Mechanika III
Rezgéstan

PTE, MŰSZAKI ÉS INFORMATIKAI KAR

2017-2018

ÜTKÖZÉSEK

Ütközések	Bevezetés, Ütközések formái, Centrikus ütközés, Ütközési tényező, Maxwell ábra, Álló tengely körül elforduló test ütközése, példák

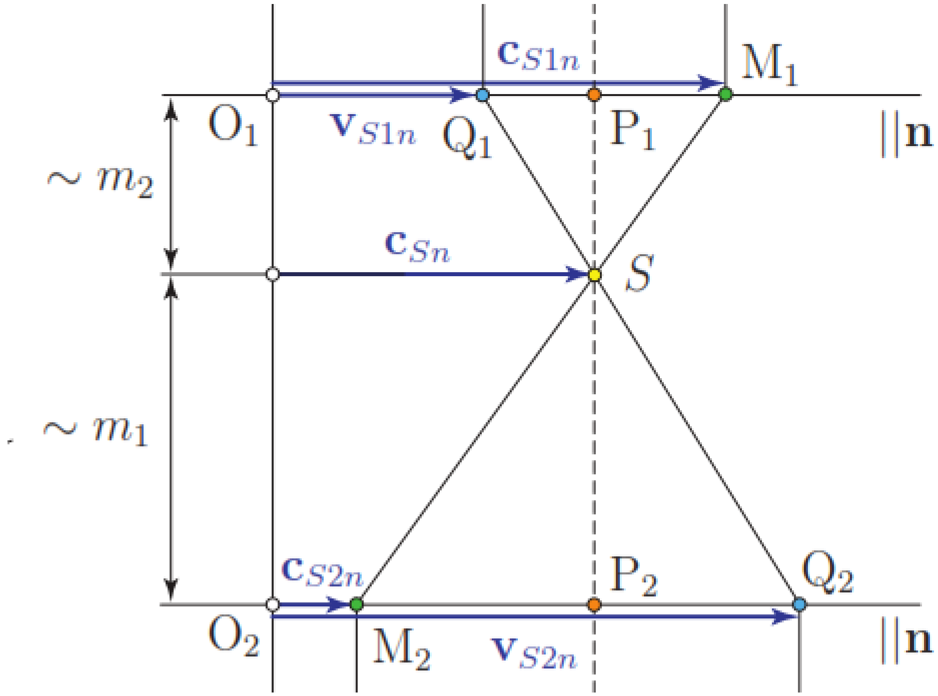
Ütközések
Összefoglaló

Ütközés	Mint a rezgések legfontosabb kiváltó okait vizsgáljuk. Az ütközés elindít egy mozgást. Mi ennek az indításnak a következménye? Nagy szerepe van a megfigyelésnek, empirikus képletek. Ellentmondásos elmélet, mert az ütközési pontban végtelen kis idő alatt, végtelenül nagy feszültség keletkezik. Ezt az anyag nem bírná ki → feltételezzük, hogy lokálisan rugalmas
Ütközési modell elemei	Érintősík vagy ütközési sík A – ütközési pont $\underline{n}$ - ütközési normális S1, S2 az ütköző testek súlypontjai S – közös súlypont c_{S1}, c_{S2}, c_S – súlyponti sebességek Ω_1, Ω_2 – a két test szögsebességei Ütközés akkor jön létre, ha a két oldalról számított A pontbeli sebességek nem egyenlők $$c_{A1} \neq c_{A2}$$ $$\underline{c}_{S1} + \Omega_1 \times \underline{r}_{S1A} \neq \underline{c}_{S2} + \Omega_2 \times \underline{r}_{S2A}$$
Ütközés időtartama τ	1. Összenyomódási (kompressziós) szakasz 2. Tágulási (expanziós) szakasz

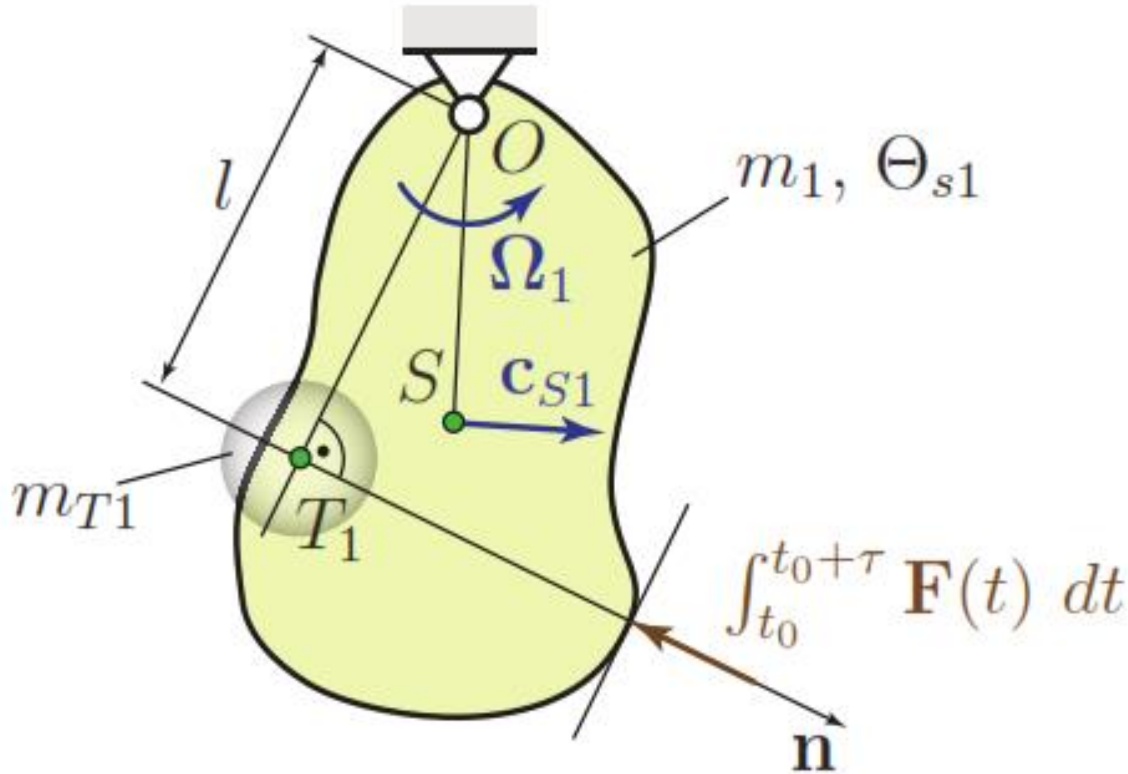
Feltevések	1. τ – ütközési idő kicsi, annyira, hogy a fellépő F_A erő nagy Az ütközés alatt: • Nem változik a térbeli helyzet • F_A mellett minden más erő elhanyagolható 2. A merev test lokálisan (A környékén) deformálódik • Rugalmasan (C_R = 1) • Képlékenyen (C_R = 0) • A kettő kombinációjaként (rugalmatlanul) ($0<C_R<1$) 3. Nincs súrlódás ($\mu=0$). Csak az érintősíkra merőlegesen adódik át erő!!!
Centrikus ütközés	Két mozgó test, egyik sem rögzített, a súlypontok rajta vannak az ütközési normálison. Pl. szabadon mozgó golyók ütközése. S1, S2 az ütköző testek súlypontjai S – közös súlypont c_{S1}, c_{S2}, c_S – súlyponti sebességek ütközés előtt v_{S1}, v_{S2}, v_S – súlyponti sebességek ütközés után ω_1, ω_2 – a két test szögsebességei ütközés előtt Ω_1, Ω_2 – a két test szögsebességei ütközés után m_1, m_2 – testek tömegei Mivel nem adódik át erő, csak az ütközési normális irányában, az impulzus megmarad $$m_1 c_{S1} + m_2 c_{S2} = m_1 v_{S1} + m_2 v_{S2}$$

Centrikus ütközés	$\underline{r}_S$ - a két testből álló rendszer közös súlypontjának helyvektora $\underline{r}_S = \frac{m_1 \underline{r}_{S1} + m_2 \underline{r}_{S2}}{m_1 + m_2}$ $\underline{r}_S$ deriváltjából és az impulzus megmaradásból kapjuk: $\underline{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S}}$ $\boldsymbol{c_S = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}}$
Érvényes összefüggések	A teljes rendszerre: Impulzusmegmaradás (súlyponti sebesség állandó) $\Delta \underline{I}_1 = m_1 \underline{v}_{S1} - m_1 \underline{c}_{S1} = -\underline{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_A dt$ $\Delta \underline{I}_2 = m_2 \underline{v}_{S2} - m_2 \underline{c}_{S2} = \underline{n} \int_{t_0}^{t_0+\tau} F_A dt$ Energiamegmaradás $\frac{m_1 \underline{c}_{S1}^2}{2} + \frac{m_2 \underline{c}_{S2}^2}{2} = \frac{m_1 \underline{v}_{S1}^2}{2} + \frac{m_2 \underline{v}_{S2}^2}{2}$
Ütközési tényező	Empirikus képlet: $C_R = \frac{\underline{v}_{1n} - \underline{v}_n}{\underline{c}_n - \underline{c}_{1n}} = \frac{\underline{v}_{2n} - \underline{v}_n}{\underline{c}_n - \underline{c}_{2n}}$ n – a sebességek ütközési normális irányába eső komponensei. Az erre merőleges komponensek nem változnak, mert nincs erőtranszfer az ütközés érintősíkjában
	Az S indexet az egyszerűség kedvéért kihagytuk

Maxwell ábra	$$C_R = \frac{Q_1 P_1}{P_1 M_1} = \frac{Q_2 P_2}{P_2 M_2}$$



Álló tengely körül elforduló test ütközése	A C_R képlete közvetlenül nem alkalmazható, de visszavezethető centrikus ütközésre. Van egy testünk, amely az O csukló körül el tud fordulni. $\underline{\theta}_{O1}$ - az O álló ponton átmenő tengelyre számított tehetetlenségi nyomaték l – O pont és az ütközési hatásvonal távolsága Perdülettétel: $$\underline{\pi}_O(t_0+\tau)-\underline{\pi}_O(t_0)=\theta_{O1}\omega_1-\theta_{O1}\Omega_1=-l\int_{t_0}^{t_0+\tau}F_A(t)dt$$ Felvesszük a T_1 ütközési talppontot. A perdülettételből kapjuk: $$m_{T1}v_{T1}-m_{T1}c_{T1}=\int_{t_0}^{t_0+\tau}F_A(t)dt$$ ahol: m_{T1} – a redukált tömeg ($m_{T1}=\frac{\theta_{O1}}{l^2}$) $l\omega_1=c_{T1}$ és $l\Omega_1=v_{T1}$ Az állandó tengely körül elforduló testet egy T_1 pontban lévő m_{T1} tömegű pontszerű testtel helyettesíthetjük → CENTRIKUS ütközés
Algoritmus az ω_1 ütközés utáni szögsebesség meghatározására	1. T_1 talppont meghatározása, 2. m_{T1} – a redukált tömeg meghatározása, 3. c_{T1} meghatározása 4. Ha a másik test is álló tengely körüli forgást végez, akkor ugyanez a második testre 5. c_s súlyponti sebesség meghatározása 6. Maxwell ábra, 7. ω_1 ütközés utáni szögsebesség meghatározására



l
O
$m_1,\ \Theta_{s1}$
$\mathbf{\Omega}_1$
S
$\mathbf{c}_{S1}$
m_{T1}
T_1
$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{F}(t)\, dt$
$\mathbf{n}$

Haladó mozgást végző testek ütközése mozdulatlan felülethez	**Centrikus egyenes** e – visszapattanási tényező (a C_R ütközési tényezővel azonos, de csak ebben a speciális esetben jelöljük így) $$e = \frac{v}{c}$$ Rugalmatlan ütközés energiavesztesége: $\Delta E = \frac{mc^2}{2}(1 - e^2)$ **Centrikus ferde ütközés** $$e = \frac{v_n}{c_n}$$ $$v = c\sqrt{e^2 cos^2\alpha + sin^2\alpha}$$ $$tg\beta = \frac{1}{e} tg\alpha$$ ahol α és β az ütköző test ütközés előtti és utáni sebességének az ütközési sík normálisával bezárt szöge
Két haladómozgást végző test centrikus egyenes ütközése	**A sebességvektorok azonos irányításúak, $c_1 > c_2$** $$e = \frac{v_2 - v_1}{c_1 - c_2}$$ $$\Delta E = (1 - e^2)\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(c_1 - c_2)^2$$

REZGÉSTAN

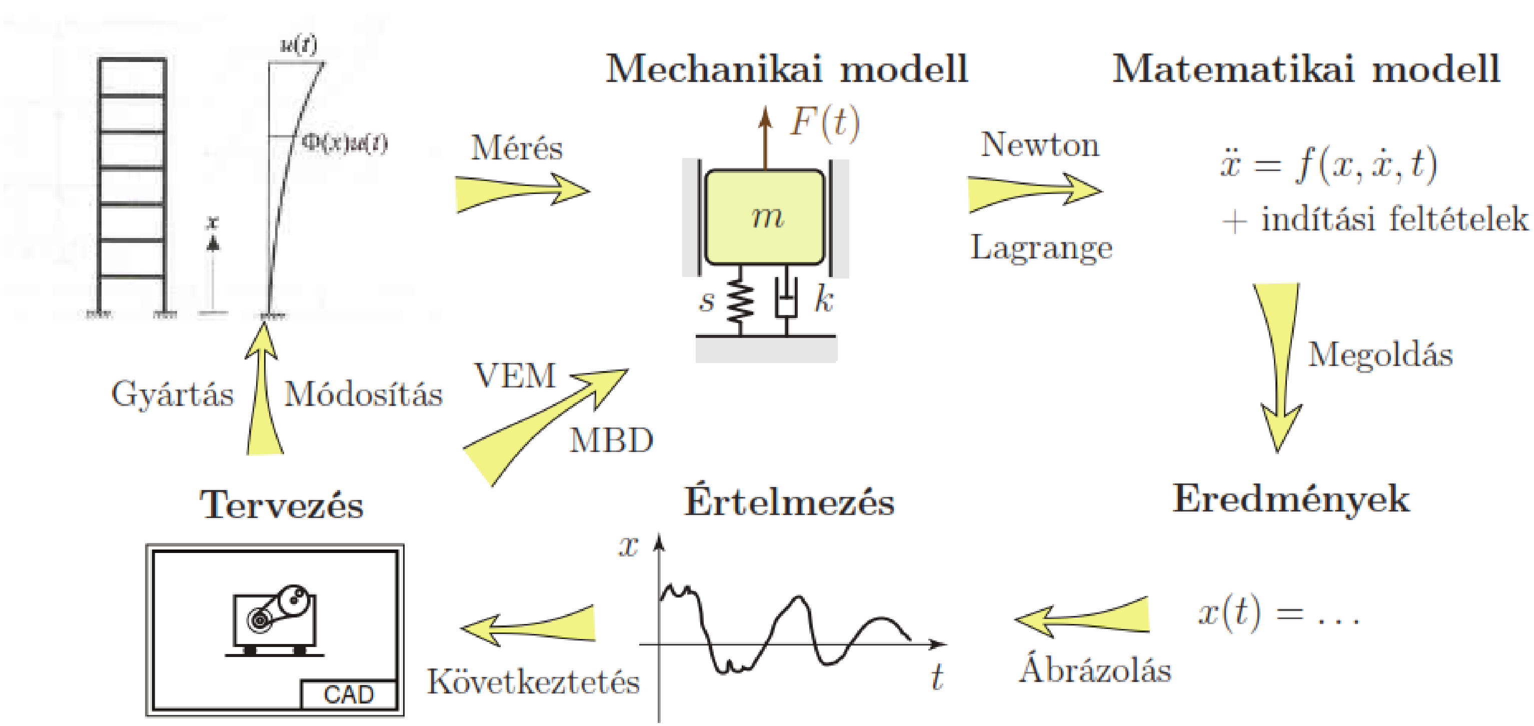
Mechanikai lengőrendszerek	Mechanikai lengőrendszerek elemei, Mechanikai modellek, Rugók kapcsolása
Modellek	Elnevezések mechanikai modellekre, Rezgéstani feladatok gondolatmenete
Egy szabadsági fokú lengőrendszerek	Csillapítatlan, szabad, harmonikus rezgés, Mintafeladatok: rúdra rögzített tömeg lengése, tárcsa torziós rezgése, Tömegek kapcsolása
	Függőleges irányú rezgés nehézségi erőtérben. Inga. Linearizálás
	Csillapítás. Közegellenállás. Viszkózus csillapítás. Coulomb csillapítás. Száraz csillapítás
	Gerjesztés. Erőgerjesztés. Útgerjesztés

Rezgéstan Összefoglaló

Mechanikai modellek	**Modellalkotás:** 1. egyszerűsítés: a vizsgált szerkezeteket merev/tehetetlen testekre és rugalmas, elhanyagolható tömegű testekre bontjuk 2. az elemeket csak a szerepüknek megfelelő paraméterekkel jellemezzük
Mechanikai modellek alkotóelemei	**1. Tehetetlen elemek:** merev testek, rugalmasság nélkül m – tömeggel vagy θ_S tehetetlenségi nyomatékkal jellemezzük **2. Rugalmas elemek:** nincs tömegük, rugalmasak
Rugalmas elemek	**Csavarrugó:** **s – rugómerevség [N/m]** – megadja, hogy egységnyi hosszváltozáshoz mekkora erő szükséges **F=sx**, ahol x – hosszváltozás (megnyúlás, összenyomódás) 1/s=c – rugóállandót is használják a gyakorlatban A rugó által kifejtett erő: $F_r = -sx$ A rugóban x_1 megnyúlás hatására felhalmozódott potenciális energia: $\mathbf{U=sx_1^2/2}$ **Torziós rugó** $\mathbf{s_t}$ – **torziós rugómerevség** [**Nm/rad**] – megadja egységnyi szögelfordulás előidézéséhez szükséges nyomatékot A rugó által kifejtett nyomaték: $\mathbf{M_r = -s_t \varphi}$, ahol φ – szögelfordulás, $1/s_t = c$ A rugóban x_1 megnyúlás hatására felhalmozódott potenciális energia: $\mathbf{U=s_t \varphi_1^2/2}$

Rugalmas elemek	**2. Rugalmas tengelyek, mint rudak** - homogén, hosszában azonos keresztmetszetű - tömegét elhanyagoljuk IE – hajlítómerevséggel rendelkezik (I – másodrendű nyomaték, E – rugalmassági modulusz) *l* – rúd hossza Kitérés: f= $\frac{\mathrm{F}l^3}{3\mathrm{IE}}$, $s = \frac{3\mathrm{IE}}{l^3}$ Torziós lengést végző rudak - a rúd végének egységnyi nyomaték hatására történő elfordulása adja meg a torziós rugóállandót M – csavarónyomaték I_P G – csavarómerevség Szögelfordulás: $\varphi = \frac{\mathrm{M}l}{\mathrm{I_P G}}$, $s_t = \frac{\mathrm{I_P G}}{l}$
Rugók kapcsolása	**Párhuzamos:** a deformáció megegyezik a két rugónál $s=s_1 + s_2$ **Soros:** a rugóban ébredő erő megegyezik a két rugónál $1/s=1/s_1+1/s_2$ Kombinált esetben a valós és helyettesítő rendszer felhalmozott potenciális energiája kell ugyanaz legyen

Elnevezések mechanikai modellekre	**Gerjesztetlen** **Csillapítatlan** **Lineáris** **Egy szabadsági fokú**	**Gerjesztett** **Csillapított** **Nem lineáris** **Több szabadsági fokú**
Rezgéstani feladatok gondolatmenete		



Egy szabadságfokú lengőrendszerek	**Csillapítatlan, szabad, harmonikus rezgés** Cél: a mozgás időbeni lefolyásának vizsgálata, meghatározása 1. lépés: modellállítás 2. lépés: szabadtest ábra 3. lépés: Newton 2. axiómája 4. lépés: differenciál egyenlet felállítás 5. lépés: általános és partikuláris megoldás adott kezdőfeltételekre 6. lépés: analízis (amplitudó, periódus stb.) 7.lépés: következtetés (fáradási adatok, élettartam stb.) Minden DoF=1, csillapítatlan, szabad lengőrendszerre található egy vele egyenértékű modell, **s** rugómerevségű rugóval és **m** tömegű testtel. A szabadtest ábra felrajzolása után erre a rendszerre is felírható a dinamika alapegyenlete.
Mintafeladat - modellállítás	Legyen egy rúdra rögzített m tömegű test. E - a rúd rugalmassági modulusza, tömegét elhanyagoljuk ϕ – rúdátmérő (egyenletes a rúd hosszában) A rudat s merevségű rugóval modellezzük, csillapítatlan rezgéssel közelítjük.

Szabadtest ábra	A rúd kitérített helyzetében rajzoljuk meg. x – kitérés F_r – rugóerő s- rugómerevség $\lvert \boldsymbol{F_r} \rvert = \boldsymbol{s} \lvert \boldsymbol{x} \rvert$ - a kinematikai mennyiségek pozitívak, az erőket és nyomatékokat pedig fizikai értelmüknek megfelelő előjellel vesszük figyelembe - a rúd meghajlik, kitérése: f=x f= $\frac{Fl^3}{3I_yE}$, $s = \frac{3I_yE}{l^3}$ ahol: I_y - az y tengelyre számított másodrendű tehetetlenségi nyomaték - kör keresztmetszetű rúdra: $I_y = \frac{d^4\pi}{64}$ és $s = \frac{3d^4\pi E}{64l^3}$
Matematikai modell	2. axióma: $\underline{\dot{I}} = \underline{F}$ $\begin{cases} x: ma_S = -F_r \\ z: 0 = N - G \end{cases}$ Innen: $m\ddot{x} = -sx$ – közönséges differenciál egyenletet kapjuk.

$\ddot{\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{m}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, másodrendű, tehát kell 2 kezdeti feltétel
t_0=0 időpontban az $x(0)=x_0$ és $v(0)=v_0$

Másodrendű diff egy = DoF=1
Gerjesztetlen = a jobb oldal 0
Hiányos ($\dot{x}$ hiányzik) = csillapítatlan

A megoldás ún. próbafüggvénnyel lehetséges, minden diff egyenletnek van egy exponenciális alakú megoldása. Az exponenciális fgv.-nek a deriváltja saját maga.

Megoldás: $\boldsymbol{x(t) = Ae^{\lambda t}}$

Ahol λ – karakterisztikus gyök, jelen esetben [1/s] vagy [rad/s] mértékegységgel

Így:

$$\dot{x} = A\lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$$

Visszahelyettesítve:

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{s}{m} A e^{\lambda t} = 0$$

$A\lambda^2 + \frac{s}{m}A = 0$, mert $e^{\lambda t} \neq 0$

$$A\left(\lambda^2 + \frac{s}{m}\right) = 0$$

$A \neq 0$, tehát:

$$\boldsymbol{\lambda^2 + \frac{s}{m} = 0}$$

karakterisztikus egyenletet kapjuk.
Megoldások:

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{s}{m}}$$

Ez a megoldás akkor lesz valós, ha s negatív. Ez RITKA eset, akkor fordul elő, ha megnyújtás hatására csökken az F_r rugóerő.

Gyakoribb ennek a fordítottja: **s>0**
Ilyenkor a megoldás komplex.

$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{s}{m}}$$

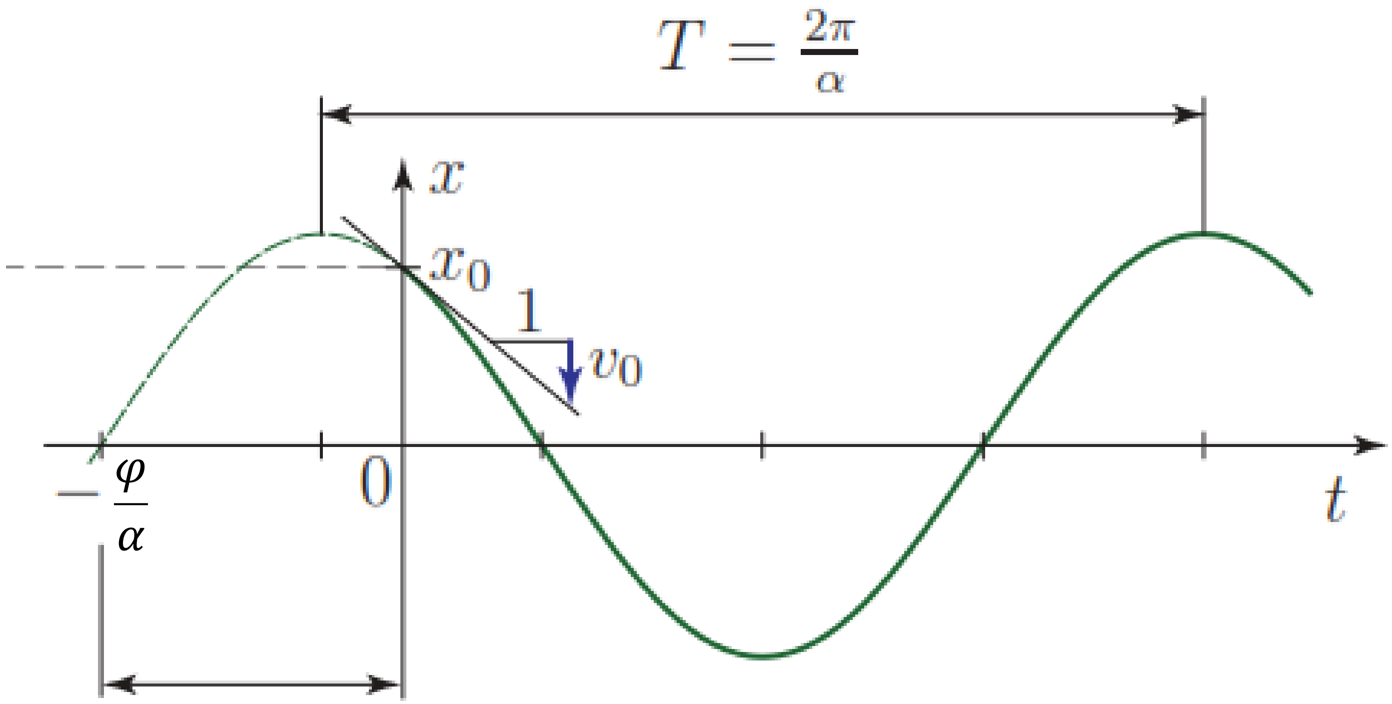
Új fogalom: a rezgés saját körfrekvenciája: α.
Mértékegysége a [1/s] vagy [rad/s].

$$\lambda_{1,2} = \pm i\alpha$$

$$\boldsymbol{\ddot{x} + \alpha^2 x = 0}$$

	Jelen esetben: $$\alpha = \sqrt{\frac{s}{m}}$$ **Saját frekvencia:** $\boldsymbol{\frac{\alpha}{2\pi}}$ **[Hz] – a lengések száma/secundum** **Lengésidő:** $\boldsymbol{T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\alpha}}$ **[s] – secundum/lengés**
Általános megoldás	Az általános megoldás a $\lambda_{1,2}$ megoldások lineáris kombinációja*:* $x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{i\alpha t} + A_1 e^{-i\alpha t} = A_1\big(cos(\alpha t) + isin(\alpha t)\big) + A_2\big(cos(\alpha t) - isin(\alpha t)\big) = (A_1 + A_2)cos(\alpha t) + \mathrm{i}(A_1 - A_2)sin(\alpha t)$ Ha valós megoldáshoz akarunk jutni, akkor mindkét tagnak valósnak kell lennie. Ez akkor lehet, ha A_1 és A_2 egymásnak komplex konjugáltjai. Ekkor: $$A_1 + A_2 = C_1, valós$$ $$i(A_1 - A_2) = C_2, valós$$ $$\boldsymbol{x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)}$$
Speciális megoldás	**Kezdeti feltételekből:** $$\boldsymbol{x(0) = C_1 1 + C_2 0 = x_0}$$ $$\boldsymbol{\dot{x}(0) = -\alpha C_1 0 + C_2 \alpha 1}$$ **Innen:** **C_1=x_0 [m]** **C_2=v_0/α [m]**

Speciális megoldás	$$x(t) = x_0 \cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha} \sin(\alpha t)$$ Ebben a formában jobban ábrázolható: $$\boldsymbol{x(t) = B\sin(\alpha t + \varphi)} = B\sin\varphi \cos(\alpha t) + B\cos\varphi \sin(\alpha t)$$ $$B\sin\varphi = x_0$$ $$B\cos\varphi = \frac{v_0}{\alpha}$$ $$\boldsymbol{B = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\alpha^2}}}$$ $$\boldsymbol{tg\varphi = \frac{x_0 \alpha}{v_0}}$$ B – amplitudó φ - fázisszög $T=2\pi/\alpha$ – periódus $x(-\boldsymbol{\varphi}/\alpha)=0$
Következtetések levonása	Ki lehet számítani a hajlítónyomaték maximumát→a tövénél fog eltörni Ki lehet számítani a normálfeszültség maximumát a befogásnál a keresztmetszeten beül Wöhler görbe: $\sigma=f(N)$, ábrázolni lehet a normálfeszültséget az igénybevételek számának függvényében, amiből kiszámítható a várható élettartam az adott σ_{max} értéknél.



$$\frac{\varphi}{\alpha} > \frac{T}{4} \quad \Rightarrow \quad \varphi > \frac{\pi}{2}$$

Torziós rezgések	- **súlypontban csapágyazott tárcsa rezgését torziós rugóval modellezzük** - **n= 1DoF,** φ kitéréssel leírható - **S súlypont ≡ O álló pont (tárcsa középpontja)** - M_r =-s_t φ, torziós rugóból származó nyomaték - $θ_S$ – tehetetlenségi nyomaték az S-en átmenő tengelyre - M_r lineárisan változik a φ függvényében
	$\theta_S \varepsilon = -M_r$ $\theta_S \ddot{\varphi} = -s_t \varphi$ $\ddot{\varphi} + \alpha^2 \varphi = 0$ $\alpha = \sqrt{\frac{s_t}{\theta_S}}$ A másodfokú differenciál egyenlet megoldása ugyanaz lesz, mint a korábbi esetben.
Tömegek kapcsolása	Egy második tömeg úgy változtatja meg a rendszert az előzőhöz képest, mintha az első tömeg tehetetlenségi nyomatékához adódna hozza

Függőleges irányú rezgések nehézségi erőtérben	

Függőleges irányú rezgések nehézségi erőtérben

- Felfüggesztett rugó+test, amely rezgőmozgást végez
- Az x irány a függőleges mentén felfele mutat
- 0 időpillanatnak és helyzetnek a rugó kifeszítetlen állapotát tekintjük

Diff. egyenlet: $\ddot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{\alpha}^2\boldsymbol{\varphi} = -\boldsymbol{g}$

A jobb oldal eltér 0-tól, ezért ez a rendszer úgy viselkedik, mint állandó gerjesztésű rendszer.

- **az általános megoldás** egy homogén és egy partikuláris megoldásból áll:

$$\boldsymbol{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$$

$$\boldsymbol{x_H(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t)}$$

$$\boldsymbol{x_P(t) = -\frac{g}{\alpha^2}}$$

ahol a $\boldsymbol{\frac{g}{\alpha^2} = f_0 = \frac{mg}{s}}$ **STATIKUS DEFORMÁCIÓ**

- **a speciális megoldás:**

$$x(0) = C_1 - f_0 = x_0$$

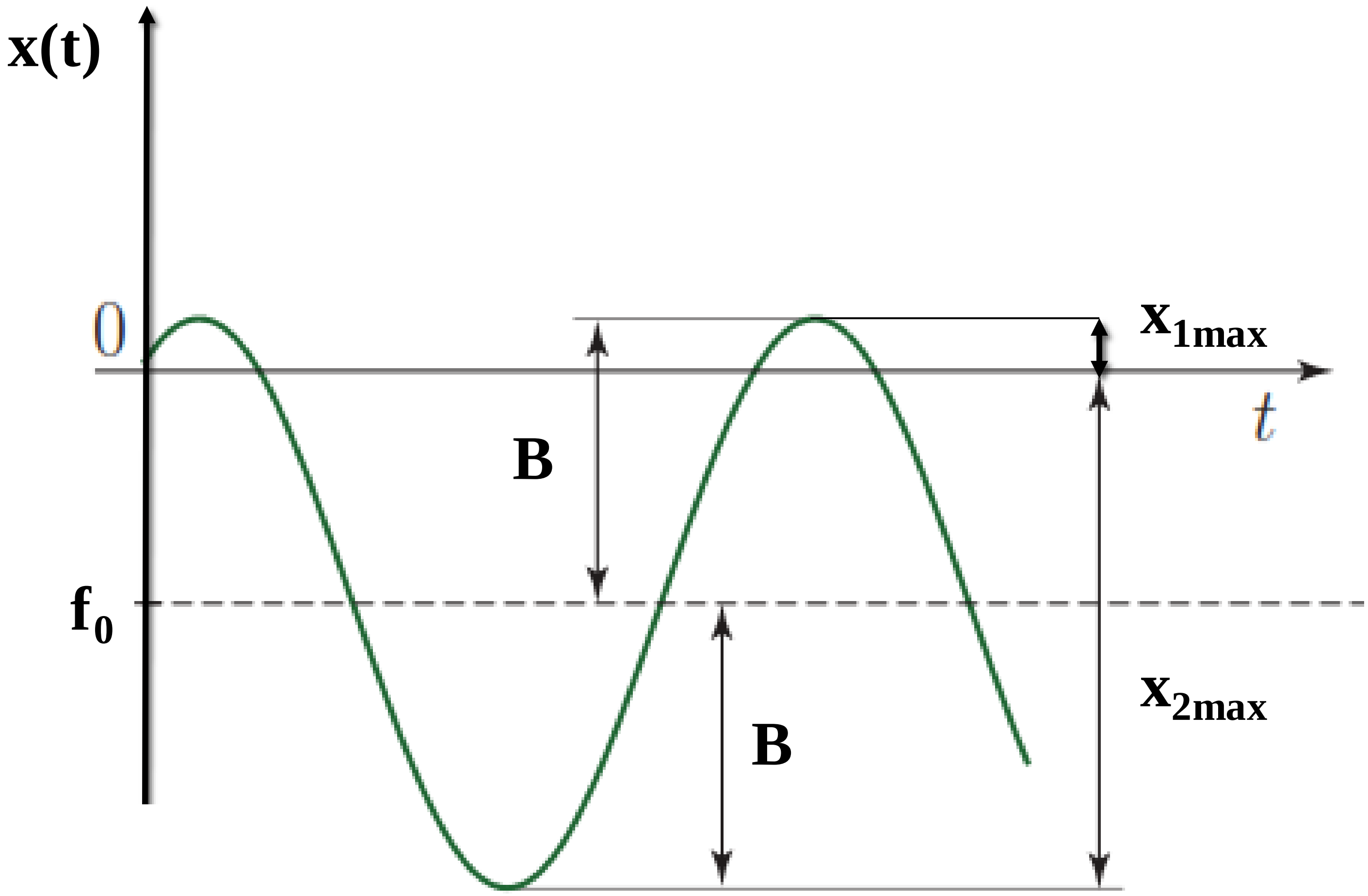
$$\dot{x}(0) = \alpha C_2 = v_0$$

$\boldsymbol{c_1 = x_0 + f_0}$

$\boldsymbol{c_2 = v_0/\alpha}$

$$\boldsymbol{x(t) = (x_0 + f_0)\cos(\alpha t) + \frac{v_0}{\alpha}\sin(\alpha t) - f_0}$$

- tehát lineáris rugók esetén a periódusidő, sajátfrekvencia, amplitudó nem függ a gravitációs erőtértől, a maximális rugóerő számításánál, azonban figyelembe kell venni a gravitációs erőteret: $\boldsymbol{F_{r,max} = s(f_0 + B) = mg + sB}$


x(t)
0
x_{1max}
t
B
f_0
x_{2max}
B

Inga. Linearizálás	- rúd, amely a felső O pontjában rögzített, súlypontja S - O körül harmonikus lengéseket végez - adott: **m, l, ε, G, φ** $$\dot{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{O}} = \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}$$ $$\theta_O \varepsilon = -G\frac{l}{2}sin\varphi$$ $$\theta_O = \theta_S + \overline{OS}^2 m = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$ $$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi} = -mg\frac{l}{2}sin\varphi$$ $$\boldsymbol{\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}sin\varphi = 0}$$ ami zárt alakban nem megoldható. De [-5,5]°=[-0.1,0.1]rad tartományban linearizálható: $$\boldsymbol{\ddot{\varphi} + \frac{3g}{2l}\varphi = 0}$$ $$\boldsymbol{\ddot{\varphi} + \alpha^2\varphi = 0}$$ $$\boldsymbol{\alpha = \sqrt{\frac{3g}{2l}}}$$ [-5,5]°=[-0.1,0.1]rad tartományban lineáris rendszerként rezeg, π körül is linearizálható, de ott instabil állapottal van dolgunk

Csillapítás	- a rendszert körülvevő környezet illetve a rendszer saját elemeinek hatására jön létre. Csillapítás által a mechanikai energia egy része átalakul hővé, elvonódik a rendszerből. Az erőt, amely ezt az energiacsökkenést létrehozza **disszipációs erőnek (F_d)** nevezzük $P_d = \underline{F_d}\,\underline{v}$, a disszipációs erő teljesítménye F_d és v ellentétes irányúak
Csillapítás közegellenállás esetén	$\boldsymbol{F_d = k\|v\|^n sgn\, v}$, ahol sgn v értéke -1, ha a v<0 és +1 ha v>0 k – csillapítási tényező [Ns/m]
	a) Gázok esetén légellenállásról beszélünk, ekkor n=2 $$F_d = k\|v\|^2 sgn\, v$$ v=0 környékén F_d értéke 0, vagyis a légellenállást kis sebességeknél elhanyagoljuk. Nagyobb sebességeknél nem lehet elhanyagolni.
	b) Folyadékok esetén: - turbulens áramlásnál: n=1.75-2, vagyis a légellenállás esetéhez hasonlóan elhanyagolható - lamináris áramlásnál: n=1 $$F_d = k\|v\|^1 sgn\, v$$ Itt az F_d lineárisan változik v függvényében. - kis áramlási sebességek, viszkózus anyagok, vékony folyadékréteg lineáris csillapítást produkálnak - ezt az esetet viszkózus csillapításnak is nevezzük (nagy jelentősége van a mérnöki gyakorlatban)

Csillapítás	c) Szilárd csillapítás – Coulomb csillapítás, n=0 $$F_d = k\|v\|^0 sgn\ v = \mu N sgn\ v$$ μN – Coulomb súrlódási erő, μ – csúszósúrlódási együttható - a Coulomb súrlódás nem függ a felületek nagyságától, úgy viselkednek a súrlódó testek, mintha 1 pontban érintkeznének - ellentétes az elmozdulással - csak akkor lép fel, ha van aktív erő, ami elmozdítja a testet
Viszkózus csillapított 1DoF lengőrendszer	- F_d és F_r ellentétes az elmozdulással, a rugóval és lengéscsillapítóval modellezett rendszer jellemzői s és k, rugómerevség és csillapítási tényező $$ma = -F_r - F_d$$ $$m\ddot{x} = -sx - k\dot{x}$$ $$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{s}{m}x = 0$$ $$\boldsymbol{\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = 0}$$ ahol: $\boldsymbol{D = \frac{k}{2m\alpha}}$ **relatív csillapítási tényező,** mértékegység nélküli - karakterisztikus egyenlet: $\boldsymbol{\lambda^2 + 2D\lambda\alpha + \alpha^2 = 0}$ - karakterisztikus gyökök: $\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1}$ - ha: $0 \leq D < 1$, akkor a gyökök komplexek - ha: $D \geq 1$, akkor a gyökök valósak

a) Alulcsillapított rendszer (gyenge csillapítás) D<1 és D≥0

$$\sqrt{D^2-1}\in\mathbb{C}$$

$$i\alpha\sqrt{1-D^2}=i\gamma$$

ahol **γ – a csillapított rendszer saját körfrekvenciája**

$$\lambda_{1,2}=-D\alpha\pm i\gamma$$

Általános megoldás:

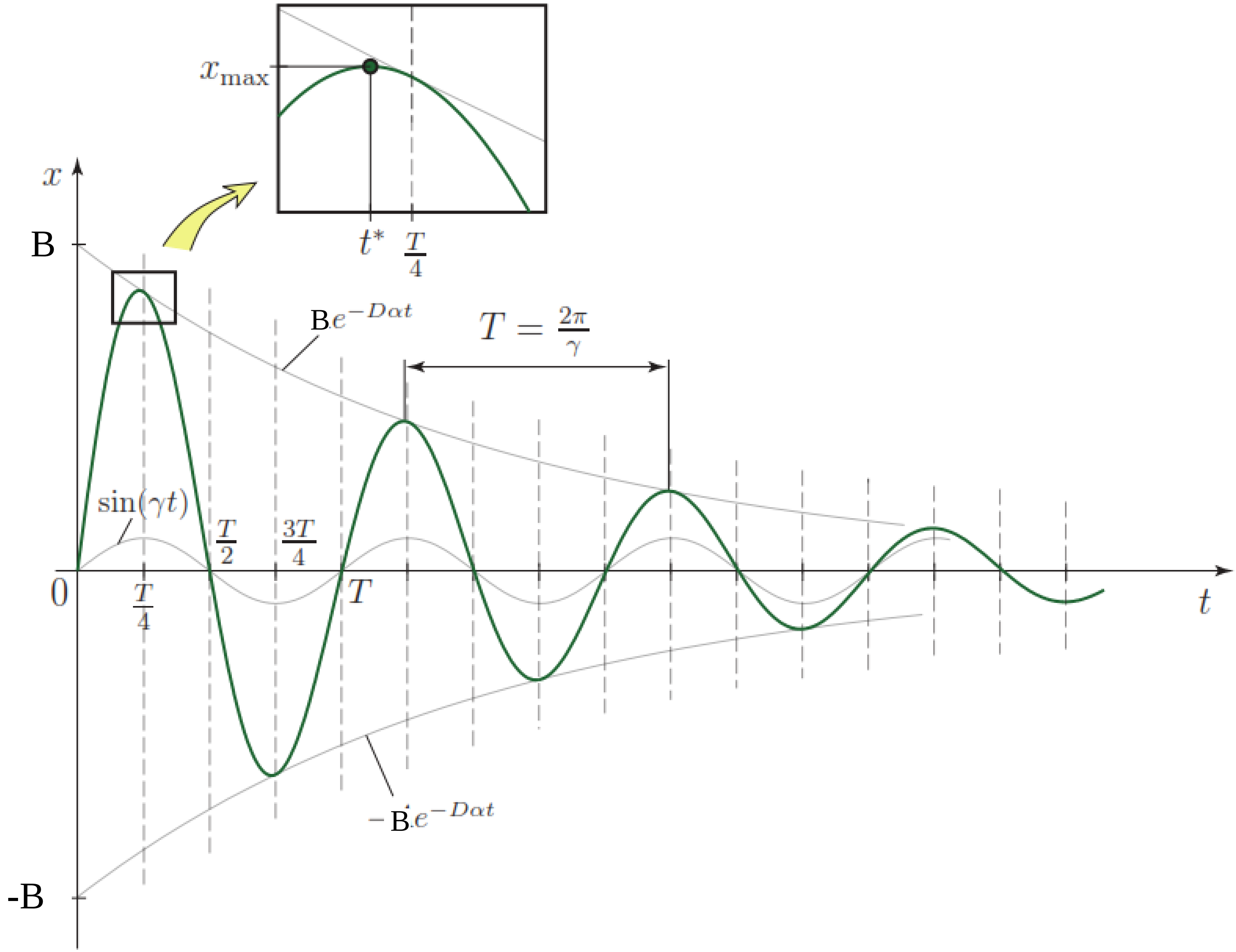
$$x(t)=c_1e^{-D\alpha t}\cos(\gamma t)+c_2e^{-D\alpha t}\sin(\gamma t)$$

Speciális megoldás:

$x(0)=c_1=0$, így válasszuk meg

$\dot{x}(0)=c_2\gamma=v_0$, innen $c_2=\frac{v_0}{\gamma}$

$$\boldsymbol{x(t)=\frac{v_0}{\gamma}e^{-D\alpha t}\sin(\gamma t)}$$



$x_{\max}$
t^*
$\frac{T}{4}$
x
B
$Be^{-D\alpha t}$
$T = \frac{2\pi}{\gamma}$
$\sin(\gamma t)$
$\frac{T}{2}$
$\frac{3T}{4}$
0
$\frac{T}{4}$
T
t
$-Be^{-D\alpha t}$
-B

b) Kritikus csillapítás D=1

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1}$$

$$\boldsymbol{D = 1, \quad \lambda_{1,2} = -\alpha}$$

Általános megoldás:

$$\boldsymbol{x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\alpha t}}$$

Kezdeti feltételek:

$x(0) = x_0 = c_1$

$\dot{x}(0) = c_1(-\alpha) + c_2 = v_0$, innen $c_2 = v_0 + x_0\alpha$

Valójában nem jön létre rezgés, egy periódus alatt lecseng, a T periódust itt T_c időállandónak nevezzük. Azt az időtartamot fogja megadni, amely alatt e-ed részére csökken a csillapítás.

c) Túlcsillapítás (erős csillapítás) D>1

$$\lambda_{1,2} = -D\alpha \pm \alpha\sqrt{D^2 - 1} = \alpha(-D \pm \sqrt{D^2 - 1})$$

Általános megoldás:

$$x(t) = e^{\alpha t}\left(A_1 e^{(-D+\sqrt{D^2-1})} + A_2 e^{(-D-\sqrt{D^2-1})}\right)$$

Ha D>1, akkor $-1 < \left(-D + \sqrt{D^2 - 1}\right) < 0, vagyis\ -\alpha < \lambda_1 < 0$ (beszorozzuk α-val)

És $\left(-D - \sqrt{D^2 - 1}\right) < -1, vagyis \quad \lambda_2 < -\alpha$

Tehát: $\boldsymbol{\lambda_2 < -\alpha < \lambda_1 < 0}$, így $e^{\lambda_1 t}$ lassabban és $e^{\lambda_2 t}$ gyorsabban cseng le, mint a $e^{-\alpha t}$.

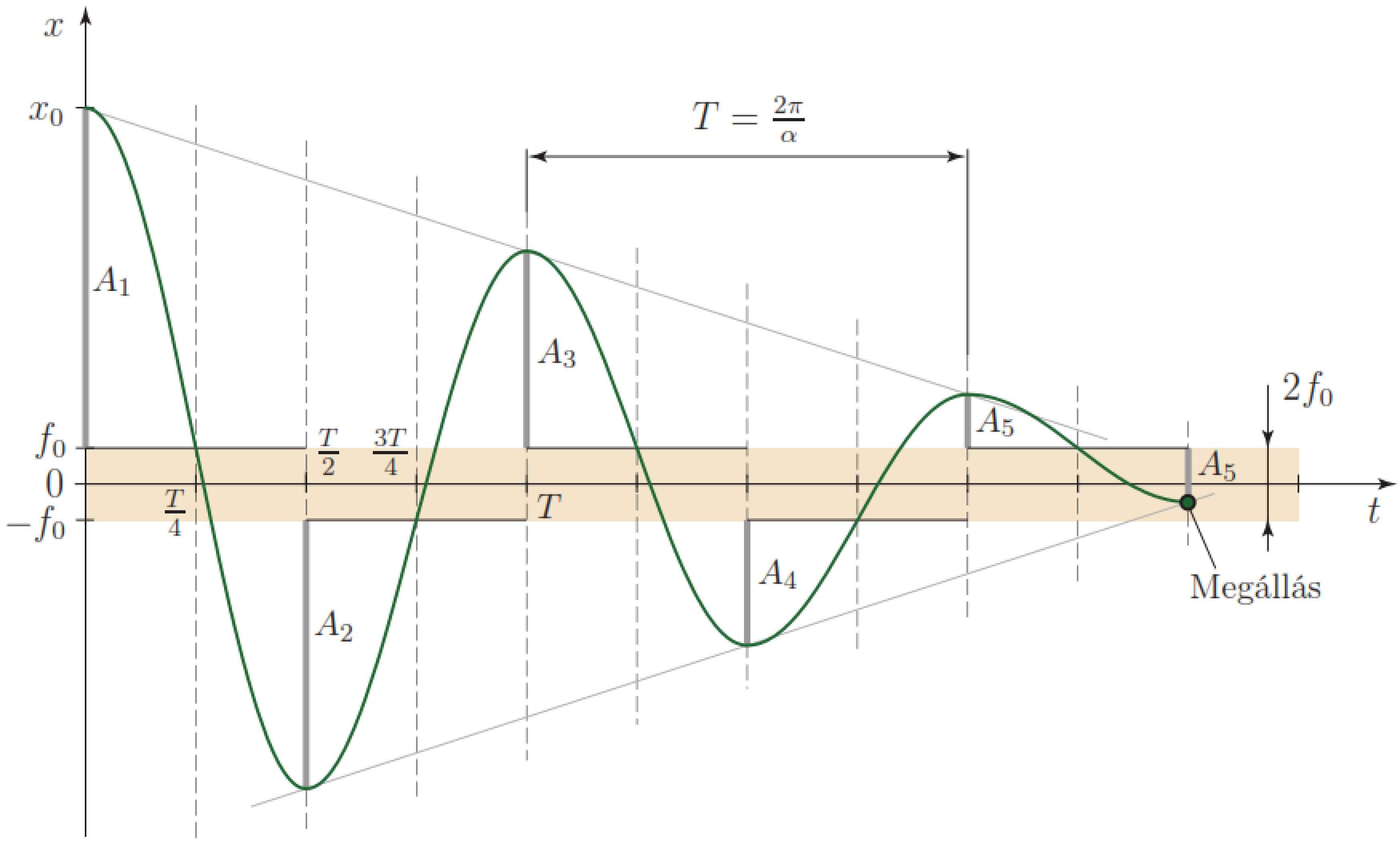
Tehát D>1 esetben a csillapítás nagyobb, mint a D=1 esetben

Száraz (Coulomb) csillapítás	- általában a viszkózussal együtt lép fel $$\boldsymbol{F_d = k\lvert v\rvert^0 sgn\, v = \mu N sgn\, v}$$ μN – Coulomb súrlódási erő, μ – csúszósúrlódási együttható - a súrlódási erő és a felületeket összenyomó (támasztó) erő arányosak $$F_S = \mu N sgn\,(\dot{x})$$ $$sgn(\dot{x}) = \begin{cases} 1, ha\ \dot{x} > 0 \\ -1, ha\ \dot{x} < 0 \\ \in (-1{,}1), ha\ \dot{x} = 0 \end{cases}$$ Ha $sgn\,(\dot{x}) \in (-1{,}1)$ és v=0, akkor tapadásról beszélünk. Az $F_{tapadás}$ µN és -µN között akkora értéket vesz fel, amekkora ahhoz kell, hogy a többi testre ható erővel egyensúlyt tartson $$m\ddot{x} = -sx - F_S$$ $$m\ddot{x} + sx = -\mu mg sgn\,(\dot{x})\text{, mert N=G}$$ - a nemlineáris tag miatt a megoldás menete hasonló a gravitáció hatásánál látottakéhoz $$\boldsymbol{\ddot{x} + \alpha^2 x = -f_0 \alpha^2 sgn(\dot{x})}$$ ahol f_0 – a rugó deformációját adja meg: STATIKUS DEFORMÁCIÓ. Egyensúly esetén: $\boldsymbol{x \epsilon (-f_0, f_0)}$. Ezen belül bárhol letapadhat és megállhat. **Kezdeti feltételek:** $x(0) = x_0$ $\dot{x}(0) = v_0$

Első féllengés	Első féllengés - kitérített helyzetből visszafele mozog - $v < 0 \quad \dot{x} < 0 \quad sgn\,(\dot{x}) = -1$ - $t \in [0, \frac{T}{2}]$ $$\ddot{x} + \alpha^2 x = f_0 \alpha^2$$ inhomogén egyenlet $$\boldsymbol{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$$ $$\boldsymbol{x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t) + f_0}$$ - az egyenletben a csillapítatlan rendszer saját körfrekvenciája jelenik meg, amelyet a csillapítás nem változtat meg. - **a speciális megoldás:** $$x(0) = x_0 = c_1 + f_0 \qquad \boldsymbol{c_1 = x_0 - f_0}$$ $$\dot{x}(0) = \alpha C_2 = v_0 \qquad c_2 = \frac{v_0}{\alpha}$$ - ha kitérített helyzetből indul v_0=0 sebességgel: $\boldsymbol{c_2 = 0}$ **Tehát:** $$\boldsymbol{x(t) = -C_1 \alpha\, sin(\alpha t) + C_2 \alpha\, cos(\alpha t) + f_0}$$ **- olyan, mintha f_0 körül (x_0-f_0) amplitudóval rezegne**

Második féllengés	- T/2-ben a két kitérés egyenlő - $v > 0 \quad \dot{x} > 0 \quad sgn\,(\dot{x}) = 1$ - $t \in [\frac{T}{2}, T]$ $\ddot{x} + \alpha^{2x} = -f_0\alpha^2$ inhomogén egyenlet $\boldsymbol{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$ $\boldsymbol{x(t) = C_1 \cos(\alpha t) + C_2 \sin(\alpha t) - f_0}$ - az egyenletben a csillapítatlan rendszer saját körfrekvenciája jelenik meg, amelyet a csillapítás nem változtat meg. - **a speciális megoldás:** $x\left(\frac{T}{2}\right) = -c_1 - f_0$ $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = 0$ - **az első féllengésből:** $x\left(\frac{T}{2}\right) = -x_0 + 2f_0$ $\dot{x}\left(\frac{T}{2}\right) = c_2$

Második féllengés	- Innen: $\boldsymbol{c_1 = x_0 - 3f_0}$ é$\boldsymbol{s}$ $\boldsymbol{c_2 = 0}$ **Tehát:** $$\boldsymbol{x(t) = (x_0 - 3f_0)\,cos(\alpha t) - f_0}$$ - **olyan, mintha -f_0 körül (x_0-3f_0) amplitudóval rezeg** **Tehát:** $$B_n = B_1 - (n-1)2f_0; \quad n = 1,2,3$$ - -f_0 és f_0 között nem tud létrejönni rezgés. Ez a **bizonytalansági zóna, ahol** $\boldsymbol{f_0 = \frac{\mu mg}{s}}$



x
x_0
$T = \frac{2\pi}{\alpha}$
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5
A_5
$2f_0$
f_0
0
$-f_0$
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
$\frac{3T}{4}$
T
t
Megállás

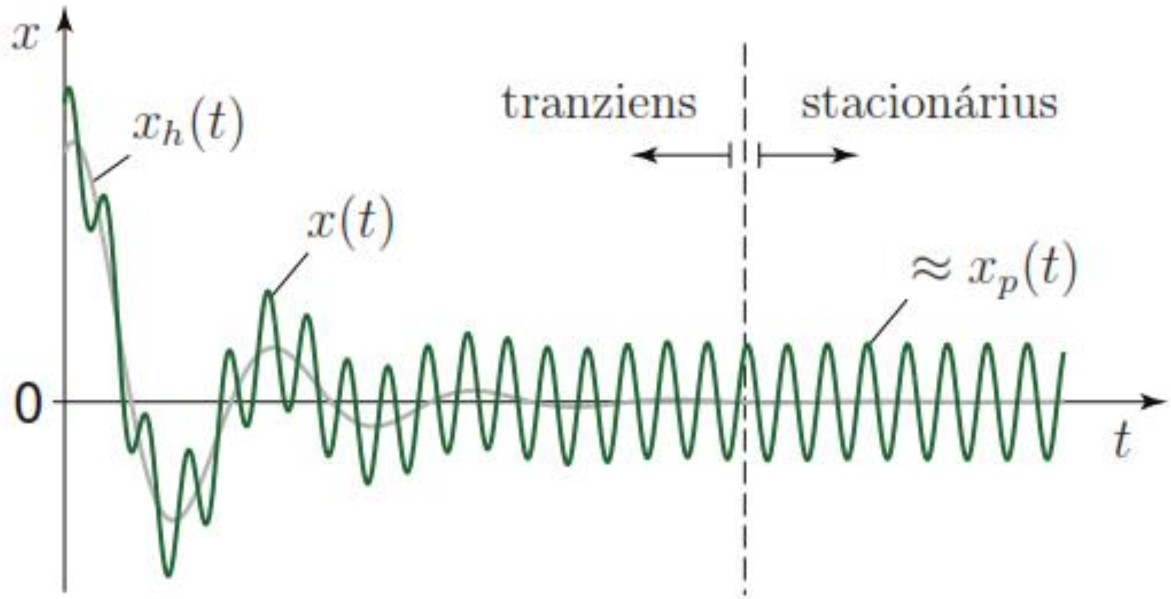
Gerjesztett rezgések	- a gerjesztést egy F(t) erővel vesszük figyelembe
	- típusai:
	    - tranziens gerjesztés, amelynek ideje rövid (pl. gépek ki-be kapcsolása), vagyis átmeneti
	    - sztochasztikus vagy véletlenszerű (pl. járművek rezgés gerjesztése úton) – analitikus megoldásuk általában nincs
	    - periódikus – ezen belül pedig harmonikus gerjesztés – matematikai megoldás van

Harmonikus gerjesztés	- a gerjesztés forrása szempontjából többféle lehet:
	    - erőgerjesztés
	    - útgerjesztés
	    - kiegyensúlyozatlan forgórész általi gerjesztés

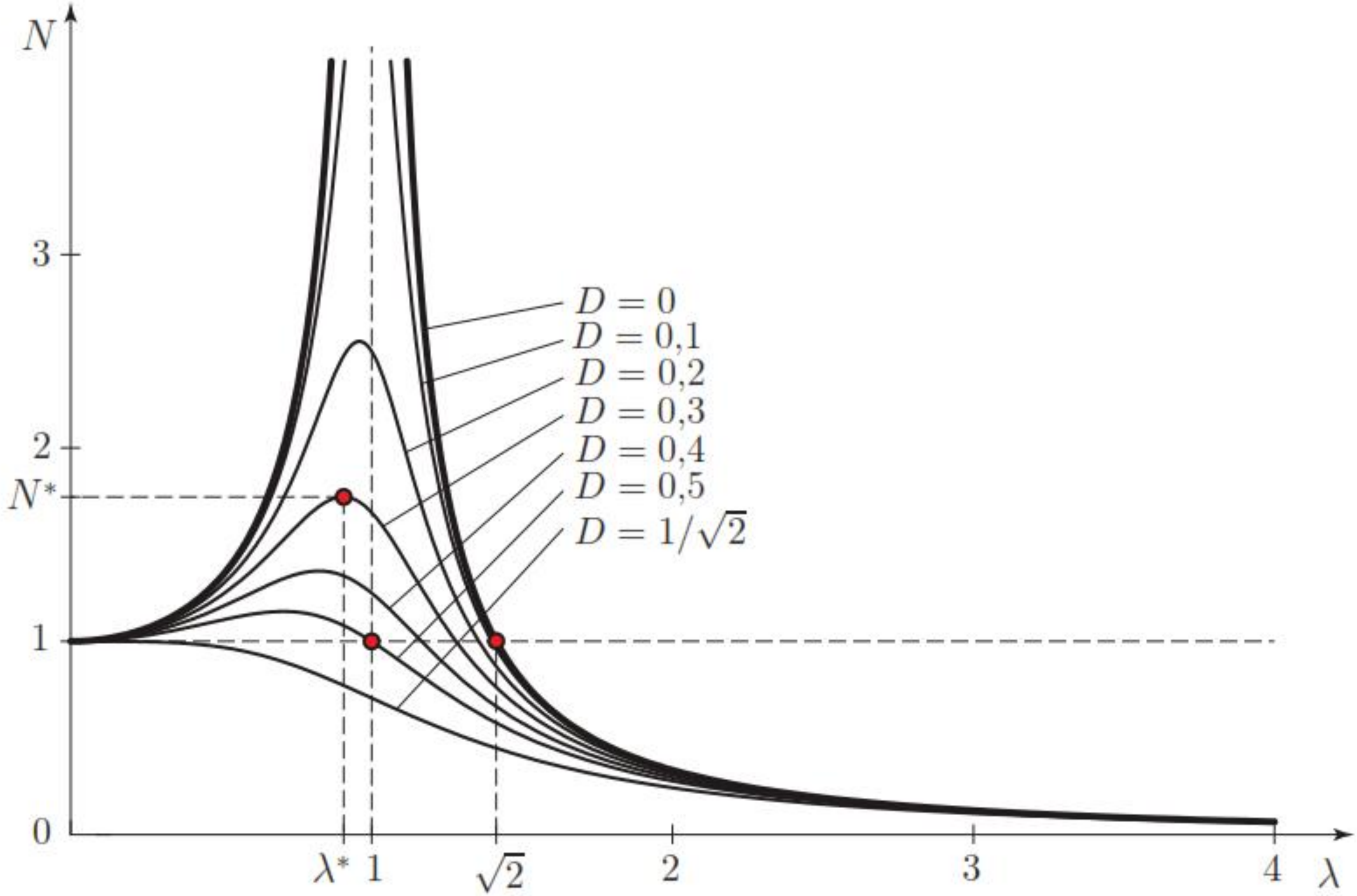
Erőgerjesztés	- a lengőrendszerre külső erő vagy nyomaték hat - s - rugómerevség - k – csillapítási tényező - ω – a gerjesztés körfrekvenciája - F_0 – a gerjesztés amplitúdója $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ $m\ddot{x} + k\dot{x} + sx = F_0 \cos(\omega t)$ inhomogén differenciál egyenlet a jobb oldal az idő periodikus függvénye

Erőgerjesztés	- saját körfrekvencia és relatív csillapítási tényező figyelembevételével: $$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2 \cos(\omega t)$$ ahol $f_0 = \frac{F_0}{m\alpha^2} = \frac{F_0}{s}$, STATIKUS DEFORMÁCIÓ, ha ω=0. Ilyenkor a cos()=0, f_0 pedig megmutatja, hogy a rugó mennyire fog megnyúlni F_0 amplitudójú erő hatására **Általános megoldás:** $\boldsymbol{x(t) = x_H(t) + x_P(t)}$ $$\boldsymbol{x_H(t) = c_1 e^{-D\alpha t}\cos(\gamma t) + c_2 e^{-D\alpha t}\sin(\gamma t)}$$ $\alpha\sqrt{1-D^2} = \gamma$, ahol γ – a csillapított rendszer saját körfrekvenciája, D a relatív csillapítási tényező $$\boldsymbol{x_P(t) = K\cos(\omega t) + L\sin(\omega t)}$$ alakú próbafüggvény - kiszámítjuk a partikuláris megoldás első és másodrendű deriváltját, visszahelyettesítjük, amiből K és L értékére a következőket kapjuk: $K = \frac{1-\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2+4D^2\alpha^2} f_0$ és L= $\frac{2D\alpha}{(1-\lambda^2)^2+4D^2\alpha^2} f_0$ **NINCS REZONANCIA** ahol $\boldsymbol{\lambda = \frac{\omega}{\alpha}}$ **frekvenciahányados** (milyen viszonyban áll a gerjesztés frekvenciája a csillapítatlan rendszer saját körfrekvenciájával) - ha $(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\alpha^2 = 0$, vagyis λ=1 és D=0 matematikai értelemben vett **REZONANCIA** van - mérnöki értelemben akkor is rezonancia van, ha 1 és 0-hoz közeliek az értékek

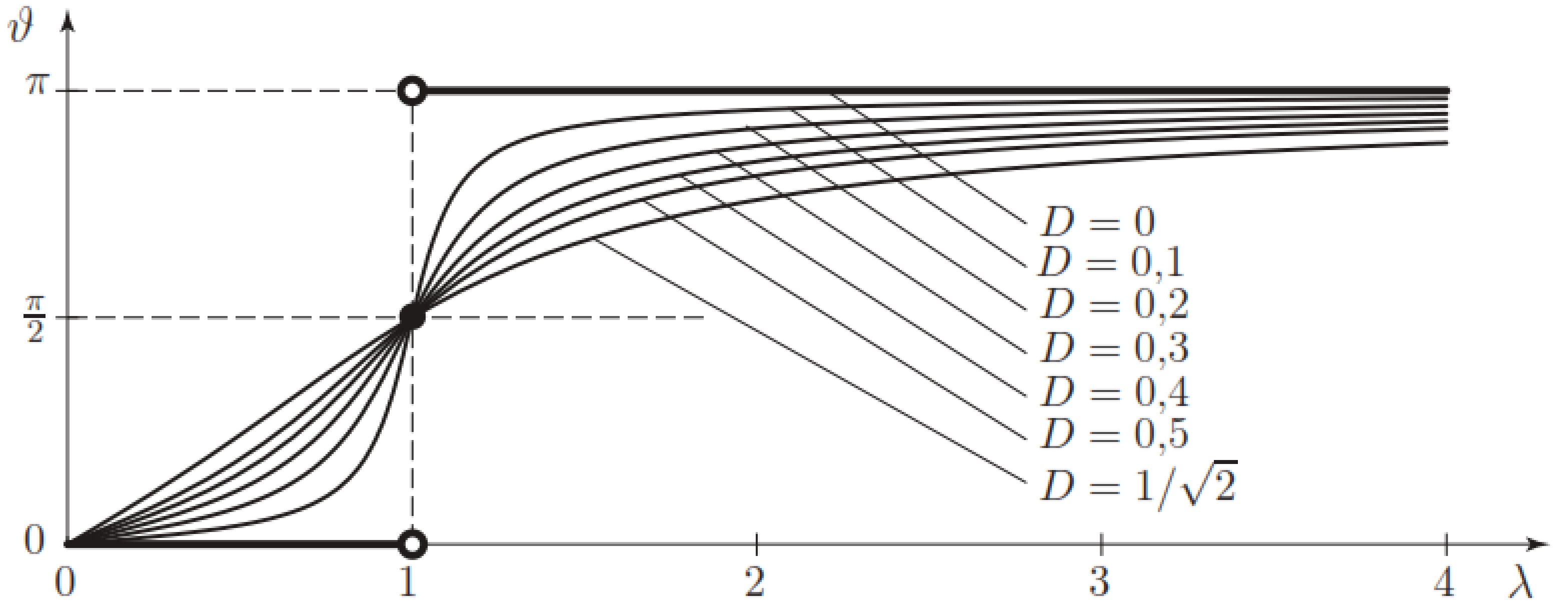
Erőgerjesztés	- ha a partikuláris megoldást a korábban ismertetett alakban adjuk meg: $$x_P(t) = X cos(\omega t - \theta)$$ ahol **X az állandósult állapot amplitúdója és θ a fáziskésés** (kialakuló rezgés késése a gerjesztéshez képest), akkor ebből megkapható az X és θ értéke: $$X = \frac{f_0}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4D^2\alpha^2}} = Nf_0$$ ahol N nagyítás megadja, hogy hányszor akkora a harmonikusan gerjesztett rendszer maximális kitérése, mintha F_0 állandó erő hatna rá $$tg\theta = \frac{2D\lambda}{1-\lambda^2}$$



x
$x_h(t)$
$x(t)$
tranziens
stacionárius
$\approx x_p(t)$
0
t



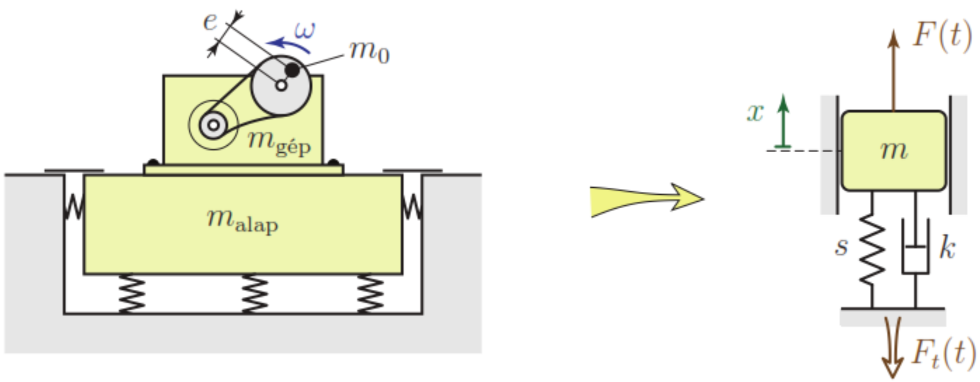
N
3
2
N^*
1
0
$D = 0$
$D = 0{,}1$
$D = 0{,}2$
$D = 0{,}3$
$D = 0{,}4$
$D = 0{,}5$
$D = 1/\sqrt{2}$
λ^*
1
$\sqrt{2}$
2
3
4
λ



ϑ
π
π/2
0
0
1
2
3
4
λ
D = 0
D = 0,1
D = 0,2
D = 0,3
D = 0,4
D = 0,5
D = 1/√2

Útgerjesztés	- rugón, lengéscsillapítón keresztül vagy mindkettőn keresztül - itt az erőkifejtés helyett a rugó egyik végpontja mozdul el **rcos(ωt)** függvénnyel - a rugó másik végét az m tömegű test mozgatja $$ma = -F_d - F_r$$ - F_d – csillapító erő, F_r – elmozdulást okozó erő $$m\ddot{x} = -k\dot{x} - s(x - rcos(\omega t))$$ $$\ddot{x} + \frac{k}{m}\dot{x} + \frac{s}{m}x = \frac{sr}{m}cos(\omega t)$$ $$\ddot{x} + 2D\alpha\dot{x} + \alpha^2 x = f_0\alpha^2\cos(\omega t)$$ ahol f_0=r, az útgerjesztés amplitúdója

Rezgésszigetelés	- aktív: a környezetet kell védeni a rezgéstől. Itt a környezetnek átadott erőt kell minimalizálni - passzív: valamilyen gépet/berendezést kell védeni a rezgéstől, a berendezés rezgését kell minimalizálni



Aktív

Passzív