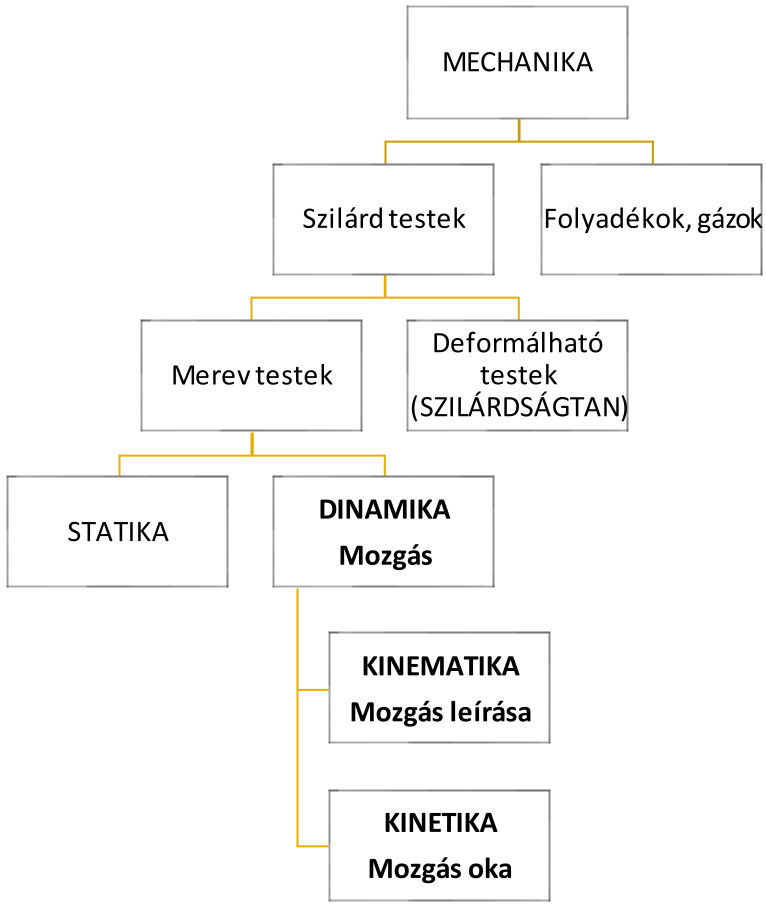
DINAMIKA
Kinematika

PTE, Műszaki és informatikai kar

Építőmérnök BSc, Szerkezet-építőmérnök Premaster

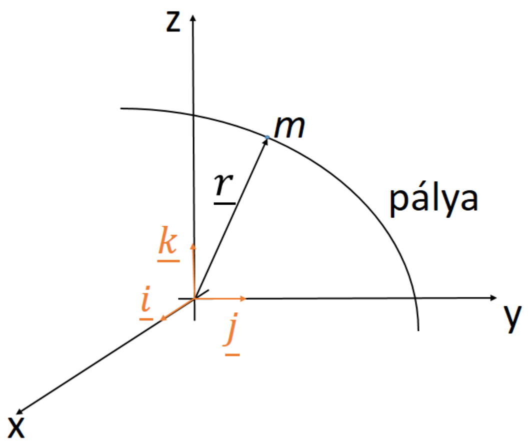
2019-2020
JEGYZET
Len Adél, PhD

Anyagi pont kinematikája
Összefoglaló



Kinematika: a mozgás leírása

Anyagi pont: geometriai pont a térben, mely fizikai jellemzőkkel bír (hőmérséklet, sebesség, gyorsulás, tömeg). Úgy definiáljuk, hogy megadjuk a helyzetét térben (vektor) és időben.



$$\underline{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$$

$\underline{r}$ – *helyzetvektor*

$\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ – *egységvektorok*

$\langle r \rangle = [m]_{SI}$

m – anyagi pont tömege

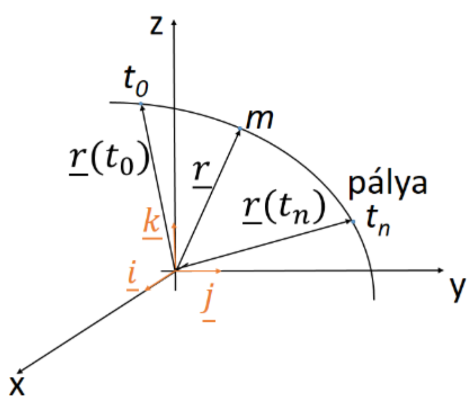
$\langle m \rangle = [kg]_{SI}$

$|\underline{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Mozgástörvény: leírja a helyzetvektor időbeni változását

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

A pálya a mozgástörvény grafikonja.



t – idő

$\langle t \rangle = [s]_{SI}$

t_0 - kezdő időpont

t_n - végső időpont

$\underline{r}(t)$ – *helyzetvektor időfüggése*

Szabadsági fok **(DoF – Degrees of Freedom)**: független skalárfüggvények száma, amelyekkel egyértelműen meghatározható az anyagi pont mozgása

Anyagi pont egyenes mentén való mozgása (1D): DoF = 1

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Anyagi pont síkmozgása (2D): DoF = 2

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

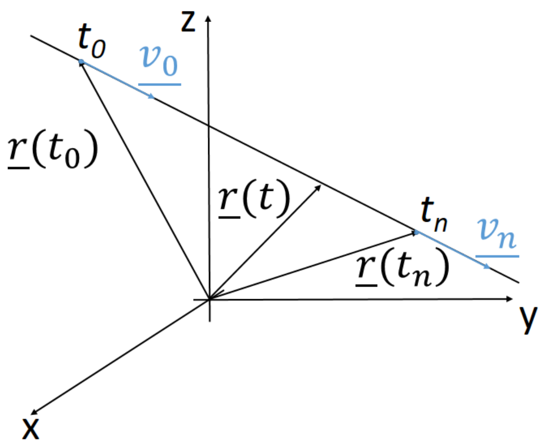
Anyagi pont térben való mozgása (3D): DoF = 3

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

Speciális mozgástípusok

Egyenes vonalú, egyenletes

Egyenes vonalú: a pálya egyenes (1D)
Egyenletes: nincs gyorsulás, sebesség: állandó
$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v_0}(t - t_0)$



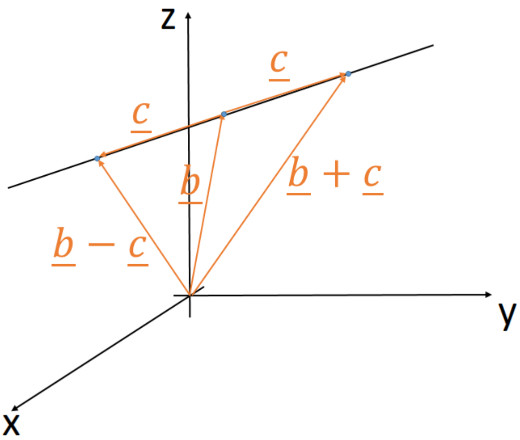
Egyenes vonalú, nem egyenletes

Egyenes vonalú: a pálya egyenes (1D)
Nem egyenletes: változó sebesség

Példa: $\underline{r}(t) = \underline{b} + \underline{c}\sin(\omega t)$

ω – szögsebesség

$\langle\omega\rangle = [\mathrm{rad/s}]_{\mathrm{SI}}$



$$\underline{r}(0) = \underline{b}$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega} \qquad \underline{r}(t_1) = \underline{b} + \underline{c}$$

$$t_2 = \frac{\pi}{\omega} \qquad \underline{r}(t_2) = \underline{b} = \underline{r}(0)$$

$$t_3 = \frac{3\pi}{2\omega} \qquad \underline{r}(t_3) = \underline{b} - \underline{c}$$

Egyenes vonalú, egyenletesen változó

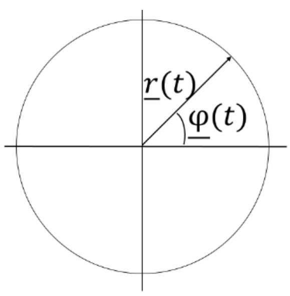
Egyenes vonalú: a pálya egyenes (1D)
Egyenletesen változó: gyorsulás: állandó. Lehet pozitív (gyorsuló mozgás) vagy negatív (lassuló mozgás).

$$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{a}(t - t_0)$$

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}_0\,(t - t_0) + \frac{\underline{a}(t - t_0)^2}{2}$$

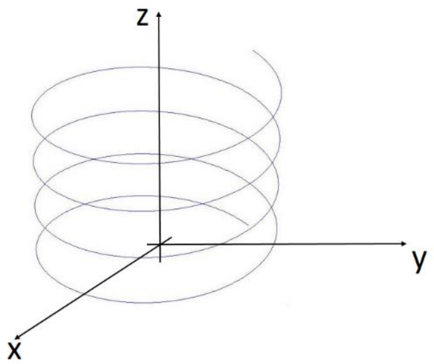
Körmozgás: egyenletes vagy nem egyenletes

Pálya: R sugarú kör
φ(t) – szög, idő függvényében



Csavarvonalú mozgás

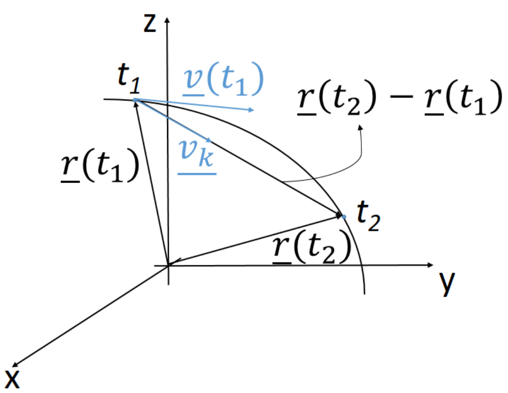
Körmozgás és egyenes vonalú mozgás összetétele



Közepes sebesség vektor

Vektor!
Iránya: húrmenti (párhuzamos az $\left(\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)\right)$ vektorral)

$$\underline{v}_k = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$



Pillanatnyi sebesség: a helyzetvektor idő szerinti deriváltja egy adott pillanatban

Vektor!
Iránya: érintő a pályához

$$\underline{v}(t) = \frac{dr}{dt} = \underline{\dot{r}}(t)$$

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$|\underline{v}| = v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$$

$$\langle v \rangle = [m/s]_{SI}$$

Gyorsulás: a sebességvektor idő szerinti deriváltja

Vektor!

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{\underline{r}}(t)$$

$$\underline{a}(t) = \begin{bmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix}$$

$$|\underline{a}| = a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$$

$$\langle a \rangle = [m/s^2]_{SI}$$

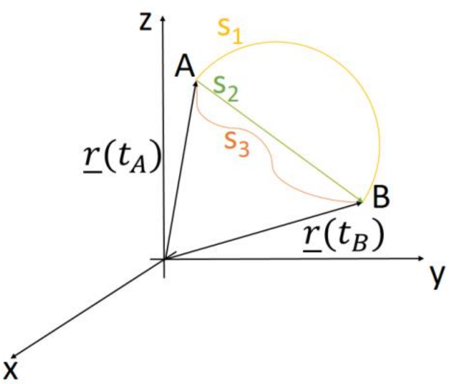
Befutási törvény, egységvektorok, görbület

Befutási törvény: befutott ívhossz időbeni változása a pálya mentén

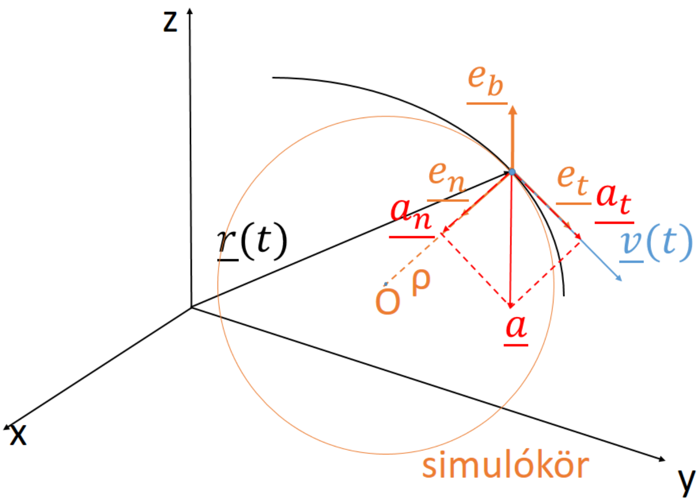
$s(t)$ - ívhossz, Skalár!

$\underline{r}(s)$ – ívhossz szerint paraméterezett pálya (térképészet)

$\underline{r}(s(t))$ – mozgástörvény. Behelyettesítjük a saját befutási törvényünket



$$\Delta\underline{r} = \underline{r}(t_B) - \underline{r}(t_A)$$
$$\Delta r_{s1} = \Delta r_{s2} = \Delta r_{s3}$$
$$s_1 \neq s_2 \neq s_3$$
$$\underline{r}(s_1(t_1)) \neq \underline{r}(s_2(t_2)) \neq \underline{r}(s_3(t_3))$$



O – pillanatnyi görbületi középpont (a simulókör középpontja)

ρ – görbületi sugár (simulókör sugara)

$\langle \rho \rangle = [\mathrm{m}]_{\mathrm{SI}}$

$(\underline{e}_t, \underline{e}_n)$ – *simulósík*

$(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_b)$ – *kísérő triéder (természetes koordinátarendszer)*

$\underline{e}_t$ - *tangenciális egységvektor*

$\underline{e}_n$ - *normális egységvektor*

$\underline{e}_b$ - *binormális egységvektor*

Egységvektorok: $\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_b$

$\underline{e}_t \perp \underline{e}_n \perp \underline{e}_b$ – egymásra merőlegesek

$|\underline{e}_t| = |\underline{e}_n| = |\underline{e}_n| = 1$

$\underline{e}_b = \underline{e}_n \times \underline{e}_t$

Görbület: jellemzi a pályát

$\frac{1}{\rho}$ - görbület

Ha a pozícióvektort deriválom az ívhossz szerint, akkor mindig az érintőmenti (tangenciális) egységvektort kapom.

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{e}_t$$

$(\underline{e}_t, \underline{e}_n)$ által kifeszített síkor simulósíknak nevezzük.

Ha a pozícióvektort kétszer deriválom az ívhossz szerint:

$$\frac{d\underline{r}^2}{ds^2} = \frac{d\underline{e}_t}{ds}$$

A tangenciális egységvektor ívhossz szerinti deriváltja pedig megadja, hogy mennyire görbült a pálya egy adott pontban. Ezt a görbület segítségével számolhatom ki.

$$\frac{d\underline{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\underline{e}_n$$

A térgörbe minden pontjához hozzárendelhető egymásra páronként merőleges egységvektor, amit kísérő triédernek hívunk. Ez együtt mozog az anyagi ponttal.

Pályasebesség: a pályasebesség a sebességvektor abszolút értéke. Skaláris mennyiség.

Skalár!

$v(t) = \dot{s}$ - sebességmérő által mutatott érték (km/h)

$$\underline{v}(t) = \underline{\dot{r}}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}(s(t))\right) = \frac{d\underline{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\underline{e}_t$$

$$\frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{e}_t$$

$$\frac{d\underline{r}^2}{ds^2} = \frac{1}{\rho}\underline{e}_n$$

$\langle \dot{s} \rangle = [\mathrm{m/s}]_{\mathrm{SI}}$ *(speed, a kilóméteróra értéke)*

Sebességvektor: $\underline{v}(t) = \dot{s}\underline{e}_t$ Tehát a sebességvektor mindig tangenciális irányú.

Tangenciális és normálgyorsulás

$$\underline{a}(t) = \underline{\ddot{r}}(t) = \frac{d}{dt}\left(\underline{\dot{r}}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}(t)\underline{e}_t(s(t))\right) = \ddot{s}\underline{e}_t + \dot{s}\frac{d}{dt}\underline{e}_t\left(s(t)\right) = \ddot{s}\underline{e}_t + \dot{s}\frac{d\underline{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$\underline{a}(t) = \ddot{s}\underline{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{e}_n$$

$\underline{a}_t = \ddot{s}\underline{e}_t \qquad a_t = \ddot{s}$ Irány: érintőmenti

$\underline{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{e}_n = \frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \qquad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}$ Irány: görbületi középpont felé mutat

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_t + \underline{a}_n = a_t\underline{e}_t + a_n\underline{e}_n$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

A tangenciális vagy pályagyorsulás nagysága a sebesség nagyságának változását méri.
A normálgyorsulás a sebesség irányának változását méri.
A gyorsulásvektor a simulósíkban fekszik.

Foronómiai görbék

s(t), v(t), a_t(t), a_n(t) út, sebesség, gyorsulás grafikonok az idő függvényében

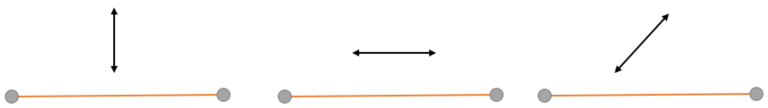
Példa: az emberek a simulósíkban ülnek, fejük a normális gyorsulás irányában, a görbületi középpont felé mutat

Merev test kinematikája
Összefoglaló

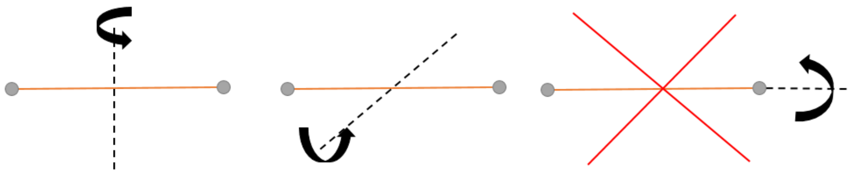
Merev test: Folytonos anyagi pontrendszer, ahol az anyagi pontok egymástól való távolsága időben állandó

Merev test szabadság fokainak száma: DoF=6

1 anyagi pont: DoF = 3
2 (egymástól független) anyagi pont: DoF = 2x3 = 3
2 egymással rúddal összekötött anyagi pont: DoF = 2x3 – 1 = 5 (egymáshoz képest nem mozdulhatnak el, 1 szabadsági fokot veszünk el)



x, y, z irányú transzlációs mozgás



forgó mozgás a rúdra merőleges tengelyek körül

A két anyagi pont nem fordulhat el önmaga körül, ezért a rúd tengelye mentén való elforgatás nem jelent szabad mozgást.

3 egymástól független anyagi pont: DoF = 3x3 = 9
3 egymással rudakkal (3 rúd szükséges) összekötött anyagi pont: DoF = 3x3 – 3 = 6

4 pontra: DoF = 4x3 – 4 = 6

Minden további anyagi pont és a hozzá tartozó 3 rúd hozzáadása ugyanannyi szabadságfokot ad, mint amennyit elvesz.
Tehát a merev test szabadságfokainak a száma a térben: DoF = 6.
Ebből az is következik, hogy 3 független anyagi pont meghatárpz egy merev testet.
A síkban mozgó merev test szabadságfokainak száma: DoF = 3 (2 transzlációs, 1 rotációs mozgás)

Szögsebesség (ω): a szögsebesség megadja azt, hogy a merev test pontjai mekkora sebességgel (ugyanakkora) forognak egymás körül.

A merev test minden pontjának azonos a szögsebessége!

Kinematikai vektorkettős

$\left[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_A\right]_A$ - leírja a merev test mozgását (3+3 komponens, DoF=6)

Redukált képlet

$[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_A]_A$ -> $[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_B]_B$

$\underline{\boldsymbol{v}}_B = \underline{\boldsymbol{v}}_A + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{r}}_{AB}$

$(\underline{v}_B - \underline{v}_A) \perp (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$

Szöggyorsulás (ε) – térben

$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{d\underline{\underline{\omega}}}{dt}$

$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$

$\underline{\omega} \perp \underline{r}_{AB}$, and $\underline{\omega}^2 = \omega^2$

$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$

Szögvektor – síkmozgásnál, rögzített tengely körüli forgásnál:

$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\underline{\varphi}}}{dt}$

$\underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{\underline{\omega}}}{dt}$

Térben NINCS szögvektor!!!

Mozgások kategorizálása $[\underline{\omega}, \underline{v}_A]_A$ szerint (DoF=6)

A. ***Pillanatnyi (elemi) mozgások***

1. $\underline{\omega}\, \underline{v}_A = 0$

1.1 pillanatnyi nyugalom

1.2 elemi haladómozgás

1.3 elemi forgómozgás 1

1.4 elemi forgómozgás 2

2. $\underline{\omega}\, \underline{v}_A \neq 0$ *Elemi csavarmozgás*

B. ***Véges mozgások***

3. *Tartós nyugalom*
4. *Véges haladómozgás*
5. *Véges forgómozgás (álló tengely)*
6. *Gömbi mozgás*
7. *Síkmozgás*

1.1 Pillanatnyi nyugalom

$\underline{\omega} = 0, \underline{v}_A = 0$

Pl. varrógéptű két szélső helyzete

1.2 Elemi haladómozgás

$\underline{\omega} = 0, \underline{v}_A \neq 0$

$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$, de $\underline{\omega} = 0$

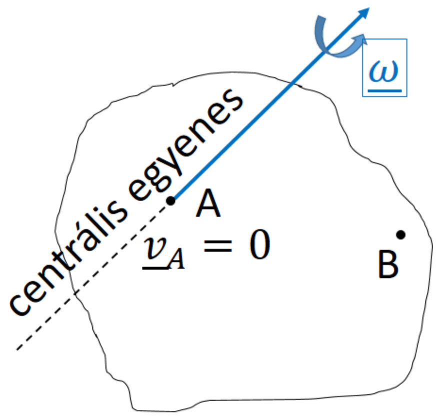
$\underline{v}_B = \underline{v}_A$, a merev test minden pontjára igaz, így a merev test minden pontjának azonos a sebessége

1.3 Elemi forgómozgás 1

$\underline{\omega} = 0, \underline{v}_A = 0$

A merev testnek van egy olyan A pontja, amelynek sebessége 0. Ez az A pont a centrális egyenesen helyezkedik el, amely körül **pillanatnyilag** úgy néz ki, mintha a merev test forogna.

Egy B pont sebessége: $\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$, ahol $\underline{v}_A = 0$
Tehát: $\underline{v}_B = \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$



1.4 Elemi forgómozgás 2

$\underline{\omega} \neq 0$, $\underline{v}_A \neq 0$, $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$

A statikában tanultakkal analóg módon itt is lehet találni egy olyan pontot, amelynek sebessége éppen 0, amire a statikában nyomaték számítható. Tehát ide kell áthelyezni az $\underline{\omega}$ vektort. Így tehát lehet találni egy $[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_A]_A$ - val ekvivalens $[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_P]_P$ vektorkettőst, ahol **P** sebessége: $\underline{\boldsymbol{v}}_P$ **=0.** P a centrális egyenes pontja lesz és **sebességpólusnak** nevezzük.

STATIKÁVAL analóg módon:

$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$, de $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$

$|\underline{\omega} \times \underline{v}_A| = \omega\, v_A \sin\frac{\pi}{2} = \omega\, v_A$, $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$

$r_{AP} = AP = \frac{v_A}{\omega}$

Olyan, mintha az A pont P körül forogna AP sugarú körön, ω-val.

Tehát:

$\underline{\omega} \perp \underline{v}_A \perp \underline{r}_{AP}$

A fentiekhez hasonlóan lehet találni egy $[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{A}}$ - val ekvivalens $[\underline{\boldsymbol{\omega}}, \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{G}}]_{\boldsymbol{G}}$ vektorkettőst is, ahol a **G gyorsuláspólus** és $\underline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{G}}$ **= 0**.

$\underline{r}_{AG} = \frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A + \omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

$\underline{r}_{AG}$ **- nek két komponense lesz:**

$\underline{a}_A$ - ra merőleges: $\frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

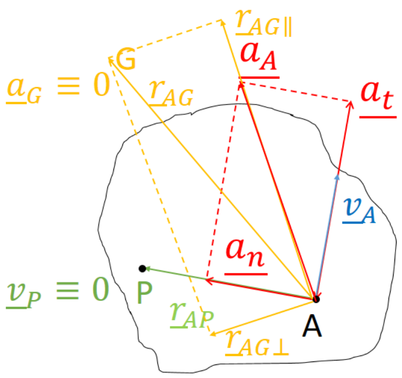
$\underline{a}_A$ - val párhuzamos: $\frac{\omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Ha:

$\underline{\varepsilon} \perp \underline{a}_A$, Pitagorasz tételéből megkapjuk az $\overline{AG}$ nagyságát: $\overline{AG} = r_{AG} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$

$a_A = r_{AG} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

$\underline{r}_{AG}$ és $\underline{a}_A$ közti α szögre: $tg\, \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

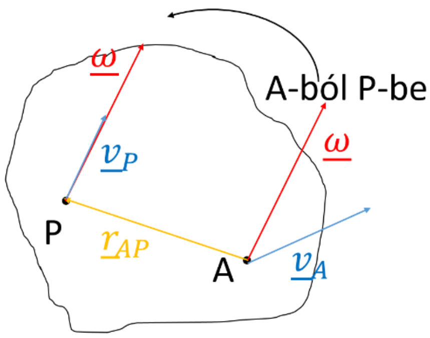


2. Elemi csavarmozgás

$\underline{\omega}\, \underline{v}_A \neq 0$, $\underline{\omega}$ *nem merőleges* $\underline{v}_A - ra$

Található valahol egy P pont, amibe, ha áthelyezzük az $\underline{\omega}$-át, akkor $\underline{\omega} \parallel \underline{v}_P$. A merev test ugyanabba az irányba halad ($\underline{v}_P$ sebességgel) mint amilyen irányba a szögsebesség vektor is mutat.

$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$



3. Tartós nyugalom (STATIKA)

$\underline{\omega}(t) = 0$

$\underline{v}_A(t) = 0$, $\underline{v}_B(t) = 0$, $\underline{v}_C(t) = 0$

4. Véges haladó mozgás

$\underline{\omega}(t) \equiv 0$

$\underline{v}_A(t)$ tetszőlegesen változhat

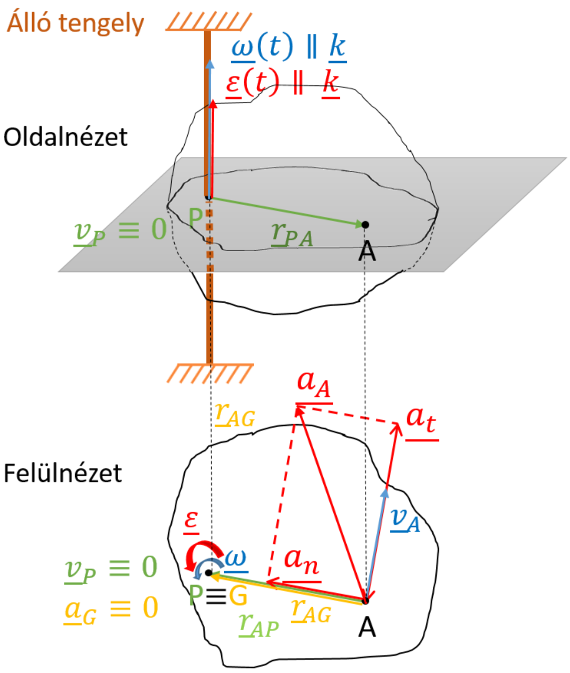
DoF=3, nem feltétlenül egyenes vonalú

Pl. óriáskerék kabinja

5. Álló tengely körüli forgás

$\underline{\omega}(t) \parallel \underline{k}$ – iránya állandó, nagysága változhat

Van egy P pont, aminek tartósan 0 a sebessége: $\underline{v}_P(t) \equiv 0$



$\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{P}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{PA}}$, $\underline{v}_P(t) = 0$

$\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{PA}}$

Ha a P pont sebessége tartósan: $\underline{v}_P(t) \equiv 0$, akkor a P pont gyorsulása is 0 lesz, $\underline{a}_P(t) \equiv 0$

Tehát a P és G egybeesnek! P≡G, $\underline{r}_{GA} = \underline{r}_{PA}$

Az A pont a P pont körül forog.

$\underline{a}_A = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{GA})$, de $\underline{\omega} \perp \underline{r}_{GA}$, tehát:

$\underline{a}_A = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} - \omega^2 \underline{r}_{GA}$, innen:

$\underline{a}_t = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA}$ **és** $\underline{a}_n = \omega^2 \underline{r}_{GA}$

$\underline{a}_A(t) = \underline{a}_t + \underline{a}_n$

$a_A = r_{AG}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

A merev test minden pontja körpályán mozog.

Ha minden körpályán mozog (álló tengely körüli forgás), akkor létezik szögvektor, de csak ebben a kivételes esetben!

Ekkor az A pont által befutott ívhossz:

$s(t) = r_{AP}\varphi(t) = R\varphi(t)$

$\dot{s}(t) = R\dot{\varphi}(t)$

$v(t) = R\omega(t)$

$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$

$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\varphi}}}$ **! Csak álló tengely körüli forgásnál! EKKOR:**

$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\boldsymbol{d\underline{\varphi}}}{\boldsymbol{dt}}$ **és** $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\boldsymbol{d\underline{\omega}}}{\boldsymbol{dt}}$

Ha $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ **– állandó, akkor az egyenes vonalú egyenletes mozgáshoz hasonlóan:**

$\underline{\boldsymbol{\omega}} = \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{0}} + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{0}})$

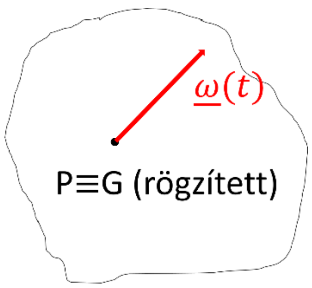
$\underline{\boldsymbol{\varphi}} = \underline{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{0}} + \underline{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{0}}\,(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{t}_{\boldsymbol{0}}) + \frac{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}_{\boldsymbol{0}})^{2}}{\boldsymbol{2}}$

6. Gömbi mozgás

$\underline{\omega}$(t) – tetszőleges, iránya változhat

P≡G=0, $\underline{v}_P(t) = 0$, $\underline{a}_P(t) = 0$

DoF=0, 3 tengely körüli forgás



7. Síkmozgás

Akkor beszélünk síkmozgásról, ha:

$\underline{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{t}) \| \underline{\boldsymbol{k}}$, és $\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}}$(t) $\perp \underline{\boldsymbol{k}}$

Tehát: $\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} \perp \underline{\boldsymbol{\omega}}$

Különbség az álló tengely körüli forgáshoz képest: nem egyik pontjának a sebessége 0, hanem legyen egy pontja, melynek a sebessége tartósan merőleges a $\underline{k}$ vektorra.

$\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}} = \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AB}}$, de $\underline{v}_A \perp \underline{k}$ és $(\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}) \perp \underline{k}$

Tehát:

$\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{B}} \perp \underline{\boldsymbol{k}}$

Vagyis: minden pontja a $\underline{k}$ vektorra merőleges síkban mozog.

Az elemi mozgásoknál látottak szerint, itt is van egy P sebességpólus és egy G gyorsuláspólus.

Ugyanazok a képletek érvényesek, csak itt időben tartós mozgásról van szó.

$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$, de $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$

$|\underline{\omega} \times \underline{v}_A| = \omega\, v_A \sin\frac{\pi}{2} = \omega\, v_A$

$r_{AP} = AP = \frac{v_A}{\omega}$

Olyan, mintha A a P körül forogna AP sugarú körön, ω szögsebességgel.

Tehát:

$\underline{\omega} \perp \underline{v}_A \perp \underline{r}_{AP}$

Ez bármely másik B pontra is igaz.

Gyorsulásokra is igazak az elemi forgómozgásnál felírt képletek.

A pont gyorsulása vektoriálisan:

$\underline{a}_A = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{GA})$

$\underline{a}_A = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} - \omega^2 \underline{r}_{GA}$

$\underline{r}_{AG} = \frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A + \omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

De:

$\underline{\varepsilon} \perp \underline{a}_A$, Pitagorasz tételéből megkapjuk az $\overline{AG}$ nagyságát:

$\overline{AG} = r_{AG} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}}$

$a_A = r_{AG}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$

$\underline{r}_{AG}$ és $\underline{a}_A$ közti α szögre: $tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

! Itt a G és P pontok nem esnek egybe!!!

DE!!!

Itt a gyorsulás két komponense nem lesz éppen az $\underline{a}_n$ normál gyorsulás és az $\underline{a}_t$tangenciális gyorsulás, mert az $\underline{a}_t$-t a sebességhez képest kell mérni, a sebesség pedig nem lesz merőleges az AG-re, mint az álló tengely körüli forgásnál. Vagyis az A pont esetén az $\underline{a}_t$ a $\underline{v}_A$ sebesség irányába mutat, az $\underline{a}_{nA}$-t rá kell vetíteni a $\underline{v}_A$ –ra merőleges irányra. Tehát a gyorsulás AG-vel párhuzamos és AG-re merőleges komponensei nem a normál és tangenciális komponensekkel lesznek azonosak.

Egy B pontra pedig:

$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$**, de** $\underline{\omega} \perp \underline{r}_{AB}$, tehát:

$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{BA} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$

Vagy

$\underline{a}_B = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GB} - \omega^2 \underline{r}_{GB}$

$\underline{a}_B = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GB} - \omega^2 \underline{r}_{GB}$ **és** $a_B = r_{GB}\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$, **és** $tg\,\alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

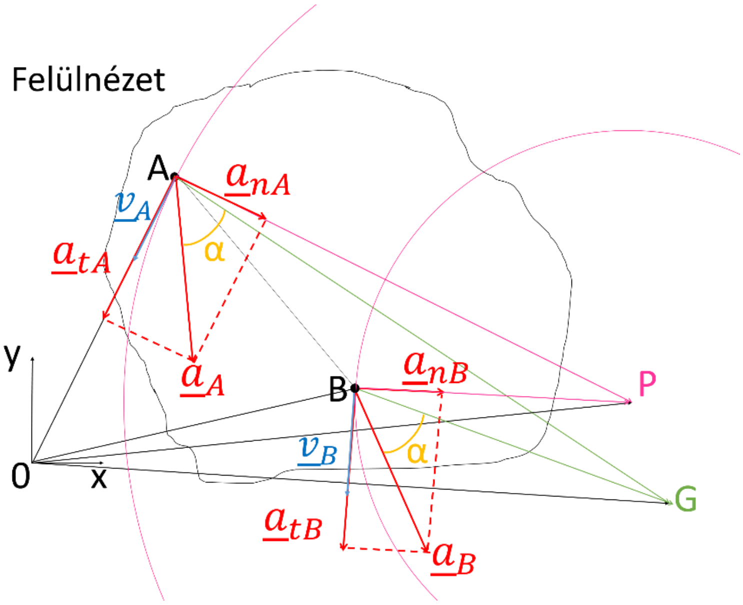
Görbületi középpont:

A simulókör középpontja se nem a P, se nem a G irányába mutat, hanem: merőleges ⊥ $\mathbf{v}_A$–ra és az $\underline{a}_{nA}$ – irányába mutat.

$\varphi = \frac{v^2}{a_n}$, nagysága

Álló tengely körüli forgásnál P, G, O_A egybeestek, de itt **NEM** esnek egybe.

A **sebességek szempontjából** olyan, mintha minden (A és B pont is) a P körül forogna (A és B körpályáját látjuk az alábbi ábrán, a körök középpontja: P), a **gyorsulások szempontjából** olyan, mintha minden a G körül forogna.



Az ábrán a jobb láthatóság szempontja miatt nem jelöltük az OA, OB, OP, OG, AB, AP, AG, BP és BG szakaszoknak megfelelő $\underline{r}_A$, $\underline{r}_B$, $\underline{r}_P$, $\underline{r}_G$, $\underline{r}_{AB}$, $\underline{r}_{AP}$, $\underline{r}_{AG}$, $\underline{r}_{BP}$ és $\underline{r}_{BG}$ vektorokat.

Jegyzet, tankönyv, felhasználható irodalom:

Györgyi József: Dinamika, Műegyetemi kiadó, 2003

Csizmadia B., Nándori E.: Mozgástan, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1997

Vértes Gy., Györgyi J.: Mechanika. Kinetika – kinematika, Műegyetemi kiadó, 1994

Vértes Gy., Györgyi J., Wolf K., Kinematikai és kinetikai példatár, Tankönyvkiadó, Budapest, 1994

Dr Csernák Gábor, Dr Stépán Gábor: A műszaki rezgéstan alapjai, BME, 2012 – elektronikus jegyzet

Orbán Ferenc: Mechanika III – elektronikus jegyzet
Orbán Ferenc: Rezgésdiagnosztika – elektronikus jegyzet

Béda – Bezák: Kinematika és dinamika, Műegyetemi kiadó, 1991

Béda: Lengéstan. Műegyetemi Kiadó