásra (portálra) ható erő,

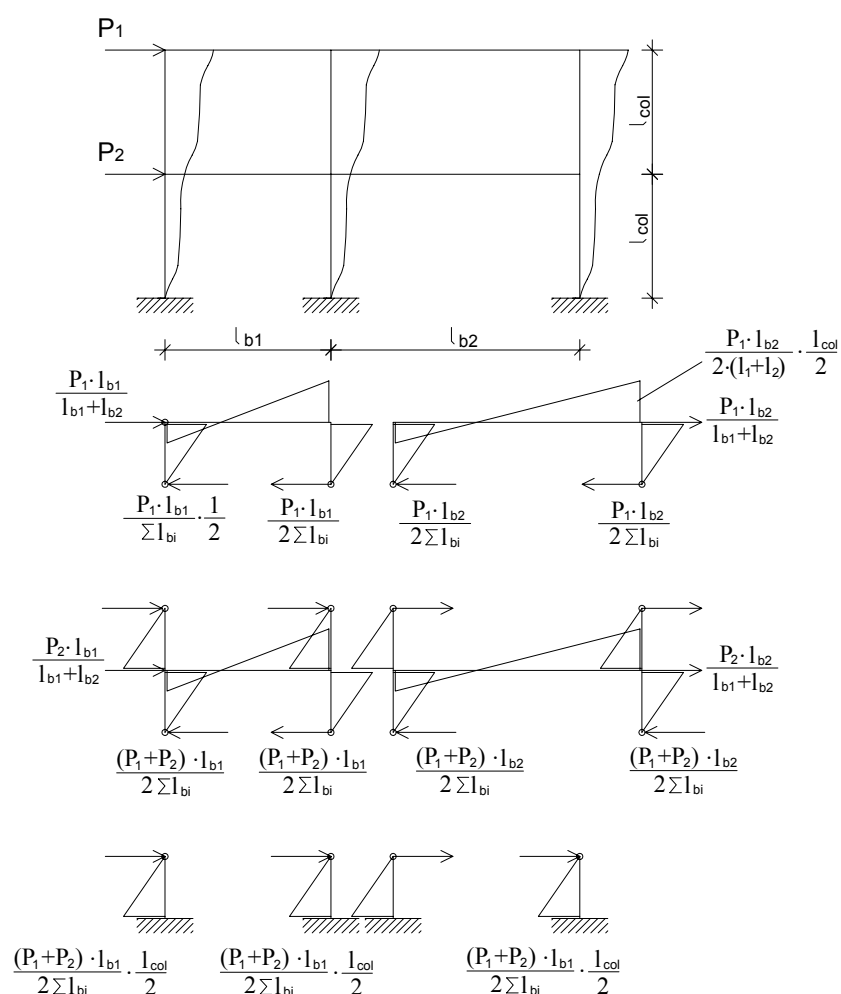
P_i az i. szintre ható teher,

l_{bj} az j. gerenda hossza,

l_{bk} tetszőleges gerenda hossza.

A közbelső oszlopokon keletkező igénybevételeket összegezni kell.

A hajlítónyomatéki ábrából a keret további igénybevétel ábrái (normálerő és nyíróerő) meghatározhatók.



67. ábra Portál-módszer

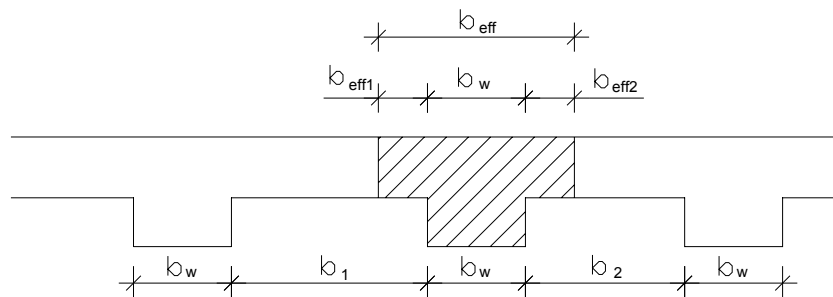
7. Keretek méretezése

Az előző pontban meghatároztuk a keretek igénybevételeit függőleges és vízszintes teherre. A számítások következő lépése, a mértékadó keresztmetszetek igénybevételeinek figyelembevételével a keretet alkotó gerendák és oszlopok méretezése. Külön figyelmet kell fordítani a keretsarkok méretezésére.

7.1. Gerendák méretezése

A gerendák méretezésével, vasalásának kialakításával a Vasbetonszerkezetek I. tantárgyban részletesen foglalkoztunk.

Ha a keret gerendája a lemezszerkezet alátámasztó gerendája, akkor a lemezzel együttműködő részt is figyelembe kell venni (T keresztmetszet). *EUROCODE előírása alapján* [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint, Terc Kiadó 2006] az együttműködő szélesség (68. ábra)



68. ábra Együttműködő szélesség definíciója

$$b_{eff} = b_w + b_{eff1} + b_{eff2}, \text{ ahol}$$

b_w a gerenda szélessége

b_{effi} a kinyúló rész hossza, $i=1$ vagy $i=2$

$$b_{effi} = \min \left\{ \begin{array}{l} b_i / 2 \\ 0.2l_0 \\ 0.1b_i + 0.1l_0 \end{array} \right\}, \text{ ahol}$$

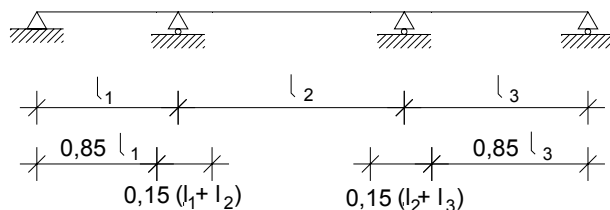
b_i két gerenda széle közötti távolság,

l_0 a nyomatéki zéruspontok közötti távolság.

A nyomatéki zéruspontok közötti távolság egyszerűsítve számolható (69. ábra), ha teher a teher tartó hossza mentén közel egyenletes, ha a támaszközök aránya a 2/3 és 3/2 között van.

$l_0 = 0.7l_i$ belső támaszköz esetén,

$l_0 = 0.85l_i$ szélső támaszköz esetén.

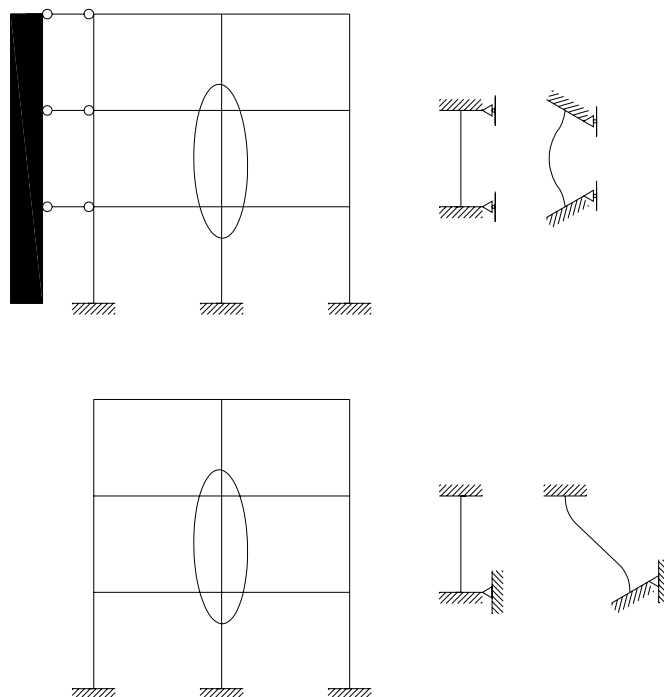


69. ábra Nyomatéki zéruspont definíciója

7.2. Oszlopok méretezése

Az oszlopokat a hajlítónyomatékkal egyidőben jelentős nagyságú nyomóerő is terheli, azaz az oszlopok külpontosan nyomott szerkezetek. Vasbetonszerkezetek I. tantárgy keretében foglalkoztunk a külpontos normálerővel terhelt keresztmetszetek teherbírásának vizsgálatával.

Az oszlopok méretezése esetén a teherbírásvizsgálatot ki kell egészíteni stabilitásvizsgálattal, mert az oszlopok stabilitásvesztéssel is tönkremehet. Az oszlopok vizsgálatánál figyelembe kell venni, hogy a deformációk többletigénybevételeket okoznak (70. ábra).

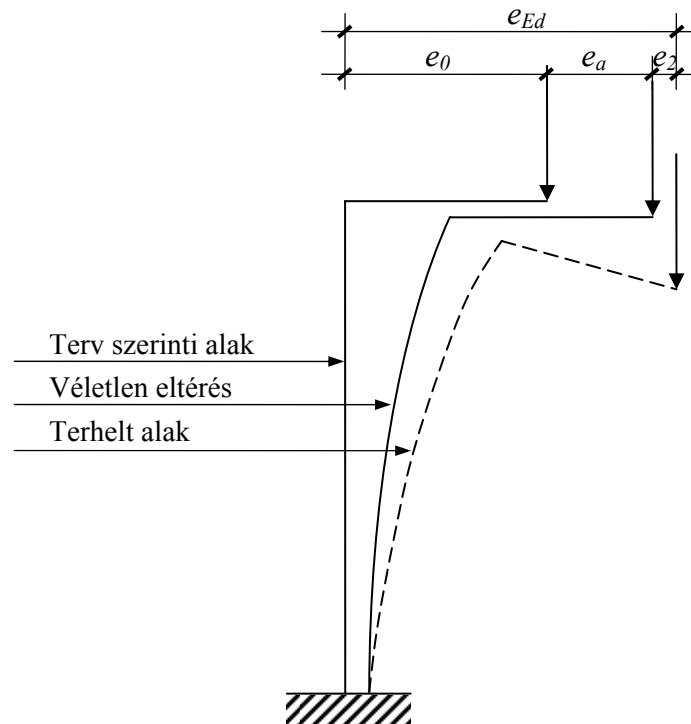


70. ábra Nem kilendülő és kilendülő keret belső oszlopának deformációja vízszintes teherre

A nyomóerőből (N_{Ed}) a tervszerinti (elsőrendű) külpontosságból (e_0) származó nyomaték (M_0) a tartó hossza mentén állandó

$$M_0 = N_{Ed} e_0.$$

Az oszlopok kezdeti külpontosságát az építési pontatlanságából (e_a) és az oszlopok terhek hatására bekövetkező – a kúszást is figyelembe vevő – görbületét (e_2) (másodrendű hatás) is tartalmazó külpontosság-növekményekkel meg kell növelni (71. ábra). A külpontosság-növekményt a legkedvezőtlenebb irányban kell figyelembe venni. A legkedvezőtlenebb irányt számítással kell meghatározni.



71. ábra A külpontosság-növekmények értelmezése [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint, Terc Kiadó 2006]

Oszlopok– általában igen karcsú oszlopok – esetén előfordulhat, hogy a szilárdsági tönkremétel előtt a tartó elveszti stabilitását. Emiatt fontos a tartók kihajlási hosszának ismerete.

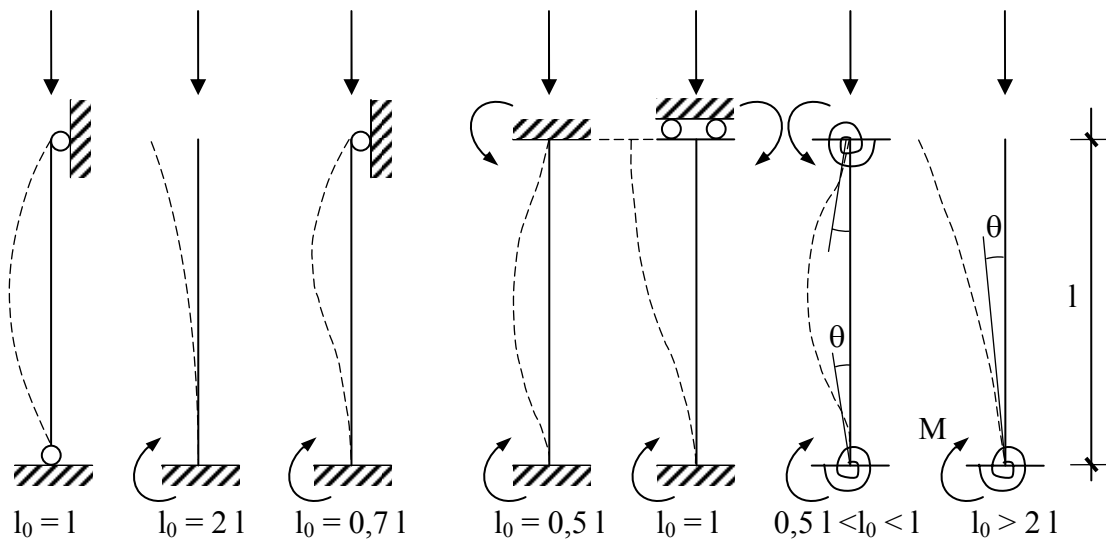
Egyedi oszlopok kihajlási hossza (l_0) a 72. ábrán látható. A kihajlási hossz ismeretében a kritikus erő (Euler, 1744)

$$N_{krit} = \frac{\pi^2 E_c I_0}{l_0^2}, \text{ ahol}$$

E_c a beton rugalmassági modulusa,

I_c az oszlop inercianyomatéka a betonkeresztmetszet méreteiből számítva,

l_0 az oszlop kihajlási hossza (72. ábra).



72. ábra Egyedi oszlopok kihajlási hossza [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint, Terc Kiadó 2006]

A vasbeton keretek oszlopai nem a 72. ábrán bemutatott módon vannak megtámasztva. Az oszlopok és gerendák alkotta csomópontok a keret részeként elfordulnak és ha a keret kilendülő, akkor el is tolódnak (70. ábra). A keret egy oszlopának kihajlási hossza meghatározható, ha valamilyen szerkezetszámító számítógépes programmal meghatározzuk a kihajlást okozó kritikus erőt (N_{krit}). A kritikus erő ismeretében a kihajlási hossz (l_0)

$$l_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E_c I_c}{N_{krit}}}, \text{ ahol}$$

- l_0 az oszlop kihajlási hossza,
- E_c a beton rugalmassági modulusa,
- I_c az oszlop inercianyomatéka a betonkeresztmetszet méreteiből számítva,
- N_{krit} a keret kihajlását okozó erő.

A keret komplex stabilitásvizsgálatától eltekinthetünk. A kihajlási hossz számításához feltételezzük, hogy a keret oszlopainak vége rugalmasan befogott, a rugalmas befogás a csomópontokhoz csatlakozó gerendák merevségétől függ. Ha a keret kilendülő, akkor az oszlop vége el is tolódik (70. ábra). A rugalmasan befogott oszlopok kihajlási hosszát az EUROCODE előírása alapján a következőképpen lehet megfelelő pontossággal közelíteni [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint, Terc Kiadó 2006]

Fix csomópontú (nem kilendülő keret) oszlop kihajlási hossza

$$l_0 = 0,5l \sqrt{\left(1 + \frac{k_1}{0,45 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{0,45 + k_2}\right)}$$

Elmozduló csomópontú (kilendülő keret) oszlop kihajlási hossza

$$l_0 = l \cdot \max \left\{ \sqrt{1 + 10 \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} ; \left(1 + \frac{k_1}{1 + k_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{k_2}{1 + k_2}\right) \right\}, \text{ ahol}$$

k_1, k_2 - a rugalmas befogások relatív elfordulási képessége az oszlop végein

$$k = \frac{\sum E_c I_{col} / l_{col}}{\sum E_c \alpha I_b / l_b}$$

$k = 0$ végtelen merev befogás esetén

$k = \infty$ szabad vég esetén

A gyakorlatban kialakított merev befogás esetén $k_{min} = 0,1$ alkalmazható és

E_c	a beton rugalmassági modulusa,
I_{col}	a csomópontba befutó oszlop inercianyomatéka a betonkeresztmetszet méretei alapján számítva,
I_b	a csomópontba befutó gerenda inercianyomatéka a betonkeresztmetszet alapján számítva,
l_{col}	az oszlop elméleti hossza,
l_b	a gerenda elméleti támaszköze,
α	a gerenda tulsó végének befogási viszonyait figyelembe vevő tényező:
$\alpha = 1,0$	ha a gerenda tulsó vége rugalmasan, vagy mereven megfogott,
$\alpha = 0,5$	ha a tulsó vég szabadon elforduló,
$\alpha = 0$	ha konzolgerenda esetén.

A kihajlási hossz ismeretében a külpontosság növekmények számíthatók. Feltételezzük, hogy az oszlopra N_{Ed} központos erő és az oszlop két végén M_{01} és M_{02} hajlítónyomaték hat. Ha a hajlítónyomaték az oszlop hossza mentén lineárisan változik, akkor a jelölések konzekvens használatához feltételezzük

$$|M_{01}| \leq |M_{02}|.$$

A teljes külpontosság (e_{Ed})

$$e_{Ed} = \max \left\{ \begin{array}{l} e_0 + e_a + e_2 \\ \frac{M_{02}}{N_{Ed}} \\ e_{min} \end{array} \right\}, \text{ ahol}$$

Az összefüggésben szereplő külpontosságok számítását az alábbiakban adjuk meg.

A deformálatlan oszlopon számított külpontosság (e_0)

$$e_0 = \frac{M_0}{N_{Ed}}, \text{ ahol}$$

M_0 az oszlop hossza mentén állandó hajlítónyomaték esetén, azaz

$$M_0 = M_{01} = M_{02}.$$

Az oszlop két végén különböző hajlítónyomaték esetén

$$M_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.4M_{02} \\ 0.6M_{02} + 0.4M_{01} \end{array} \right\}.$$

Az építési pontatlanságból származó külpontosság növekmény (e_a)

$$e_a = \theta_l l_0/2, \text{ ahol}$$

θ_l l hosszúságú oszlop ferdesége,

$$\theta_i = \alpha_n \alpha_m \theta_0, \text{ ahol}$$

$\theta_0 = 1/200$ ferdeség alapértéke,

$\alpha_n = \frac{2}{\sqrt{l}}$ az épület teljes magasságától (l) függő tényező, és

$$2/3 \leq \alpha_n \leq 1,$$

$$\alpha_m = \sqrt{0,5 \left(1 + \frac{1}{m} \right)}$$

egy szinten lévő oszlopok számától (m)
függő tényező.

l_0 az oszlop kihajlási hossza.

[Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés
EUROCODE alapján, Springer Média, 2007] ajánlása

$$e_a = l_0/400.$$

A másodrendű nyomatékból keletkező külpontosság növekmény (e_2) számításánál feltételezzük a sinus kihajlási alakot, így

$$e_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{l_0}{\pi} \right)^2, \text{ ahol}$$

l_0 az oszlop kihajlási hossza,

$1/r$ a görbület, amely egyszeresen szimmetrikus, állandó keresztmetszet esetén

$$\frac{1}{r} = K_r K_\varphi \frac{1}{r_0}, \text{ ahol}$$

$$\frac{1}{r_0} = \frac{\varepsilon_{yd}}{0,45 d} \quad \text{kezdeti görbület, ahol}$$

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd}/E_s, \text{ ahol}$$

f_{yd} a betonacél tervezési szilárdsága,

E_s a betonacél rugalmassági modulusa,

d a hasznos magasság,

$$K_r = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{N_u' - N_{Ed}}{N_u' - N_{bal}} \end{array} \right\} \quad \text{a normálerő mértékétől függő}$$

módosító tényező, ahol

$$N_u = f_{cd}bh + A_s f_{yd}, \text{ ahol}$$

f_{cd} a beton tervezési szilárdsága,
 b a beton keresztmetszet szélessége,
 h a beton keresztmetszet magassága,
 A_s a húzott és nyomott betonacél keresztmetszeti területe,

N_{Ed} a keresztmetszetet terhelő normálerő tervezési értéke,

$$N_b = f_{cd}bx_{co}, \text{ ahol}$$

$$x_{co} = \xi_{co}d,$$

$K_\varphi = \max \left\{ \frac{1}{1 + \beta\varphi_{eff}} \right\}$ a kúszás hatását figyelembe vevő tényező, ahol

$$\beta = 0.35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}, \text{ ahol}$$

f_{ck} a beton nyomószilárdságának karakterisztikus értéke,
 λ a rúd karcsúsága, négyszög keresztmetszet esetén $\lambda = \frac{l_0}{h} \sqrt{12}$,

φ_{eff} effektív kúszási tényező, ami megegyezik a kúszási tényező végértékével.

A minimális külpontosság (e_{min}) értéke

$$e_{min} = 200 \text{ mm, ha } h \leq 600 \text{ mm,}$$

$$e_{min} = h/30, \text{ ha } h > 600 \text{ mm.}$$

Az e_a és e_2 külpontosság növekmények közelítő értékei táblázatosan is adottak a kihajlási hossz és a keresztmetszet hasznos magassága függvényében a [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007] tervezési segédletben.

A teljes külpontosság (e_{Ed}) ismeretében a keresztmetszet tervezési hajlítónyomatéka

$$M_{Ed} = N_{Ed} e_{Ed}.$$

A keresztmetszetet a közelítő teherbírasi görbe segítségével ellenőrizhető. A keresztmetszet tervezése esetén a szükséges vasmennyiséget a normált teherbírasi görbesorozat alapján célszerű meghatározni [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007].

Az oszlop vasalásakor a következő szerkesztési szabályokat kell betartani [Huszár-Farkas-Kovács-Szalai: Betonszerkezetek tervezése az EUROCODE szerint, Terc Kiadó 2006]:

- Álló helyzetben betonozott oszlop legkisebb oldalmérete 200 mm, fekvő betonozott oszlop legkisebb oldalmérete 300 mm;
- A derékszögű négyszög keresztmetszet esetén minden sarokba kell vasat tenni, de a vasbetétek egymástól mért távolsága legfeljebb 300 mm;
- Köralakú oszlopokba legalább 6 darab vasat kell elhelyezni;
- A hosszirányú acélbetétek minimális átmérője 8 mm;
- A hosszirányú acélmennyiség minimális ($A_{s,min}$) értéke

$$A_{s,min} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.002bh \\ \frac{0.1N_{Ed}}{f_{yd}} \end{array} \right\}, \text{ ahol}$$

b, h a keresztmetszet szélessége és magassága,

N_{Ed} a normálerő tervezési értéke,

f_{yd} a betonacél tervezési értéke.

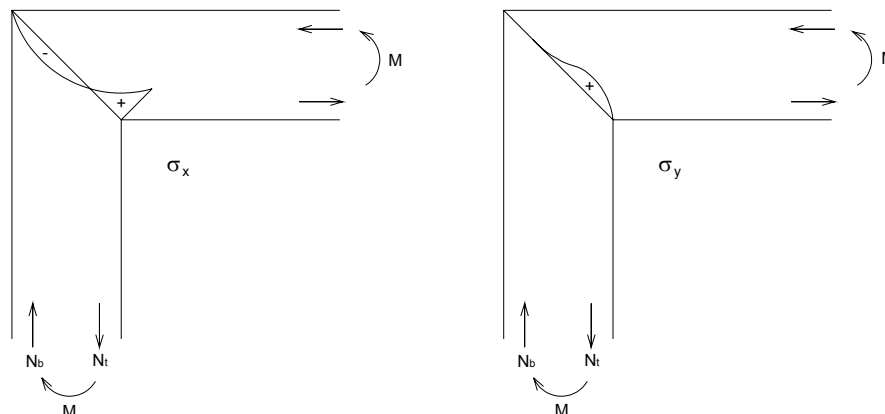
- A hosszirányú acélmennyiség maximális értéke

$$A_{s,max} = 0.08bh;$$

- A kengyelek legkisebb átmérője nem lehet kisebb 6 mm-nél, és a hosszirányú acélbetétek átmérőjének 0,25-szorosánál;
- A kengyelek maximális távolsága az oszlop tengelye mentén mérve nem lehet kisebb, mint
 - $20\phi_{min}$, ahol ϕ_{min} a hosszvasalás átmérője,
 - a keresztmetszet legkisebb oldalhossza,
 - 400 mm.

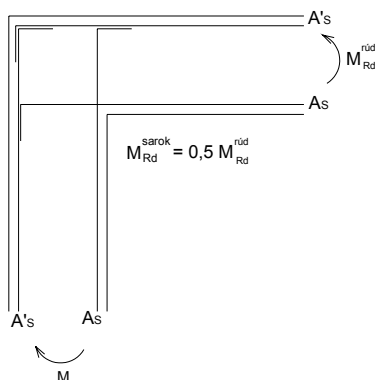
7.3. Keretsarok kialakítása

A keretsarok erőjátékának jellegzetessége, hogy a feszültségek nem lineárisan oszlanak meg, a keretsarokban térbeli feszültségállapot jön létre. A 73. ábrán látható a kétirányú feszültségeloszlás (σ_x és σ_y), ha nyomaték a keretsarkot nyitja, azaz a belső oldalon alakul ki a húzás. Látható, hogy a legnagyobb húzófeszültségek nem a szélső szál közelében alakulnak ki, azaz a külső él menti húzott vasalások kevésbé hatékonyak. A σ_y feszültségek felvételére esetenként méretezett kengyeleket kell elhelyezni.

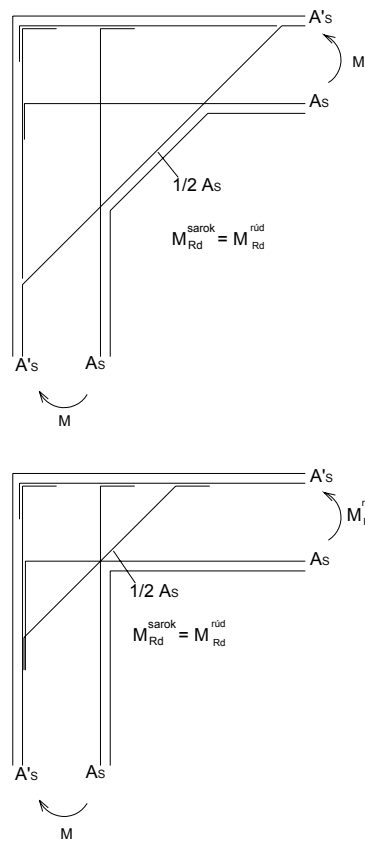


73. ábra Keretsarok feszültségeloszlása, ha a nyomaték a keretsarkot nyitja

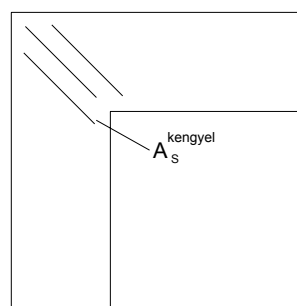
A kísérletek is azt mutatják, hogy a sarok nyomatéki teherbírása lényegesen kisebb, mint keretsarkhoz csatlakozó egyenes rudak teherbírása. A keretsarok pontos vizsgálatára az EUROCODE a rácsostartó modellt (Vasbetonszerkezetek I – nyírás témakör) javasolja. Közelítőleg azt mondhatjuk, hogy kiegészítő vasalás nélkül a keretsarok nyomatéki teherbírása (74. ábra) a keretsarokhoz csatlakozó rúd nyomatéki teherbírásának a fele. Kiegészítő vasalást helyezhetünk el, a 45 fokos repedésre merőlegesen (75. ábra). Ha a kiegészítő vasalás a fővas 50%-ának megfelelő területű és megfelelően lehorgonyzott, akkor a keretsarok nyomatéki teherbírása megegyezik a csatlakozó rudak vasalásával. A méretezett kengyeleknek (76. ábra) [Dulácska: Vasbetonszerkezetek. Jegyzet építésztechnológus hallgatóknak, 2005] az alábbi erőt kell felvenni



74. Keretsarok vasalása kiegészítő vasalás nélkül



75. ábra Keretsarok kiegészítő vasalására példák



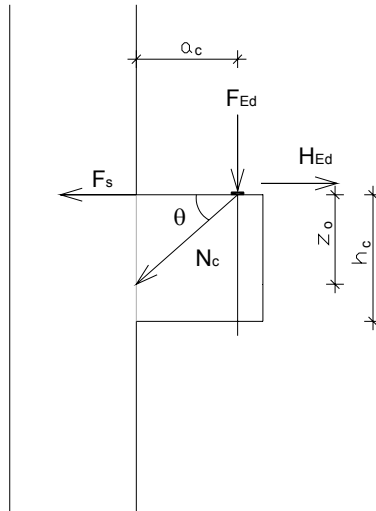
76. ábra Keretsarok méretezett kengyeleinek elhelyezése

$$H_w = \sqrt{2} A_s f_{yd}, \text{ ahol}$$

A_s a keretsarokhoz csatlakozó rudak húzott betonacél területe,
 f_{yd} a betonacél tervezési szilárdsága.

8. Rövid konzol

A vasbeton konzol rövid konzolként méretezendő, ha $a_c < z_0$, ahol a betűk magyarázata a 77. ábrán található.



77. ábra Rövid konzol

A rövid konzolra ható terhek és belső erők a 34. ábrán láthatók. A méretezés alapja a [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007] a rácsostartó modell.

A nyomott rácsrúd (N_c) θ hajlásszöge 45 és 68 fok között szabadon felvehető, a nyírásnál ismertetett

$$1,0 \leq \operatorname{tg} \theta \leq 2,5$$

feltétel betartásával. A θ hajlásszöge felvételénél figyelni kell arra, hogy

$$N_c = \frac{F_{Ed}}{\sin \theta} \leq A_c f_{cd}.$$

A modellben a húzóerő értéke

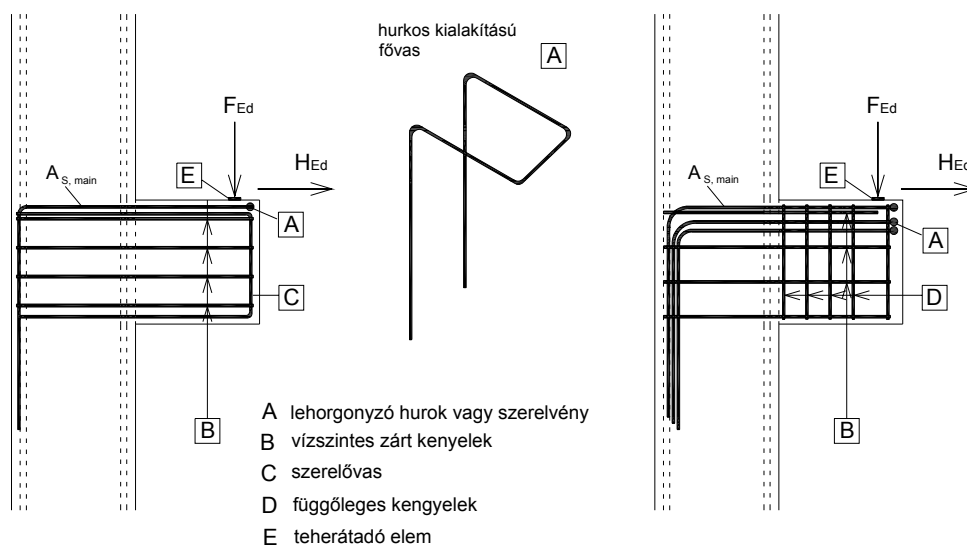
$$F_s = F_{Ed} \frac{a_c}{z_0} + H_{Ed}.$$

Ha más vízszintes erő nincs, akkor $H_{Ed} = 0$. F_{Ed} az épület ferdesége miatt.

A húzott fővasalás mennyisége

$$A_{s,main} = \frac{F_s}{f_{yd}},$$

melynek elhelyezése a 78. ábrán látható. A fővasak konzol felőli végét hurokként kell kialakítani, vagy lehorgonyzó elemet kell alkalmazni. A fővasak támaszba vezetett végénél a lehorgonyzást igazolni kell.



78. ábra Rövid konzol vasalása [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007]

A kengyel mennyisége és elrendezése függ a konzol méretétől. Ha az $a_c \leq 0,5h_c$, akkor a kengyel mennyisége

$$\sum A_{s,link} = 0,25 A_{s,main} ,$$

melyet a magasság mentén közel egyenletes eloszlásban zárt vízszintes kengyelként kell elhelyezni.

Ha az $a_c > 0,5h_c$, akkor a kengyel mennyisége

$$\sum A_{s,link} = 0,50 A_{s,main} ,$$

melyet az erő és a befogás közötti szakaszon közel egyenletes eloszlásban zárt függőleges kengyelként kell elhelyezni.

9. Koncentrált erő bevezetése

9.1. Pecsétnyomás

Ha a felületre merőlegesen megoszló erő nem terjed ki a teljes betonfelületre, akkor a kialakuló térbeli feszültségeloszlás miatt a beton tervezési szilárdsága növelhető és a határerő

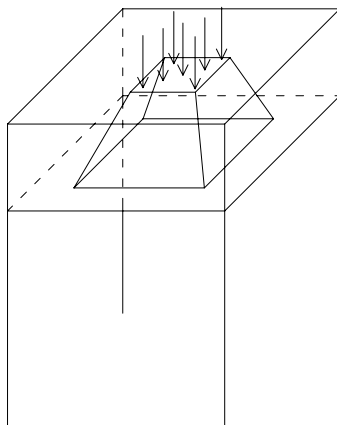
$$F_{Rd} = A_{c0} \alpha f_{cd}, \text{ ahol}$$

A_{c0} a terhelt felület,
 f_{cd} a beton tervezési szilárdsága,

$$\alpha = \min \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ \sqrt{\frac{A_{cl}}{A_{c0}}} \\ \sqrt{\frac{A_c}{A_{c0}}} \end{array} \right\}, \text{ ahol}$$

A_{cl} a vizsgált szinten a tervezési felület, legfeljebb 45 fokos feszültség terjedést figyelembe véve (79. ábra),

A_c a keresztmetszet területe a betonméretek figyelembe véve.

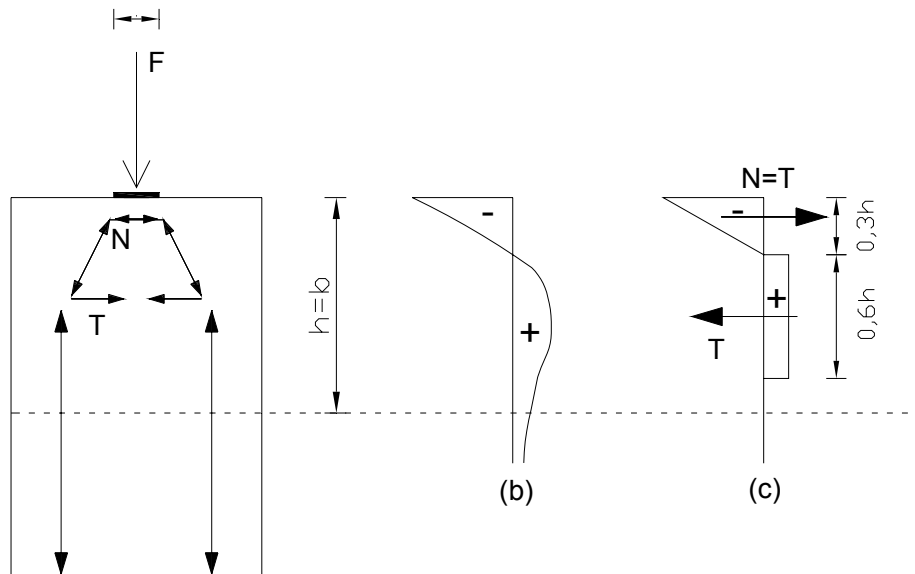


79. ábra Feszültségterjedés modellje

A tervezési felület a terhelési felülettel azonos alakú, az oldalszélessége a terhelési felület oldalszélességének a háromszorosát nem haladhatja meg, továbbá a tervezési felület a keresztmetszetből nem léphet ki.

9.2. Keresztirányú vasalás részleges terhelés alatt

A közvetlenül terhelt felület alatt a feszültség állapot térbeli. A terhelt felület alatt közvetlenül keresztirányú nyomófeszültségek alakulnak ki, mert a beton gátolja a keresztmetszet közepének deformációját, míg a terhelt felülettől távolabb keresztirányú húzófeszültségek alakulnak ki. A feszültség lefutása 80. ábrán látható, amelyet $0.3h$ szakaszon lineárisan változó nyomófeszültséggel és a $0.3h$ és $0.9h$ közötti szakaszon állandó húzófeszültséggel közelíthetünk (80. ábra).



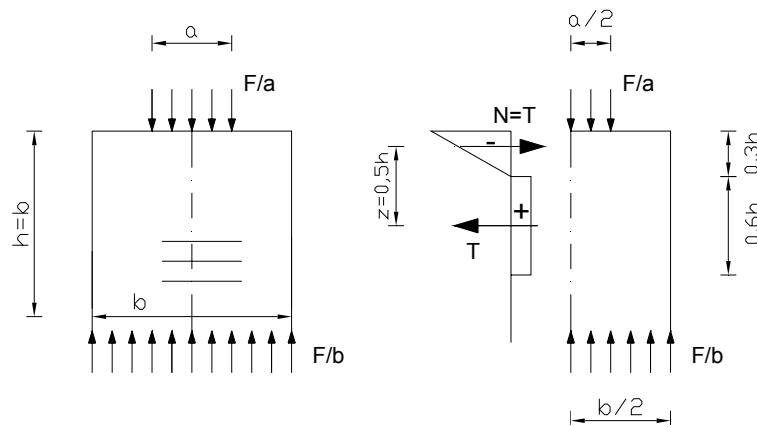
80. ábra Keresztirányú feszültségek pontszerű terhelés esetén [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007]

A keresztirányú feszültségek meghatározásához feltételezzük, hogy a terhelt felülettől $h=b$ távolságra, ahol b a keresztmetszet mérete, a feszültségállapot zavarmentes, azaz feszültségek egyenletesen oszlanak meg. Központosan nyomott négyszög keresztmetszet esetén a keresztirányú feszültség eloszlás a teher alatti középső hosszmetre felírt nyomatéki egyenletből lehet meghatározni (81. ábra). A húzó- és nyomó keresztirányú feszültségek összege a vetületi egyensúly miatt azonos

$$T=N, \text{ és}$$

a feszültségeloszlást figyelembevéve (80. és 81. ábra) a távolságuk

$$z = 0.5h = 0.5b .$$



81. ábra Feszültség eloszlás központos teher esetén [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007]

A nyomatéki egyensúly

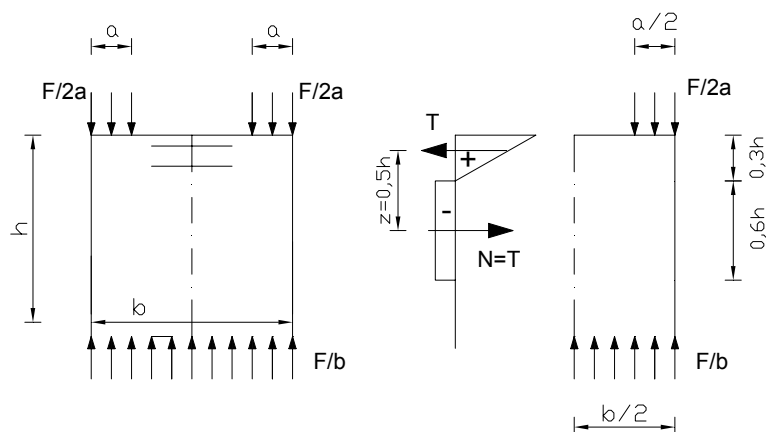
$$0.5hT = \frac{F}{b} \frac{b}{2} \frac{b}{4} - \frac{F}{a} \frac{a}{2} \frac{a}{4}, \text{ ahonnan } h=b \text{ helyettesítéssel}$$

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a}{b} \right) F.$$

A jelölések magyarázata a 81. ábrán. A T húzóerőt zárt kengyelekkel kell felvenni. A kengyeleket a $0.3h$ és $0.9h$ közötti $0.6h$ hosszú szakaszon egyenletesen kell elosztani.

Ha az oszlop két oldalán terhel egy-egy $F/2$ nagyságú erő, akkor a feszültség eloszlás a 82. ábrán látható. A középső hosszmetsetre felírt nyomatéki egyenlet alapján

$$T = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2a}{b} \right) F.$$



82. ábra Feszültség eloszlás szélső teher esetén [Deák-Draskóczy-Dulácska-Kollár-Visnovitz: Vasbetonszerkezetek. Tervezés EUROCODE alapján, Springer Média, 2007]

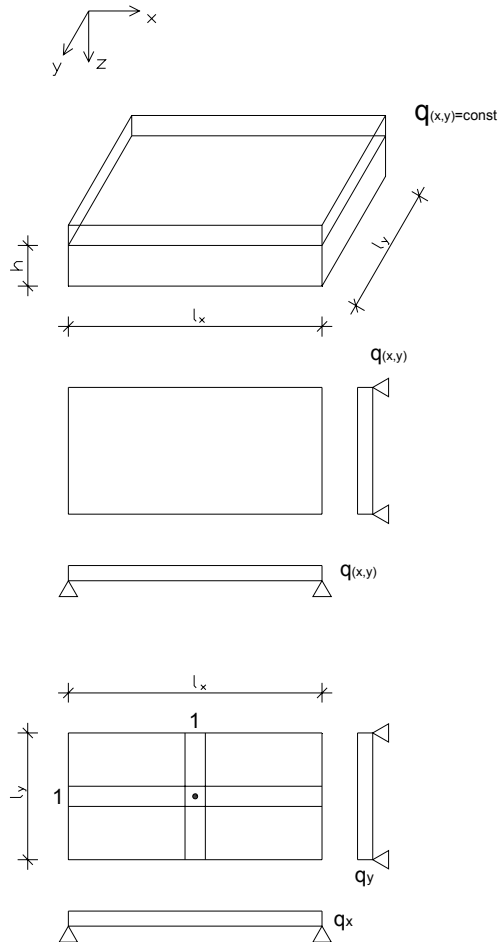
A húzófeszültségek a felső szakaszon alakulnak ki, és a T erőből számított zárt kengyeleket a felső (teher alatti) $0.3h$ szakaszon kell egyenletesen elosztani.

FÜGGELEK

Közelítő eljárás bemutatása

Sávmódszer (tartókereszt eljárás):

Alapötlete: A teljes felületen egyenletesen megoszló erővel terhelt lemez maximális lehajlásának a helyén x és y irányban egymást keresztező, egységnyi széles lemezsávot vágunk ki (F1. ábra).



F1. ábra A lemez megoldása sávmódszerrel

A lemezsávok saját irányukban gerendaként működnek. Ennek következtében a csavarási ellenállást figyelembe vevő tag elhanyagolható és a Kirchoff-féle lemezegyenlet

$$\frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{K}.$$

Az első tag egységnyi szélességű x irányú gerenda alakváltozás-teher összefüggése és az ebben az irányba működő teher q_x . A második tag egységnyi szélességű y irányú gerenda alakváltozás-teher összefüggése és az ebben az irányba működő teher q_y . Az egyenlet tovább írható

$$q_x + q_y = q.$$

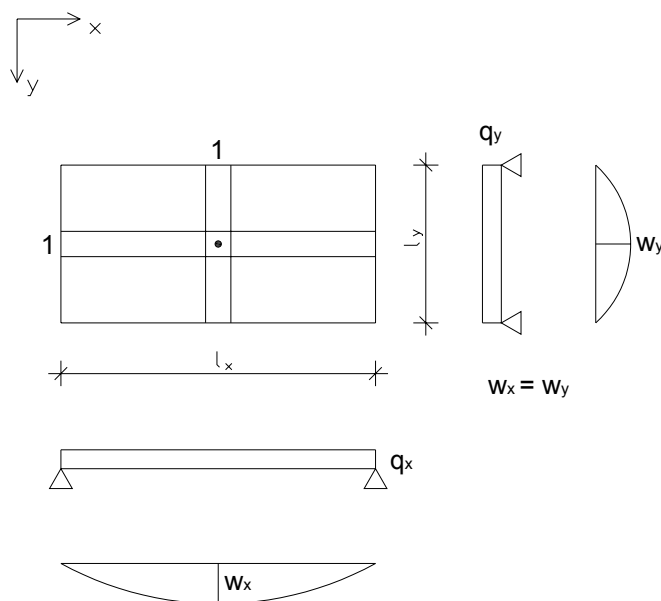
A két gerenda egyenletéből a fenti feltételekből a feladat megoldható.

Megoldás:

Kiinduló feltételek:

A két sáv egymást keresztezi és a keresztezési pontban a lehajlások azonosak (F2. ábra)

$$w_x = w_y$$



F2. ábra Sáv módszer használata

A kétirányú teher értékének összege megegyezik a lemezt terhelő erővel (Alapötlet):

$$q_x + q_y = q.$$

A lemez vastagsága konstans, azaz

$$I_x = I_y$$

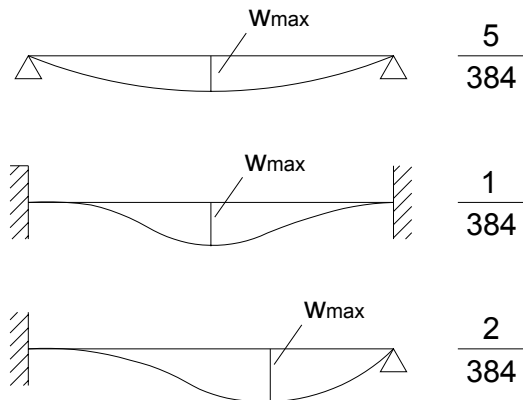
Megoldás:

A lemezsávok –a gerenda rugalmas vonalának differenciálegyenlete alapján – maximális lehajlása

$$w_x = a_x \frac{q_x l_x^4}{E_c I_x}$$

$$w_y = a_y \frac{q_y l_y^4}{E_c I_y}, \text{ ahol}$$

- a_x és a_y a lemez megtámasztási viszonyaitól függő tényező (F3. ábra),
- l_x és l_y a lemez oldalszélessége,
- E_c a vasbeton lemez (beton) rugalmassági modulusa,
- $I_x = I_y$ a lemez inercianyomatéka.



F3. ábra Az a_i tényező értéke a különböző megtámasztások esetén

Bevezetve a következő összefüggéseket

$$\varepsilon = \frac{l_y}{l_x},$$

$$m = \frac{a_x}{a_y},$$

és felhasználva a kiinduló feltételeket

$$a_x \frac{q_x l_x^4}{E_c I} = a_y \frac{q_y l_y^4}{E_c I},$$

$$q_x = \frac{a_y}{a_x} \left(\frac{l_y}{l_x} \right)^4 q_y,$$

$$q_y = \frac{m}{m + \varepsilon^4} q,$$

$$q_x = \frac{\varepsilon^4}{m + \varepsilon^4} q.$$

A teherhányadok ismeretében a gerenda igénybevételei a statikából ismert módon számíthatók. Az igénybevételek ismeretében a vasalás meghatározható.

Marcus módszer:

Az alábbiakban ismertetett módszert Marcus a sávmódszer alapján dolgozta ki.

Alapötlet: A lemezre ható a felületen egyenletesen megoszló teher felbontásakor a csavarási ellenállást is figyelembe veszi

$q = q'_x + q'_y + q_{xy}$, ahol q_{xy} a csavarási hatást figyelembe vevő tényező, ami felbontható

$$q_{xy} = q_x'' + q_y'' \text{ alakra.}$$

Megoldás: A csavarási teherhányad (q_x'' és q_y'') meghatározására a következő képleteket dolgozta ki

$$q_x'' = \frac{5}{6} \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{m_x}{m_{0x}} q_x,$$

$$q_y'' = \frac{5}{6} \left(\frac{l_x}{l_y} \right)^2 \frac{m_y}{m_{0y}} q_y,$$

ahol

l_x és l_y a lemez oldalszélessége,
 m_x és m_y a sávmódszerrel meghatározható maximális hajlítónyomaték,
 m_{0x} és m_{0y} kéttámaszúnak tekintett lemezsávok maximális nyomatéka a q teljes teherből,
 q_x és q_y a sávmódszerrel meghatározható teherrészek.

A hajlítási teherhányadok (q_x' és q_y') a csavarási teherhányadokat figyelembe véve:

$$q_x' = q_x - q_x''$$

$$q_y' = q_y - q_y''$$

A hajlítási teherhányadok ismeretében a gerenda hajlítási igénybevételei a statikából ismert módon számíthatók. Az igénybevételek ismeretében a vasalás meghatározható.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
2. Lemezszerkezet – általános ismeretek	4
2.1. Definíciók	4
2.2. Lemezek építésének története	6
2.3. Lemezek osztályozása statikai szempontból	7
2.3.1. Egyirányban teherviselő lemezek	7
2.3.2. Kétirányban teherviselő lemezek	10
2.4. Hajlított lemez viselkedése törésig	12
3. Rugalmas lemezelmélet	14
3.1. Rugalmas lemez vizsgálata derékszögű koordináta-rendszerben	14
3.2. Vasbeton lemezrendszerek vizsgálata	25
4. Oszlopokkal alátámasztott lemezek (födémek)	30
5. Vasbeton lemezek képlékeny teherbírása	39
6. Keretszerkezet	45
6.1. Definíciók	45
6.2. Keretek igénybevételének számítása	50
6.2.1. Keretek pontos számítása	50
6.2.2. Keretek közelítő számítása függőleges teherre	51
6.2.3. Keretek közelítő számítása vízszintes teherre	59
7. Keretek méretezése	66
7.1. Gerendák méretezése	66
7.2. Oszlopok méretezése	67
7.3. Keretsarok kialakítása	73
8. Rövid konzol	76
9. Koncentrált erő bevezetése	78
9. 1. Pecsétnyomás	78
9.2. Keresztirányú vasalás részleges terhelés alatt	79
FÜGGELEK	82
Közelítő eljárás bemutatása	82
Tartalomjegyzék	86