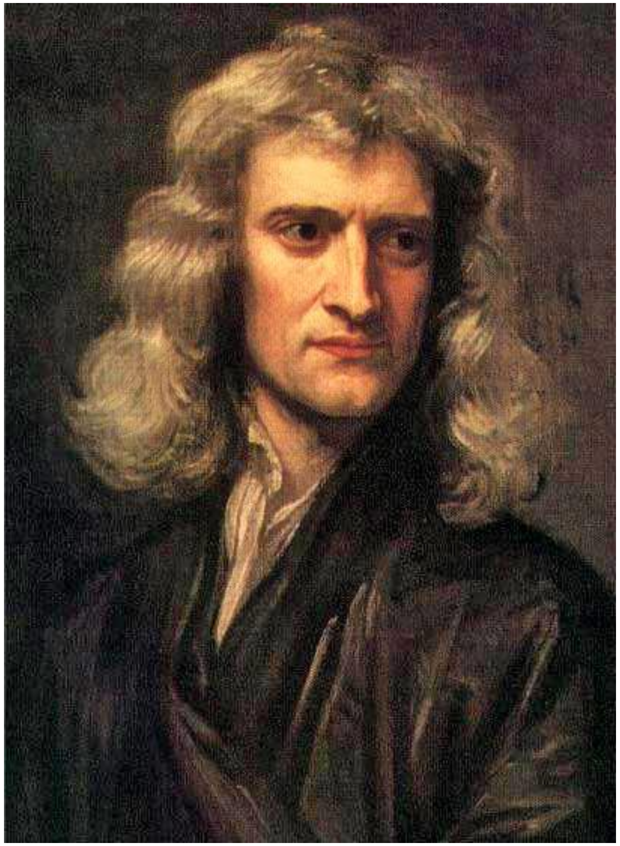
Mechanika II
Dinamika

PTE, MŰSZAKI ÉS INFORMATIKAI KAR

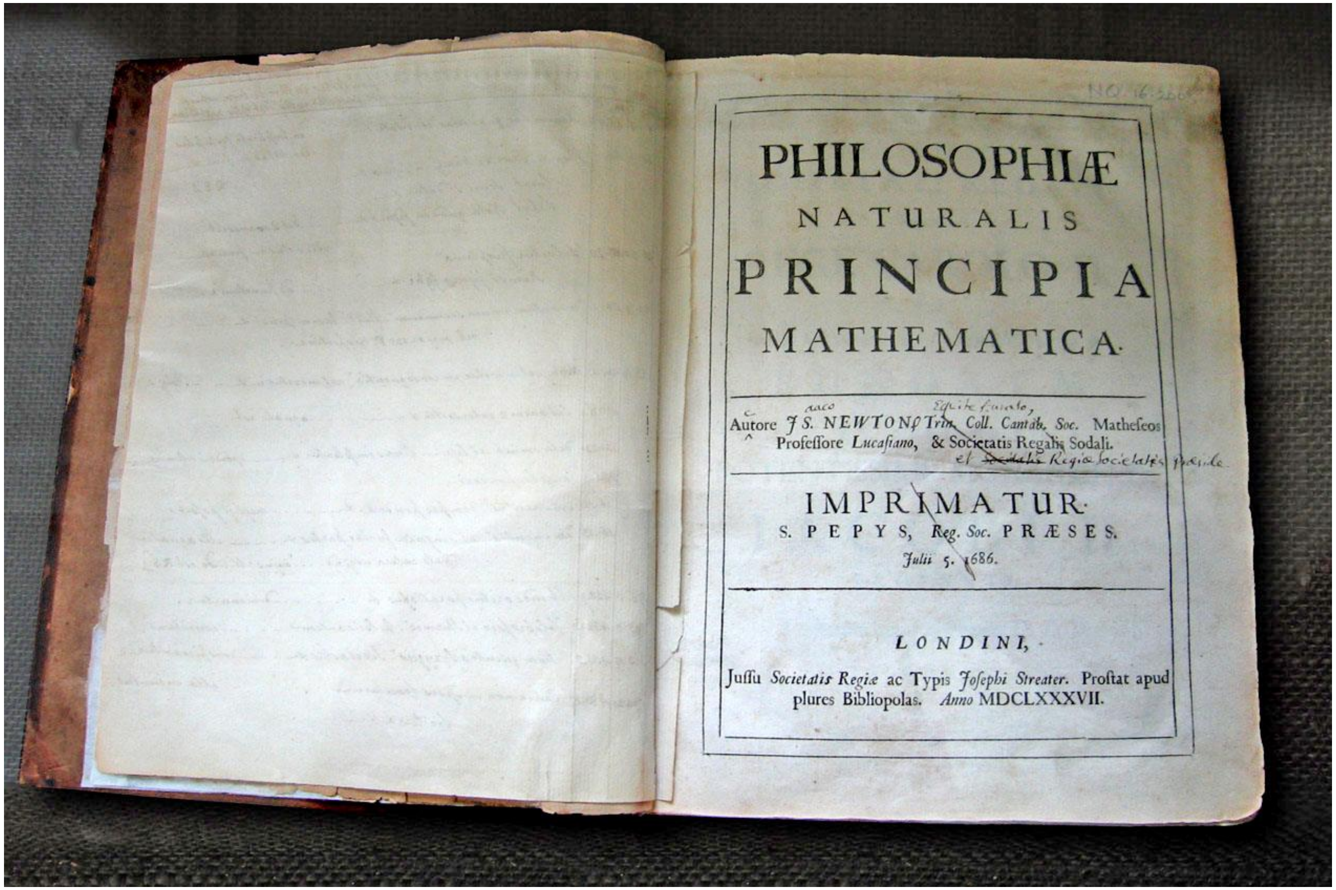
ÉPÍTŐMÉRNÖK BSC

Anyagi pont kinetikája
Összefoglaló

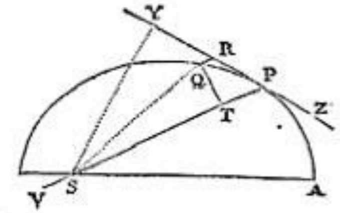
Isaac Newton 1642-1727



Newton 1687-ben megjelenő cikke az általa megfigyelt törvényekről, amely az Angol Királyi Társaság (Tudományok Akadémia) ma is létező folyóiratában jelent meg.



Corol. 4. Iisdem positis, est vis centripeta ut velocitas bis directe, & chorda illa inverse. Nam velocitas est reciproce ut perpendiculum ST per corol. 1. prop. 1.

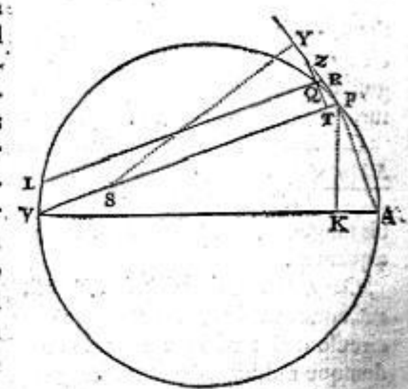


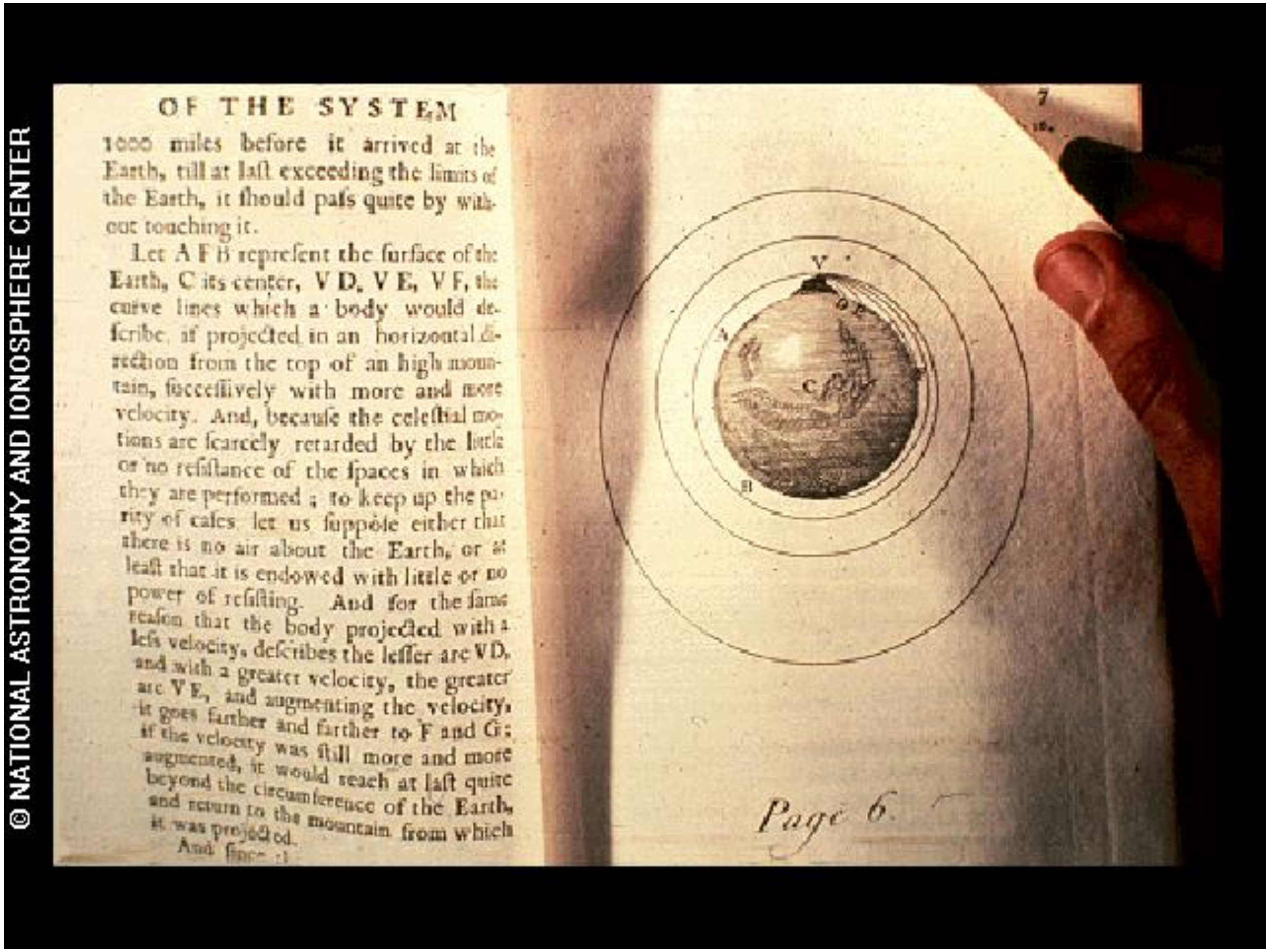
Corol. 5. Hinc si detur figura quævis curvilinea APQ, & in ea detur etiam punctum S, ad quod vis centripeta perpetuo dirigitur, inveniri potest lex vis centripetæ, qua corpus quodvis P a cursu rectilineo perpetuo retractum in figuræ illius perimetro detinebitur, eamque revolvendo describet. Nimirum computandum est vel solidum $\frac{SPq \times QTq}{QR}$ vel solidum $STq \times PV$ huic vi reciproce proportionale. Ejus rei dabimus exempla in problematis sequentibus.

PROPOSITIO VII. PROBLEMA II.

Gyretur corpus in circumferentia circuli, requiritur lex vis centripetæ tendentis ad punctum quodcunque datum.

Esto circuli circumferentia $VQPA$; punctum datum, ad quod vis ceu ad centrum suum tendit, S; corpus in circumferentia latum P; locus proximus, in quem movebitur Q; & circuli tangens ad locum priorem PRZ. Per punctum S ducatur chorda PV; & acta circuli diametro VA, jungatur AP; & ad SP demittatur perpendiculum QT, quod productum occurrat tangenti PR in Z; ac denique per punctum Q agatur LR, quæ ipsi SP parallela sit, & occurrat tum circulo in L, tum tangenti PZ in R. Et ob similia triangula ZQR, ZTP, VPA; erit RP *quad.* hoc est QRL ad



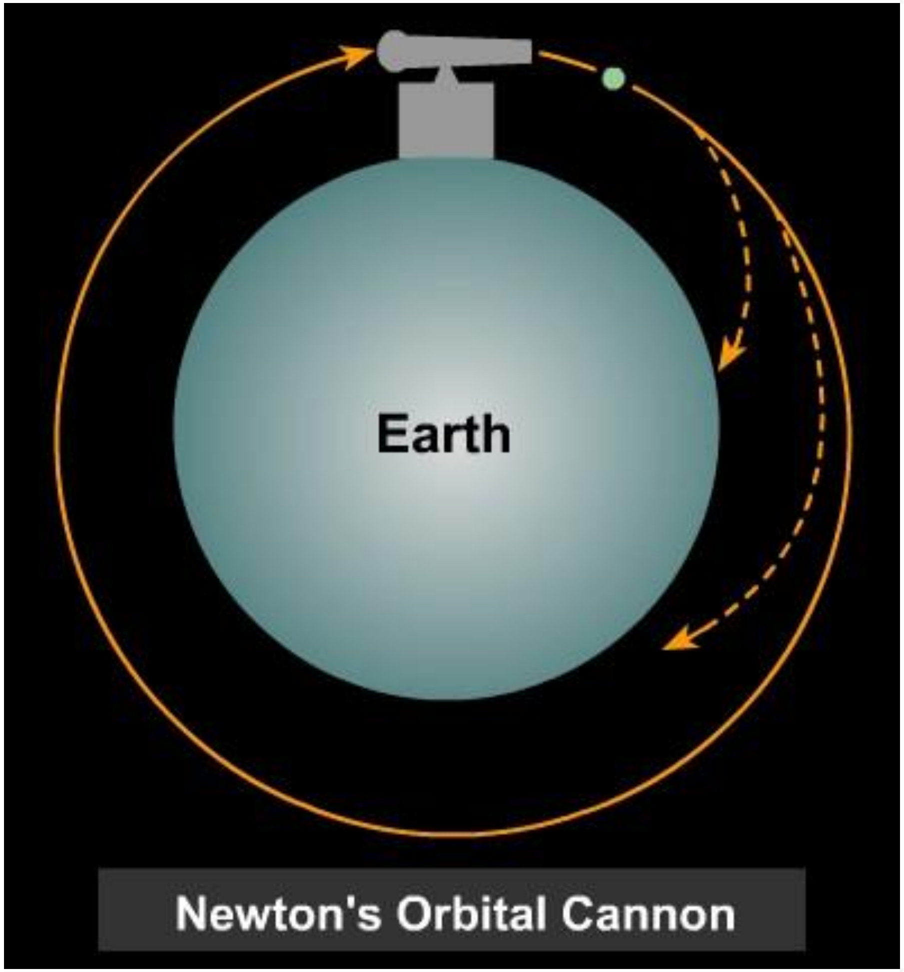

OF THE SYSTEM

1000 miles before it arrived at the Earth, till at last exceeding the limits of the Earth, it should pass quite by without touching it.

Let A F B represent the surface of the Earth, C its center, V D, V E, V F, the curve lines which a body would describe, if projected in an horizontal direction from the top of an high mountain, successively with more and more velocity. And, because the celestial motions are scarcely retarded by the little or no resistance of the spaces in which they are performed; to keep up the parity of cases let us suppose either that there is no air about the Earth, or at least that it is endowed with little or no power of resisting. And for the same reason that the body projected with a less velocity, describes the lesser arc V D, and with a greater velocity, the greater arc V E, and augmenting the velocity, it goes farther and farther to F and G; if the velocity was still more and more augmented, it would reach at last quite beyond the circumference of the Earth, and return to the mountain from which it was projected.

And since ...

Newton rájött, hogy Hold mozgása ugyanolyan, mintha kavicsokat dobálna egy hegy tetejéről és ha elég nagyot hajít, akkor a kavics Föld körüli pályára áll. A pálya csak a gravitációtól és a kezdősebességtől függ.


Earth
Newton's Orbital Cannon

Axióma	**Matematikai, logikai úton nem bizonyítható. De mérhető, működik. Ezért elfogadjuk.**
Newton 1. axiómája	Egy anyagi pont mindaddig nyugalomban marad, vagy megtartja egyenletes vonalú mozgását, amíg rá erő nem hat.
Inerciarendszer	Az olyan vonatkoztatási rendszereket, amelyekben Newton 1. axiómája érvényesül, inerciarendszereknek nevezzük.
Galilei transzformáció	Ha egy rendszer inerciarendszer, akkor a hozzá képest állandó sebességgel mozgó rendszerek is inerciarendszerek. Ezek egymásba alakíthatók.
Anyagi pont impulzusa (lendület)	Impulzus (I): az anyagi pont (vagy test) mozgását leíró dinamikai mennyiség. $\underline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{m}\underline{\boldsymbol{v}}$, mértékegysége: kg m/s
Impulzus deriváltja	$\underline{\dot{I}} = \dot{m}\underline{v} + m\underline{\dot{v}}$ Ha $\dot{m}$=állandó (szilárdtest mechanikában általában állandó. Nem állandó pl. rakétamozgásnál, liftnél stb.), akkor: $\underline{I} = m\underline{\dot{v}}$, így $\underline{\dot{\boldsymbol{I}}} = \boldsymbol{m}\underline{\boldsymbol{a}}$

Newton 2. axiómája	Az anyagi pontra ható erők eredője azonos az impulzus deriválttal. $$\boxed{\dot{\underline{\boldsymbol{I}}} = \underline{\boldsymbol{F}}}$$ $$\underline{\boldsymbol{F}} = \sum_{k=1}^{n} \underline{\boldsymbol{F}}$$ $\underline{\boldsymbol{F}}$ a szuperpozíció elve szerint az anyagi pontra ható erők eredője. $\boxed{\boldsymbol{m}\underline{\boldsymbol{a}} = \underline{\boldsymbol{F}}}$, ha m-állandó Az anyagi pontra ugyanakkor erő hat, mint az impulzus deriváltja. Mértékegységük azonos: $[N]$- Newton Az impulzusvektor iránya azonos a sebesség irányával. Az impulzusderivált iránya azonos a gyorsulás irányával. Ugyanebbe az irányba mutat az anyagi pontra ható erők eredője is.
Newton 3. axiómája	Két anyagi pont kölcsönös egymásra hatása (erő/ellenerő) egymással egyenlő, közös hatásvonalú, ellentétes értelmű

	Logikailag (matematikai levezetéssel) származtatható tételek
Erő nyomatéka (M_A)	Statikából ismert. Adott erőhatás (F erő az S pontban hat) adott középpontra (A) való forgatóképessége. $\underline{M}_A = \underline{r}_{AS} \times \underline{F}$, ahol $\underline{r}_{AS}$ - az erőkar
Erő, erőnyomaték vektorkettős	$[\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{A}} \sim [\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}}]_{\boldsymbol{O}} \sim [\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{S}}]_{\boldsymbol{S}}$ Felírható mozgó (A), álló (O) pontra vagy saját magára (S pont, amely az eredő erő támadáspontja, vagyis az $\underline{r}_{AS} = 0$, tehát: M_S=0, saját magárs nincs nyomatéka).
Impulzus nyomatéka (π_A) vagy PERDÜLET	A mozgó anyagi pontra: $\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AS}} \times \underline{\boldsymbol{I}}$
Impulzus, impulzusnyomaték vektorkettős	$[\underline{\boldsymbol{I}}, \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{A}} \sim [\underline{\boldsymbol{I}}, \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{O}}]_{\boldsymbol{O}} \sim [\underline{\boldsymbol{I}}, \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}}]_{\boldsymbol{S}}$ Az erőnyomatékhoz hasonlóan π_S=0
Kinetikai nyomaték (D_A)	Az impulzus derivált nyomatéka: $\underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AS}} \times \underline{\dot{\boldsymbol{I}}}$
Impulzusderivált, kinetikai nyomaték vektorkettős	$[\underline{\dot{I}}, \underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{A}} \sim [\underline{\dot{I}}, \underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{O}}]_{\boldsymbol{O}} \sim [\underline{\dot{I}}, \underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{S}}]_{\boldsymbol{S}}$ Hasonlóan D_S=0 D_A mértékegysége: $[Nm]_{SI}$

Dinamika alaptörvénye	**Az impulzusderivált vektorrendszer és az erőrendszer egymással ekvivalens** $$\left[\underline{\dot{\boldsymbol{I}}}, \underline{\boldsymbol{D}_A}\right]_{\boldsymbol{A}} \equiv \left[\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}_A}\right]_{\boldsymbol{A}}$$
Megjegyzés	A perdület deriváltja nem feltétlenül egyezik meg az impulzus deriváltjának nyomatékával. A deriválás és a nyomatékképzés nem ekvivalens. $$\underline{\dot{\pi}}_A = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}_{AS} \times \underline{I}\right) = \underline{D}_A - \underline{v}_A \times \underline{I}$$ $$\underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} \times \underline{\boldsymbol{I}}$$
Impulzustétel	A 2. axiómát integráljuk a mozgás kezdetétől a végéig. $\underline{\dot{\boldsymbol{I}}} = \underline{\boldsymbol{F}}$ $$\int_{t_0}^{t_1} \underline{\dot{I}}\,\mathrm{dt} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\mathrm{dt}$$ $$\underline{I}_1 - \underline{I}_0 = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\mathrm{dt}$$ $\int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\mathrm{dt}$ – erőimpulzus AZ impulzus megváltozása megegyezik az erőimpulzussal
Impulzusmegmaradás	Ha $\int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\mathrm{dt} = 0$, akkor $\underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{1}} = \underline{\boldsymbol{I}}_{\boldsymbol{0}}$ Az impulzus a mozgás végén annyi, mint az impulzus a mozgás elején.

Perdülettétel	Álló pontra érvényes. Álló pontra: $$\left(\underline{D}_O =\right)\dot{\underline{\pi}}_O = \underline{M}_O$$ Ezt integráljuk (t_0, t_1) időintervallumon: $$\int_{t_0}^{t_1} \dot{\underline{\pi}}_O \,\mathrm{dt} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_O \,\mathrm{dt}$$ $$\boldsymbol{\underline{\pi}_O(t_1) - \underline{\pi}_O(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_O \,\mathrm{dt}}$$ $\int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_O \,\mathrm{dt}$ **-** nyomatékimpulzus A perdület megváltozása egyenlő a nyomatékimpulzussal.
Perdületmegmaradás	Ha $\int_{t_0}^{t_1} \underline{M}_O$ dt=0, vagy $\underline{M}_O \equiv 0$, akkor $\underline{\pi}_O(t_1) = \underline{\pi}_O(t_0)$ A perdület a mozgás elején és végén megegyezik.
	Pl. – helikopterrotorok - Anyagi pont centrális mozgása (Föld kering a Nap körül, kifeszített és V_0 sebességgel meglökött rugó)

Erő munkája	F erő munkáját a teljesítmény idő szerinti integrálja adja meg, egy (t_0 , t_1) időintervallumban**. Mértékegysége: [Nm]=[Ws]=[Joule]=[J]** $$\boldsymbol{W_{01}} = \int_{\boldsymbol{t_0}}^{\boldsymbol{t_1}} \boldsymbol{P}\,\mathbf{dt}$$ $$W_{01} = \int_{t_0}^{t_1} \underline{F}\,\underline{v}\mathrm{dt} = \oint_{(p1)} \underline{F}\,\underline{dr}$$ Idő szerinti integrálról át kell térni pálya szerinti integrálra. Skaláris szorzat lesz, ami az út irányába vetíti az erőt.
Pl. lejtőn lefelé gördülő korong	A korongnak a lejtővel érintkező pontja: P. A P egyben a sebességpólus, vagyis sebessége minden pillanatban 0. Ha a P-ben ható súrlódási erő munkáját akarjuk kiszámítani egy l szakaszon, akkor a munkát a teljesítménnyel számolva, azt kapjuk, hogy a súrlódási erő által végzett munka 0.
Munkatétel	A teljesítménytétel idő szerinti integrálja. $\dot{T} = \mathrm{P}$ –t integráljuk (t_0, t_1) intervallumban. $\boldsymbol{T_1 - T_0 = W_{01}}$ A kinetikus energia megváltozása egyenlő az erő munkájával.

Erő teljesítménye	Az erő teljesítménye egyenlő az erő és az erő támadáspontjában lévő anyagi pont sebességének skalárszorzatával. $\boldsymbol{P} = \underline{\boldsymbol{F}}\,\underline{\boldsymbol{v}}$ Mértékegysége: Watt $[\mathrm{W}]_{\mathrm{SI}}$
Kinetikus energia deriváltja	Kinetikus energia: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\underline{v}\,\underline{v}$ $\dot{T} = \frac{1}{2}m\dot{\underline{v}}\,\underline{v} + \frac{1}{2}m\underline{v}\,\dot{\underline{v}}$ $\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{m}\underline{\boldsymbol{v}}\,\underline{\boldsymbol{a}}$
Teljesítménytétel	2. Axiómát megszorozzuk $\underline{v}$-vel (Lagrange ötlete) $\dot{\underline{I}} = \underline{F}$ $m\underline{v}\,\underline{a} = \underline{F}\,\underline{v}$ $\dot{\boldsymbol{T}} = \mathbf{P}$ A kinetikus energia idő szerinti deriváltja megegyezik a teljesítménnyel.

Potenciálos erő	$\underline{F}$ erő potenciálos, ha létezik olyan $U(\underline{r})$ függvény, ahol az U potenciálfüggvény, úgy, hogy: $\underline{F} = -grad\ U$ $-gradU = \left(-\frac{\partial U}{\partial \underline{r}}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial U}{\partial x} \\ -\frac{\partial U}{\partial y} \\ -\frac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}$ **A gradiens a függvények deriválásának általánosítása többváltozós függvényekre.**
Példa	Nehézségi erő, aminek a potenciálfüggvénye: $U(\underline{r}) = mgz$ Rugóerő, aminek a potenciálfüggvénye: $U(\underline{r}) = \frac{1}{2}sx^2$
Potenciálos erők tulajdonságai	1. örvénymentesség: $rot\underline{F} = 0$ 2. A munka kiszámítása független az úttól Ilyenkor mindegy, hogy milyen pálya mentén haladok és a pályák megadása helyett elég megadni csak a kezdő és végpontokat

Potenciálos erők tulajdonságai	3. A munka a potenciállal számolható. $$W_{01} = \oint_{(p1)} \underline{F}\, \underline{dr} = \oint_{(p1)} -gradU\, d\underline{r} = -\left(U(\underline{r}_1) - U(\underline{r}_2)\right)$$ $$= -(U_1 - U_0)$$ $$W_{01} = U_0 - U_1$$
Mechanikai energia megmaradása	Potenciálos erőkre a mechanikai munka megmarad. De csak ebben az esetben! $$W_{01} = U_0 - U_1 = T_1 - T_0$$ $$T_1 + U_1 = T_0 + U_0$$

Kényszermozgás	Szó szerinti értelme: kényszerített mozgás 1. Ismerem a mozgást és számítom az erőket 2. Ismerem az erőket és meghatározom, hogy milyen mozgást hoznak létre 3. A mozgás egy részét és az erők egy részét ismerem - pl. ablaktisztító robot ismerem a felületet, az erők nem lehetnek sem túl nagyok sem túl kicsik **Alapfeladat:** $\underline{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{t}) \to \underline{\dot{\boldsymbol{r}}} \to \underline{\ddot{\boldsymbol{r}}} \to \underline{\boldsymbol{F}}$
Kényszererők (K)	$\underline{F}$ – az aktív erő (a többi erő, ami nem a kényszermozgáshoz kell) $\boldsymbol{P_K} = \underline{\boldsymbol{K}}\, \underline{\boldsymbol{v}}$ A $\underline{K}$ kényszererőt ideálisnak mondjuk, ha a teljesítménye 0. $P_K = \underline{K}\, \underline{v} = 0$, ilyenkor a $\underline{K} \perp \underline{v}$
Mozgásegyenletek	A pályához illeszkedő kísérő triéder koordináta rendszerben adjuk meg: $\boldsymbol{m\underline{a}} = \underline{\boldsymbol{F}} + \underline{\boldsymbol{K}}$ $\underline{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}}$: $\boldsymbol{m\underline{a}_t} = \underline{\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}} + \underline{\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{t}}, \underline{K e}_t = 0, ha\ \underline{K}\ ide\acute{a}lis$ $\underline{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$: $\boldsymbol{m\underline{a}_n} = \underline{\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}} + \underline{\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}$ $\underline{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{b}}$: $\boldsymbol{0} = \underline{\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{b}} + \underline{\boldsymbol{K}\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{b}}$, a simuló síkon kívül nincs gyorsulás

Szabadtest ábra	Csak a testet (vagy anyagi pontot) ábrázoljuk, a kényszereket elhagyjuk és ismeretlen kényszererőkkel helyettesítjük
Példa	Lejtőn csúszó anyagi pont Mekkora erők hatnak? Mekkora a gyorsulás? Aktív erő: $\underline{\boldsymbol{G}}$ **- nehézségi erő** $\underline{G} = m\underline{g}$, $\underline{g}$ - nehézségi gyorsulás Kényszererők: $\underline{K} = \underline{N} + \underline{S}$ $\underline{\boldsymbol{N}}$ **- normálerő** $\underline{\boldsymbol{S}}$ **– súrlódási erő** Csúszórúrlódás: S=μN A test a lejtő mentén mozog, a gyorsulás iránya párhuzamos a lejtővel. $\underline{a} = \underline{a}_t$, $\underline{a}_n = 0$
Példa	Centrifugálregulátor: egy gép szögsebességének (fordulatszámának) szabályozására szolgál. Szerepe a fordulatszám állandó értéken tartása a terheléstől függetlenül (pl. malomkerék, gőzgép, turbinák)

Anyagi pontrendszer kinetikája	m_i, m_j, m_k – tömegű anyagi pontok O – a koordináta rendszer középpontja, $\underline{v}_O = 0$, inerciarendszer i, j, k=1,…,N, N az anyagi pontok száma Az anyagi pontok rúddal, kötéllel, rugóval stb. össze vannak kötve. Szétszedjük és egyenként készítünk szabadtest ábrákat Vannak erők, amelyek kívülről hatnak: $\underline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i}}$ Vannak belső erők is: $\underline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{ij}}$ Ha szétválasztom a pontokat, akkor be kell rajzolnom az i-edik hatását a j-edikre és fordítva, stb. $\underline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{ij}}$ - a j-ről az i-re ható erő 2. axióma: $\underline{\dot{I}} = \underline{F}$ $$m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \underline{B}_{ij}$$ Ha ezt felírjuk az összes pontra, nemcsak az i-edikre, és szummázzuk: $\underline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{ij}} = -\underline{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{ji}}$ **(3. axióma),** tehát páronként kiesnek, mert mindeniknek megjelenik az ellentétes előjelű párja. Tehát a belső erők összege 0

Anyagi pontrendszer kinetikája	$$\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i$$ $\sum_{i=1}^{N} m_i a_i$ az $\underline{r}$ vektornak a második deriváltja $$\frac{d^2}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{r}_i = \frac{d^2}{dt}\left[\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\underline{r}_S\right] = m\underline{a}_S$$ m_i – állandó S – a súlypontra vonatkozik $$\boldsymbol{m\underline{a}_S = \underline{F}}$$ $\sum_{i=1}^{N} m_i = m$ - a teljes tömeg $\sum_{i=1}^{N} \underline{F}_i = \underline{F}$ - a külső erők eredője Tehát a belső erőkkel nem kell számolni, csak tudni kell, hogy hol a súlypont.
Anyagi pontrendszer kinetikája Nyomatékok	A **nyomatékok** számolásánál a belső erők ugyanúgy kiejtik egymást, ezért a **perdület és a kinetikai nyomaték** az anyagi pontéhoz hasonlóan számítható.

Anyagi pontrendszer kinetikája Dinamika alaptörvénye	$\left[\dot{\underline{\boldsymbol{I}}}, \underline{\boldsymbol{D}_A}\right]_{\boldsymbol{A}}$ = $\left[\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}_A}\right]_{\boldsymbol{A}}$ $\left[\dot{\underline{I}}, \underline{D_S}\right]_S$ = $\left[\underline{F}, \underline{M_S}\right]_S$, $\left[\dot{\underline{\boldsymbol{I}}}, \dot{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{S}}\right]_{\boldsymbol{S}}$ = $\left[\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{S}}}\right]_{\boldsymbol{S}}$, S - súlypont $\left[\dot{\underline{I}}, \underline{D_O}\right]_O$ = $\left[\underline{F}, \underline{M_O}\right]_O$, $\left[\dot{\underline{\boldsymbol{I}}}, \dot{\underline{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{O}}\right]_{\boldsymbol{O}}$ = $\left[\underline{\boldsymbol{F}}, \underline{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{O}}}\right]_{\boldsymbol{O}}$, O – álló pont
Anyagi pontrendszer kinetikája Impulzustétel	Az anyagi pontéhoz hasonlóan integráljuk idő szerint, a belső erők itt is kiejtik egymást.
Anyagi pontrendszer kinetikája Teljesítménytétel	$$m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i + \sum_{j=1, i \neq j}^{N} \underline{B}_{ij}$$ Hasonlóan az anyagi ponthoz, beszorozzuk $\underline{v}_i$- vel, majd szummázzuk i szerint. $$\dot{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{P_F} + \boldsymbol{P_B}$$ A belső erő x sebesség azért nem mindig ejti ki egymást, mert a sebességek rugó esetén például nem lesznek egyenlők. Így azt mondhatjuk: P_B=0 kötél vagy rúd esetén $P_B \neq 0$ rugó esetén

Merev test kinetikája Összefoglaló

Merev test kinetikája	Impulzus, Impulzusderivált, Perdület, Perdület derivált, Tehetetlenségi nyomatéki mátrix, Általános tételek merev testre (impulzus, impulzusderivált, kinetikai nyomaték, perdület, perdület derivált, kinetikus energia Példa: henger tehetetlenségi nyomatéki mátrixa, Egyenletek síkmozgás esetén (perdület, perdület derivált, kinetikus energia) Példa: autó gyorsítása, téglatest borulása, gördülés (csúszás) lejtőn

Merev test kinetikája	Pont rendszernél N darab pontunk volt, itt végtelen pontunk van, tehát integrálni kell dm-re S – súlypont $\underline{\omega}$ - szögsebesség $\underline{\rho}$ – S-ből a dm-be mutató vektor
Perdület, tehetetlenségi nyomatéki mátrix	Súlypontra: $\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{S}}\underline{\boldsymbol{\omega}}$, ahol a $\underline{\theta}_S$ a súlypontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix $$\underline{\theta}_S = \int_m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix} dm$$ $$\underline{\theta}_S = \begin{bmatrix} \theta_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & \theta_y & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & \theta_z \end{bmatrix}$$ D_{xy}, stb. – deviációs tehetetlenségi nyomatékok (másodrendű nyomatékok). Úgy választunk tengelyeket, hogy a deviációs nyomatékok értéke 0 legyen
Tehetetlenségi nyomaték	Egy tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomaték kifejezi a test ellenállását egy tengely körüli forgási állapot megváltoztatásával szemben

<table>
<tr>
<td></td>
<td>$$\theta_x = \int_m (y^2 + z^2)dm$$
$$\theta_y = \int_m (x^2 + z^2)dm$$
$$\theta_z = \int_m (x^2 + y^2)dm$$</td>
</tr>
<tr>
<td>Általános egyenletek merev testre</td>
<td>Dinamika alaptörvénye: S pontra felírva:
$$\left[\underline{\dot{I}}, \underline{\dot{\pi}_S}\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M_S}\right]_S$$
Impulzus: $\underline{\boldsymbol{I}}$=m$\underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S}}$
Impulzus derivált: $\underline{\dot{\boldsymbol{I}}}$=m$\underline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{S}}$
Kinetikai nyomaték: $\underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{A}} + \underline{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} \times \underline{\boldsymbol{I}}$
• Álló pontra: $\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{O}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{O}}$
• Súlypontra: $\underline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{S}}$
Perdület:
$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} + \underline{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{AS}} \times \underline{\boldsymbol{I}}$$
$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{S}}\underline{\boldsymbol{\omega}}$$
$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{O}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{O}}\underline{\boldsymbol{\omega}}$$
$$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{O}} = \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} + \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{OS}}\underline{\boldsymbol{\omega}}$$
$$\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{O}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{S}} + \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{OS}} \text{ (Steiner tétel)}$$
Ahol $\underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{O}}$ az O pontra számított tehetetlenségi nyomatéki mátrix</td>
</tr>
</table>

	Perdület derivált: • Súlypontra: $\dot{\boldsymbol{\pi}}_S = \underline{\boldsymbol{\theta}_S}\boldsymbol{\varepsilon} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{\pi}_S}$ • Tartósan álló pontra: $\underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}_O} = \underline{\boldsymbol{\theta}_O}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{\pi}_O}$ Kinetikus energia: • Súlypontra: $\boldsymbol{T_S = \frac{1}{2}mv_S^2 + \frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{\theta_S}\underline{\omega}}$ • Tartósan álló pontra: $\boldsymbol{T_O = \frac{1}{2}\underline{\omega}^T\underline{\theta_O}\underline{\omega}}$
Henger tehetetlenségi nyomatéki mátrixa	R – a henger sugara H – a henger magassága Úgy választjuk meg a koordináta rendszert, hogy a a z tengely a henger központi tengelye mentén helyezkedjen el. Így a szimmetria viszonyok miatt a deviációs nyomatékok 0-k lesznek. $$\underline{\theta}_S = \begin{bmatrix} \theta_x & 0 & 0 \\ 0 & \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & \theta_z \end{bmatrix} = \int_m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$ A szimmetria miatt: $\theta_x = \theta_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2$ és $\theta_z = \frac{1}{2}mR^2$ $$\underline{\theta}_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{bmatrix}$$

Merev test kinetikája síkmozgás esetén	Kinematikai értelemben vett síkmozgás: $\underline{\omega} \parallel \underline{k}$ és $\underline{v}_S \perp \underline{k}$ Kinetikai értelemben vett síkmozgás: $\underline{\pi}_S \parallel \underline{k}$ $$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{S}}\underline{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \theta_{Sx} & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{Sy} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{Sz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_{Sz}\omega \end{bmatrix}$$ vagyis: $$\underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{Sz}}\boldsymbol{\omega}\underline{\boldsymbol{k}}$$ ahol: $\boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{Sz}}$ - az S ponton átmenő z tengelyre vett tehetetlenségi nyomaték. Skalárisan: $\boldsymbol{\pi}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{Sz}}\boldsymbol{\omega}$
	$\left[\underline{\dot{I}}, \underline{\dot{\pi}}_S\right]_S = \left[\underline{F}, \underline{M}_S\right]_S$, általános eset 6 ismeretlent és 6 egyenletet jelent. Síkban leegyszerűsödik 3 ismeretlenre és 3 egyenletre. $\underline{\dot{\boldsymbol{I}}}$**=m**$\underline{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{S}}$ - ből 2 egyenlet származik x és y mentén $\underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{S}} = \underline{\boldsymbol{\theta}}_{\boldsymbol{S}}\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}}$ egyenlet a síkban leegyszerűsödik, mert $\underline{\varepsilon} \parallel \underline{k}$ és $(\underline{\boldsymbol{\omega}} \times \underline{\boldsymbol{\pi}}_{\boldsymbol{S}}) \parallel \underline{k}$. Tehát: $$\underline{\dot{\boldsymbol{\pi}}}_{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\theta}_{\boldsymbol{Sz}}\boldsymbol{\varepsilon}\underline{\boldsymbol{k}}$$

	Kinetikus energia: • Súlypontra: $\boldsymbol{T_S = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} \theta_{Sz} \omega^2}$ • Tartósan álló pontra: $\boldsymbol{T_O = \frac{1}{2} \theta_{Oz} \omega^2}$ • $\theta_{Oz} = \theta_{Sz} + \overline{OS}^2 m$, $\overline{OS}$ - O és S közötti távolság