

Mechanika II

Kinematika

PTE, MŰSZAKI ÉS INFORMATIKAI KAR

ÉPÍTŐMÉRNÖKI BSc

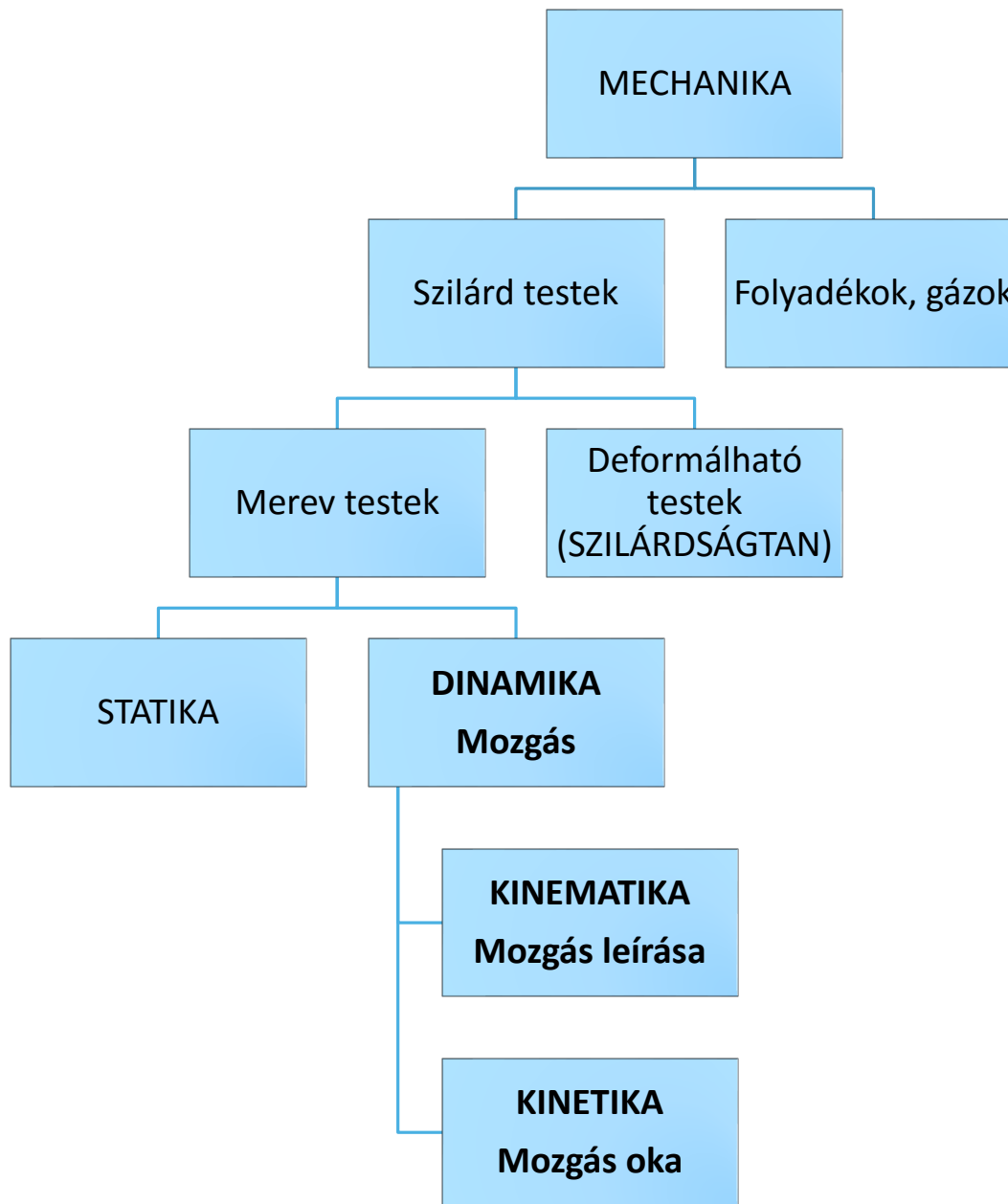
2018-2019 őszi szemeszter



KINEMATIKA

Anyagi pont kinematikája	Anyagi pont, Mozcástörvény, Példák speciális mozgásokra (egyenes vonalú egyenletes, egyenes vonalú nem egyenletes, körpályán való mozgás, csavarvonalú mozgás), Sebesség (közepes, pillanatnyi), Gyorsulás (normál és tangenciális), Hodográf, Befutási törvény, Egyenletesen gyorsuló mozgás
Merev test kinematikája	Merev test szabadsági fokainak száma, Szögsebesség, Szöggyorsulás, Mozcások kategorizálása, Pillanatnyi mozgások: Pillanatnyi nyugalom, Elemi haladómozgás, Elemi forgómozgás, Elemi csavarmozgás, Véges mozgások: Tartós nyugalom, Véges haladómozgás, Véges forgómozgás, Gömbi mozgás, Síkmozgás, Sebességpólus, Gyorsuláspólus, Pólusgörbék, Pólusvándorlás sebessége, Gördülés

Anyagi pont kinematikája Összefoglaló



Anyagi pont kinematikája	Kinematika: a mozgás leírása
Anyagi pont	Anyagi pont a térben, mely fizikai jellemzőkkel bír (hőmérséklet, sebesség, gyorsulás...). Úgy definiáljuk, hogy megadjuk a helyzetét térben (vektor) és időben.
Mozgástörvény	$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$
Szabadsági fok (DoF)	Független skalárfüggvények száma, amelyekkel egyértelműen meghatározható az anyagi pont mozgása
Egyenes vonalú, egyenletes	<p>Egyenes vonalú: 1D Egyenletes: nincs gyorsulás, sebesség: állandó</p> $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}_0(t - t_0)$
Egyenes vonalú, nem egyenletes	<p>Változó sebesség Példa: $\underline{r}(t) = \underline{b} + \underline{c} \sin(\omega t)$</p>

<p>Egyenes vonalú, egyenletesen változó (a – állandó)</p>	$\underline{v} = \underline{v}_0 + \underline{a}(t - t_0)$ $\underline{r} = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 (t - t_0) + \frac{\underline{a}(t - t_0)^2}{2}$
<p>Körmozgás: egyenletes, nem egyenletes</p>	<p>Pálya: R sugarú kör $\varphi(t)$ – szög</p>
<p>Csavarvonalú mozgás</p>	<p>Körmozgás és egyenes vonalú mozgás összetétele</p>

<p>Közepes sebesség</p>	$\underline{v}_k = \frac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$ <p>vektor!, iránya: húrmenti</p>
<p>Pillanatnyi sebesség</p>	$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{\dot{r}}(t)$ <p>vektor!, iránya: érintő a pályához</p>
<p>Gyorsulás</p>	$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{\ddot{r}}(t)$
<p>Befutási törvény, egységvektorok, görbület</p>	<p>$s(t)$ - ívhossz, skálár! \underline{e}_t - tangenciális egységvektor \underline{e}_n - normális egységvektor \underline{e}_b - binormális egységvektor $(\underline{e}_t, \underline{e}_n)$ – simulósík $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_b)$ – kíséző triéder (természetes koordinátarendszer) ρ – görbületi sugár $\frac{1}{\rho}$ - görbület</p> $\frac{d\underline{r}}{ds} = \underline{e}_t \quad \frac{d\underline{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho} \underline{e}_n$

Pályasebesség	$v(t) = \dot{s}$ - skalár! Pályasebesség (sebességmérő autókban)
Sebesség	$\underline{v}(t) = \dot{s}\underline{e}_t$ - vektor
Tangenciális és normálgyorsulás	$\underline{a}(t) = \ddot{s}\underline{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{e}_n$ $\underline{a}_t = \ddot{s}\underline{e}_t \quad a_t = \ddot{s} \quad \text{irány: érintőmenti}$ $\underline{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho}\underline{e}_n = \frac{v^2}{\rho}\underline{e}_n \quad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \quad \text{irány:}$ <p style="text-align: right;">görcbületi középpont felé</p> $\underline{a}(t) = \underline{a}_t + \underline{a}_n$
Foronómiai görbék	$s(t), v(t), a_t(t)$ Példa: egyenes + félkör + egyenes
Példák	Hullámvasút Monzai Forma1 pálya

Az emberek a simulósítkban ülnek, fejük a normális gyorsulás irányába mutat.





FORMULA 1

Italy



Merev test kinematikája

Összefoglaló

Merev test kinematikája	
Merev test szabadság fokainak száma	<p>DoF=6</p> <p>A szabadsági fokok száma megadja a független skalárfüggvények számát, amelyekkel a mozgás egyértelműen leírható.</p>
Szögsebesség (ω)	<p>A szögsebesség megadja azt, hogy a merev test pontjai mekkora sebességgel (ugyanakkora) forognak egymás körül.</p> <p>! A merev test minden pontjának azonos a szögsebessége !</p>
Kinematikai vektorkettős	<p>$[\underline{\omega}, \underline{v}_A]_A$ - leírja a merev test mozgását (3+3 komponens, DoF=6)</p>
<p>Redukált képlet</p> <p>$[\underline{\omega}, \underline{v}_A]_A \rightarrow [\underline{\omega}, \underline{v}_B]_B$</p>	<p>$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$</p> <p>$(\underline{v}_B - \underline{v}_A) \perp (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$</p>

<p>Szöggyorsulás ($\underline{\varepsilon}$) – térben</p>	$\underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{\omega}}{dt}$ $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB})$
<p>Szögsebesség – síkmozgás</p>	$\underline{\omega} \perp \underline{r}_{AB}, \text{ and } \underline{\omega}^2 = \omega^2$ $\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$
<p>Szögvektor $\underline{\varphi}(t)$</p>	<p>Térben NINCS olyan szögvektor, amiből az $\underline{\omega}$ származtatható lenne!!!</p>
<p>Szögvektor $\underline{\varphi}(t)$ – síkmozgás, rögzített tengely körüli forgásnál vektoriálisan is igaz</p>	$\underline{\omega} = \frac{d\underline{\varphi}}{dt} \text{ and } \underline{\varepsilon} = \frac{d\underline{\omega}}{dt}$

Mozgások kategorizálása
 $[\underline{\omega}, \underline{v}_A]_A$ szerint (DoF=6)

A. Pillanatnyi (elemi) mozgások

1. $\underline{\omega} \underline{v}_A = 0$

1.1 pillanatnyi nyugalom

1.2 elemi haladómozgás

1.3 elemi forgómozgás 1

1.4 elemi forgómozgás 2

2. $\underline{\omega} \underline{v}_A \neq 0$ Elemi csavarmozgás

B. Véges mozgások

1. Tartós nyugalom

2. Véges haladómozgás

3. Véges forgómozgás (álló tengely)

4. Gömbi mozgás

5. Síkmozgás

1.1 Pillanatnyi nyugalom

$$\underline{\omega} = 0$$

$$\underline{v}_A = 0$$

Pl. varrógéptű két szélső helyzete

1.2 Elemi haladómozgás

$$\underline{\omega} = 0$$

$$\underline{v}_A \neq 0$$

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}, \text{ de } \underline{\omega} = 0$$

$\underline{v}_B = \underline{v}_A$, a merev test minden pontjára igaz, így a merev test minden pontjának azonos a sebessége

1.3 Elemi forgómozgás 1

$$\underline{\omega} \neq 0$$

$$\underline{v}_A = 0$$

Van egy olyan pontja a merev testnek, amelynek a sebessége 0, de a szögsebessége nem 0. Ez rajta van a **centrális egyenesen**, ami körül forog a test.

$$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}, \underline{v}_A = 0$$

$$\underline{v}_B = \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}, \text{ B pont A körül forog } \underline{\omega}\text{-val}$$

1.4 Elemi forgómozgás 2

$$\underline{\omega} \neq 0$$

$$\underline{v}_A \neq 0$$

$$\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$$

$$[\underline{\omega}, \underline{v}_A]_A \text{ - val ekvivalens } [\underline{\omega}, \underline{v}_P]_P$$

P- sebességpólus, $\underline{v}_P = 0$

STATIKA:

$$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}, \text{ de } \underline{\omega} \perp \underline{v}_A$$

$$|\underline{\omega} \times \underline{v}_A| = \omega v_A \sin \frac{\pi}{2} = \omega v_A$$

$$r_{AP} = AP = \frac{v_A}{\omega}$$

Olyan, mintha P körül forogna AP sugarú körön, ω -val.

Tehát:

$$\underline{\omega} \perp \underline{v}_A \perp \underline{r}_{AP}$$

1.4 Elemi forgómozgás 2

Hasonlóan található: $[\underline{\omega}, \underline{v}_G]_G$

G- gyorsuláspólus, $\underline{a}_G = 0$

$$\underline{r}_{AG} = \frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A + \omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

\underline{r}_{AG} - nek két komponense lesz:

\underline{a}_A - ra merőleges: $\frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

\underline{a}_A - val párhuzamos: $\frac{\omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$

Ha:

$\underline{\varepsilon} \perp \underline{a}_A$, Pitagorasz tételéből megkapjuk az \overline{AG}

nagyságát: $\overline{AG} = r_{AG} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$

$$a_A = r_{AG} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

\underline{r}_{AG} és \underline{a}_A közti α szögre: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$

2. Elemi csavarmozgás

$\underline{\omega} \cdot \underline{v}_A \neq 0$ és $\underline{\omega}$ nem merőleges \underline{v}_A

Általános térbeli eset

Van egy olyan B pont, amire igaz:

$$\underline{r}_{AB} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_B}{\omega^2} \text{ és } \underline{\omega} \parallel \underline{v}_B$$

A test halad is és forog is ugyanabba az irányba.

1. Tartós nyugalom (STATIKA)

$$\underline{\omega}(t) = 0$$

$$\underline{v}_A(t) = 0, \underline{v}_B(t) = 0, \underline{v}_C(t) = 0$$

2. Véges haladómozgás

$$\underline{\omega}(t) = 0$$

$\underline{v}_A(t)$ tetszőlegesen változhat

DoF=3, nem feltétlenül egyenes vonalú

Pl. óriáskerék kabinja

3. Álló tengely körüli forgás

$$\underline{\omega}(t) \parallel \underline{k}$$

Van egy P pont, aminek tartósan 0 a sebessége: $\underline{v}_P(t) = 0$

$$\underline{v}_A = \underline{v}_P + \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}, \underline{\omega}(t) = 0, \underline{v}_P(t) = 0$$

$$\underline{v}_A = \underline{\omega} \times \underline{r}_{PA}$$

Álló tengely \rightarrow a P pont gyorsulása is 0 lesz, $\underline{a}_P(t) = 0$

P \equiv G

Az A pont a P pont körül forog $\rightarrow \underline{\omega} \perp r_{GA}$

$$\underline{a}_A = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GA} - \omega^2 \underline{r}_{GA}$$

$$\underline{a}(t) = \underline{a}_t + \underline{a}_n$$

$$a_A = r_{AG} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Minden körpályán mozog

!!! ha minden körpályán mozog (álló tengely körüli forgás)

Van szögvektor

$$s(t) = r_{AP} \varphi(t) = R\varphi(t)$$

$$\dot{s}(t) = R\dot{\varphi}(t)$$

$$v(t) = R\omega(t)$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t)$$

$\underline{\omega} = \underline{\dot{\varphi}}$! Csak álló tengely körüli forgásnál!

Szögvektor $\varphi(t)$ – rögzített tengely körüli forgás

$$\underline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \text{ és } \underline{\varepsilon} = \frac{d\omega}{dt}$$

Ha ε állandó:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_0 + \underline{\varepsilon}(t - t_0)$$

$$\underline{\varphi} = \underline{\varphi}_0 + \underline{\omega}_0 (t - t_0) + \frac{\underline{\varepsilon}(t - t_0)^2}{2}$$

4. Gömbi mozgás

$\underline{\omega}(t)$ – tetszőleges

$$P \equiv G = 0, \underline{v}_P(t) = 0, \underline{a}_P(t) = 0$$

DoF=0, 3 tengely körüli forgás

Pl. kardáncsukló



Véges haladómozgás

5. Síkmozgás

Akkor beszélünk síkmozgásról, ha:

$\underline{\omega}(t) \parallel \underline{k}$ tartósan párhuzamos, és $\underline{v}_A \perp \underline{k}$

Tehát: $\underline{v}_A \perp \underline{\omega}$

Klb. az álló tengely körüli forgástól: nem egy pontjának a sebessége 0, hanem legyen egy pontja, melynek a sebessége tartósan merőleges \underline{k} vektorra.

$\underline{v}_B = \underline{v}_A + \underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}$, de $\underline{v}_A \perp \underline{k}$ és $(\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}) \perp \underline{k}$

Tehát:

$\underline{v}_B \perp \underline{k}$

Vagyis: minden pontja a \underline{k} -ra merőleges síkban mozog.

Az elemi mozgásoknál látottak szerint, itt is van egy P sebességpólus és egy G gyorsuláspólus.

Ugyanazok a képletek érvényesek, csak itt időben tartós.

$\underline{r}_{AP} = \frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2}$, de $\underline{\omega} \perp \underline{v}_A$

$|\underline{\omega} \times \underline{v}_A| = \omega v_A \sin \frac{\pi}{2} = \omega v_A$

$r_{AP} = AP = \frac{v_A}{\omega}$

Olyan, mintha P körül forogna AP sugarú körön, ω -val.

Tehát:

$\underline{\omega} \perp \underline{v}_A \perp \underline{r}_{AP}$

Bármely másik B pontra is igaz.

5. Síkmozgás

Gyorsulásokra is igazak az elemi forgómozgásnál felírt képletek.

$$\underline{r}_{AG} = \frac{\underline{\varepsilon} \times \underline{a}_A + \omega^2 \underline{a}_A}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

De:

$\underline{\varepsilon} \perp \underline{a}_A$, Pitagorasz tételéből megkapjuk az \overline{AG} nagyságát:

$$\overline{AG} = r_{AG} = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

$$a_A = r_{AG} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\underline{r}_{AG} \text{ és } \underline{a}_A \text{ közti } \alpha \text{ szög: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

! Itt a G és P pontok nem esnek egybe!!!

A sebességek szempontjából olyan, mintha minden a P körül forogna, a gyorsulások szempontjából olyan, mintha minden a G körül forogna.

Egy B pontra:

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{AB} + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}_{AB}), \text{ de } \underline{\omega} \perp \underline{r}_{AB}, \text{ tehát:}$$

$$\underline{a}_B = \underline{a}_A + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{BA} - \omega^2 \underline{r}_{AB}$$

Vagy

$$\underline{a}_B = \underline{a}_G + \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GB} - \omega^2 \underline{r}_{GB}$$

$$\underline{a}_B = \underline{\varepsilon} \times \underline{r}_{GB} - \omega^2 \underline{r}_{GB} \text{ és } a_B = r_{GB} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \text{ és } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

DE!!!

Itt a gyorsulás két komponense nem az \mathbf{a}_n és \mathbf{a}_t , mert az \mathbf{a}_t -t a sebességhez képest kell mérni. Az A pont \mathbf{a}_{nA} -t rá kell vetíteni a \mathbf{v}_A -ra merőleges irányra. Tehát az \mathbf{a}_n nem a G, hanem a P felé mutat.

Görbületi középpont:

A simuló kör középpontja se nem a P, se nem a G irányába mutat, hanem: $\perp \mathbf{v}_A$ -ra és az \mathbf{a}_{An} -irányába mutat.

$$\varphi = \frac{v^2}{a_n}, \text{ nagysága}$$

Álló tengely körüli forgásnál P, G, O_A egybeestek, de itt **NEM** esnek egybe.

Mozgó pólusgörbe

$\underline{\mathbf{r}}_{AP}(\mathbf{t})$ meghatározásával a testhez képest meghatározhatjuk a P pontok mértani helyét. Ez lesz a mozgó pólusgörbe. Időben kirajzolva: olyan, mintha a P pont vándorolna ezen a görbén. Ez a görbe hozzá van csatolva a testhez.

<p>Álló pólusgörbe</p>	<p>Álló koordinátarendszerben van egy $\underline{r}_A(t)$ vektor. Az $\underline{r}_A + \underline{r}_{AP}$ megadja a P pont helyét ehhez a koordinátarendszerhez képest. Ez lesz az álló pólusgörbe.</p> $\underline{r}_P(t) = \underline{r}_A + \underline{r}_{AP}$
	<p>Mivel a $\underline{v}_P = \mathbf{0}$ minden pontban, ezért a P-ben az álló és mozgó pólusgörbéknek találkozniuk kell. Vagyis minden síkmozgást vissza lehet vezetni gördülésre.</p>
<p>Ciklois videó</p>	<p>$\underline{v}_P = \mathbf{0}$ álló pólusgörbe: síkfelület, a sebesség pillanatnyilag 0, de a P pontnak van gyorsulása. A talajjal érintkező pontban rendelkezik gyorsulással.</p>
<p>Pólusvándorlás sebessége</p>	<p>A póluspont, mint anyagi pont 0 sebességű minden pillanatban, de mint mértani pont fog vándorolni.</p> $\underline{u}_P = \frac{\omega \times \underline{a}_P}{\omega^2}, \text{ síkban vannak, ezért:}$ $\underline{u} \perp \underline{a}_P$ $\underline{u} \perp \underline{\omega}$ $u = \frac{a_P}{\omega} \text{ skalárisan}$ <p>Az \underline{u}_P a két pólusgörbe érintőjében lesz.</p> <p>Pl. fogaskerekes mechanizmusok</p>

Pólusvándorlás sebessége

A póluspont, mint anyagi pont 0 sebességű, de mint mértani pont a helye változik, vagyis vándorol.

$$\underline{u}_P = \dot{\underline{r}}_P = \dot{\underline{r}}_A + \dot{\underline{r}}_{AP} = \dot{\underline{r}}_A + \frac{d}{dt} \left(\frac{\underline{\omega} \times \underline{v}_A}{\omega^2} \right)$$

$$\underline{u}_P = \frac{\underline{\omega} \times \underline{a}_P}{\omega^2}, \text{ skalárisan: } u_P = \frac{a_P}{\omega} \text{ és } a_P = u_P \omega$$

Pl. sár leverődés az autó kerekéről
egymáson gördülő kerek

Bolygóművek. Gördülés

Talajjal érintkező pontnak mindig 0 lesz a sebessége:

P pont, $\underline{v}_P = \mathbf{0}$

Talaj: álló pólusgörbe,

S – súlypont, \underline{v}_S - állandó

S pont pályája egyenes, görbületi sugara végtelen. Nincs normális gyorsulás. Csak tangenciális gyorsulás van, ami 0.

$\underline{a}_S = \mathbf{0}$, tehát: $\mathbf{S} \equiv \mathbf{G}$

P pont mindig S alatt van, egyszerre mozognak, a P pont pólusvándorlás sebessége ugyanakkora, mint az S pont sebessége.

$\underline{v}_S = \underline{u}_P$ és $v_S = R\omega$, R – a korong sugara

$\underline{a}_P = \underline{u}_P \omega$, iránya pedig az $(\underline{u}_P \times \underline{\omega})$ iránya. $\underline{a}_P \perp \underline{u}_P \perp \underline{\omega}$

Gördülés

\underline{v}_S állandó, tehát az $\underline{\omega}$ is állandó, tehát $\underline{\varepsilon} = 0$ nincs szöggyorsulás.
A gyorsulás szempontjából úgy néz ki, mintha az S körül forogna, a sebességek szempontjából pedig mintha a P körül forogna.