TARTÓSZERKEZETEK GÉPI SZÁMITÁSA

A Véges Elem Módszer (VEM) alapjai

Dr Meskó András
okl. épitőmérnök

Bevezető

A tervezőmérnök tervezői tevékenységét az absztrakt tervezési térben végzi, ott fogalmazza meg és elégiti ki igényeit. A tervezési tér dimenzióit a tervezési változók feszitik ki

Egy közönséges téglalap keresztmetszetü gerenda esetén a változókat jelenti pl: a gerenda szélessége, magassága és a huzott betonacél mennyisége egy-egy adott keresztmetszetben. A tervezési változók egy bizonyos értéke egy pontot határoz meg a tervezési térben, ez a pont egy LEHETSéGES TERV-et reprezentál. Az egyáltalán lehetséges variánsok tartományát a korlátozó feltételek jelölik ki. Ez a tartomány folytonos vagy diszkrét lehet a tervezési változók jellegével összhangban.
Az emlitett téglalap keresztmetszetü gerenda esetében a szélesség és a magasság folytonos, az acélmennyiség diszkrét változó.
A lehetséges tervvariánsok közül azt kell megvalósitásra javasolni, amely a megfogalmazott célfüggvény alapján optimálisnak bizonyul.
A mérnök igazi szándéka , a végcél tehát nem a szerkezet erőjátékának megismerése, a belső erők meghatározása, hanem az adott korlátozó feltételek mellett az optimális tervváltozat megkeresése.

Statika és számitógép

A statikai tervezés munkafolyamata két nagy területre bontható, melyek egymással állandó kölcsönhatásban vannak:
a konstruálás, a szerkezet "kialakitása" és a számitás.

A statikai számitás munkafolyamata az alábbi lépésekből tevődik össze:

a./ A statikai váz, az erőtani modell megválasztása ugy, hogy a legjobban közelitse a tényleges szerkezetet.

b./ A terhelések és a figyelembe veendő hatások számbavétele.

c./ A kiválasztott statikai váz megoldása a mértékadó teherállásokra. Ennek eredménye: igénybevételek és alakváltozások.

d./ A jellemző igénybevételek és alakváltozási értékek kikeresése.

e./ Méretezés az előbbiekben kikeresett értékekre és ellenőrzés alakváltozásokra.

f./ Amennyiben a szerkezet előzetesen felvett méretei nem képesek elviselni a keletkező igénybevételeket, vagy az alakváltozások nagysága meghaladja a megengedett mértéket, illetve a szerkezet előzetesen felvett méretei gazdaságtalanul nagyok, uj méretfelvétel után a számitást a c./ponttól meg kell ismételni.

Az előzőekből kitünik, hogy a statikai tervezési munka jellege kettős:

1./ Azon tevékenységek csoportja, melyekben nélkülözhetetlen a tervező szerepe, amelyekhez az ember gondolkodó képessége szükséges és amelyek nem adhatók át másnak.

2./ A tevékenységek azon csoportja, amelyekhez nem feltétlenül szükséges a gondolkodó emberi elme, azaz olyan feladatrészek, amelyek elvégzésére az elektronikus számitógépek is képesek - sőt egyedül csak ezek a berendezések tudják pontosan és gyorsan elvégezni.

Érthető módon a legnagyobb probléma a c./ pontban emlitett munkamozzanat, a statikai váz megoldása - egy, vagy több terhelési esetre. A mérnöki gyakorlatban előforduló szerkezetek egy csoportjának megoldására:

- közelitő képleteket
- táblázatos segédleteket
- egyszerüsitett modelleket

dolgoztak ki. Sok esetben ezek a megoldási módszerek is tetemes számitási munkát igényelnek, használatuk nehézkes és a kapott eredmény pontossága sem kielégitő. A pontosabb szá-

mitási módszerek alkalmazása viszont legtöbbször egyenletrendszerek felállitására és megoldására vezet, melyeknek a hagyományos "gyalog" módszerrel történő elvégzése csak 4-5-10 ismeretlenig végezhető különösebb fáradtság nélkül. Nagyobb szerkezet esetén az elektronikus számitógép segitségét kell igénybe venni.

A számitógépek bekapcsolódása a mérnöki számitásokba az 50-es években kezdődött, amikor az uj, hatékony eszközre bizták a korábban kidolgozott, de a hagyományos eszközökkel elvégezhetetlennek látszó számitásokat. A kutatók hamarosan rájöttek, hogy a minőségileg uj eszköz a problémák statikai megfogalmazásában is minőségileg uj irányokat követel.
Az elektronikus számitógép a statikus szempontjából nem arra való, hogy rosszul konvergáló végtelen sorok közelitő összegét számitsák ki vele, hanem arra, hogy a szerkezetnek nagy, de véges számu szabadságfokát figyelembe lehessen venni a számitásban.
A magyar mérnöktársadalom méltán lehet büszke, hogy (e felismeréstől vezérelve) magyar szerzők is gyarapitották a téma nemzetközi szakirodalmát: 1971-ben jelent meg Dr.Szabó János és Dr.Roller Béla "Rudszerkezetek elmélete és számitása" cimü világviszonylatban is szinvonalas munkája.
A mü legfontosabb jellemzői: a mérnöki szemléletesség és az elegáns, tömör matematikai tárgyalásmód.
A véges szabadságfoku, kis alakváltozásokat a Hook-törvény szerint viselő mérnöki szerkezet vizsgálatát a lineáris algebra, ezen belül a mátrix-számitás módszereivel lehet elvégezni.
Felirva egy szerkezet egyensulyi és összeférhetőségi egyenleteit mátrix alakban*:

$$\underline{\underline{G}}^{*} \cdot \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{0}} \qquad \text{egyensulyi egyenletek}$$

$$\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{U}} + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{S}} + \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{0}} \qquad \text{összeférhetőségi egyenletek}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{S}} \leqq \underline{\underline{H}} \qquad \text{igénybevételi korlátok}$$

$$\underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{U}} \leqq \underline{\underline{A}} \qquad \text{alakváltozási korlátok}$$

Adott – például előregyártott – elemekből álló készlet esetén a fenti egyenletekben megfogalmazott egyensulyi és összeférhetőségi követelményeket, valamint az egyenlőtlenségekben megadott igénybevételi és alakváltozási – elmozdulási korlátozó feltételeket kielégitő szerkezet valamilyen szempontból (önsuly, költség, ezek aránya, stb.) optimalizálható.

* Megjegyzés:
$\underline{\underline{G}}, \underline{\underline{G}}^*$ a szerkezet geometriai mátrixa, $\underline{\underline{S}}$ belső erők mátrixa,
$\underline{\underline{Q}}$ külső erők (erő terhek) mátrixa, $\underline{\underline{U}}$ elmozdulások mátrixa,
$\underline{\underline{F}}$ hajlékonysági mátrix, $\underline{\underline{T}}$ mozgásterhek mátrixa,
$\underline{\underline{B}}$ igénybevétel összegző mátrix, $\underline{\underline{H}}$ határigénybevételek mátrixa,
$\underline{\underline{C}}$ alakváltozás összegző mátrix, $\underline{\underline{A}}$ alakváltozási korlátok mátrixa.

Modellezés

A szerkezetek vizsgálata során közelitésekkel élünk, a szerkezetet modellezzük. Ennek célja kettős. A szerkezeti modell egyszerübb és áttekinthetőbb a valódinál, a matematikai modell pedig a számitási munka hatékonyságát biztositja.
A szerkezeti modell a valódi szerkezetnek a vizsgálat szempontjából lényeges tulajdonságaival felruházott statikai váza. Elkészitését az indokolja, hogy az eredeti szerkezet pontos viselkedése döntően ezen tulajdonságok hatásától függ. A gyakorlat számára elegendően pontos és jellemző eredményeket kaphatunk, ha a tényleges szerkezet viselkedése helyett annak modelljét, a szerkezeti modell viselkedését vizsgáljuk.
(Acél gerendákból álló gerendarács szerkezetek esetében általában elég az egyes gerendák tengelyvonalát felruházni geometriai és szilárdsági jellemzőkkel. Talajra helyezett gerendarácsok esetében azonban előfordulhat, hogy az ilyen gerendarács-modell jelentős elhanyagolást tartalmaz. Ha ugyanis az egyes gerendák talajjal érintkező felületének szélességi mérete a hosszuságához képest nem hanyagolható el, a gerendák összemetsződése miatt a valódinál lényegesen nagyobb talpfelületet vennénk számitásba.)

A matematikai modell a szerkezeti modell vizsgálatának eszköze. Eredményessége a szerkezeti modellhez való kapcsolódástól függ, mert a szerkezet elemeinek viselkedését a matematikai modell elemei irják le.

A mérnöki szerkezetek számitását általában erő- illetve mozgásmódszerrel végezzük. A szerkezeti modell folytonos (kontinuum) illetve nem folytonos (diszkrét) matematikai modellel vizsgálható.
A folytonos modellek analitikus megoldást adnak eredményül, zárt alakban, függvény formájában. Több ismeretlen függvény esetén használatuk nehézkes lesz (pl. differenciálegyenletrendszerek), a valóságban gyakran előforduló ugrásszerü tulajdonság- és hatásváltozások esetén pedig nem alkalmazhatók.
A nem folytonos matematikai modell alkalmazása a véges szabadságfoku (diszkretizált) szerkezetek numerikus módszerekkel, a mátrixalgebra segitségével történő vizsgálatát teszi lehetővé. Ez a matematikai modell alkalmas a hirtelen tulajdonság- és hatásváltozások követésére. Alkalmazhatóságának nincs elvi korlátja. A gyakorlatban a numerikus vizsgálatok elvégzéséhez azonban számitógépet kell igénybe venni és a megoldható feladattipusok és szerkezetméretek a számitógép tulajdonságaitól (számábrázolási pontosság, memória nagyság) függenek.

Egyszerü és bonyolult tartószerkezetek vizsgálatakor gyakran alkalmazunk olyan statikai modellt, melyet az eredeti szerkezet * -való bontásával állitunk elő. Ilyen esetben a megoldás az adott szerkezet folytonossági követelményeit tartalmazó, az egyes elemek kapcsolatainál (csomópontjainál) felirható egyensulyi és/vagy összeférhetőségi (kompatibilitási) feltételekből számitható. A folytonossági követelmények ugynevezett feltételi egyenletrendszerbe foglalhatók.
Statikai szerkezetek vizsgálatára két alapvető módszert ismerünk
- elmozdulásmódszer
- erőmódszer.

---

* véges méretü, illeszkedő elemekre

Mindkét eljárás alkalmazása esetén a folytonossági követelményeket tartalmazó (általában lineáris) egyenletrendszert kell előállitani. A két módszert az egyenletrendszer ismeretlen mennyiségei vektorának, az együttható-mátrix és a jobboldal elemeinek fizikai tartalma különbözteti meg.

Elmozdulásmódszer esetén
- ismeretlen elmozdulások
- erő jellegü (merevségi tényező) mátrix-elemek
- a jobboldalon erő jellegü elemek szerepelnek az
- egyensulyi egyenletrendszerben.

Erőmódszer esetén
- ismeretlen erők
- elmozdulás jellegü (hajlékonysági tényező) mátrix-elemek
- a jobboldalon elmozdulás jellegü elemek szerepelnek a
- az összeférhetőségi feltételeket előiró egyenletrendszerben.

(Fentiek alapján szokás az elmozdulásmódszert egyensulyi vagy merevségi, az erőmódszert pedig hajlékonysági vagy kompatibilitási módszernek nevezni.

Példa. Folytonos modell

differenciálegyenlet

$$y^{IV} = \frac{q}{EI}$$

kerületi feltételek

$x = 0$ $T(0) = 0$

$M(0) = 0$

$x = \ell$ $\varphi(\ell) = 0$

$y(\ell) = 0$

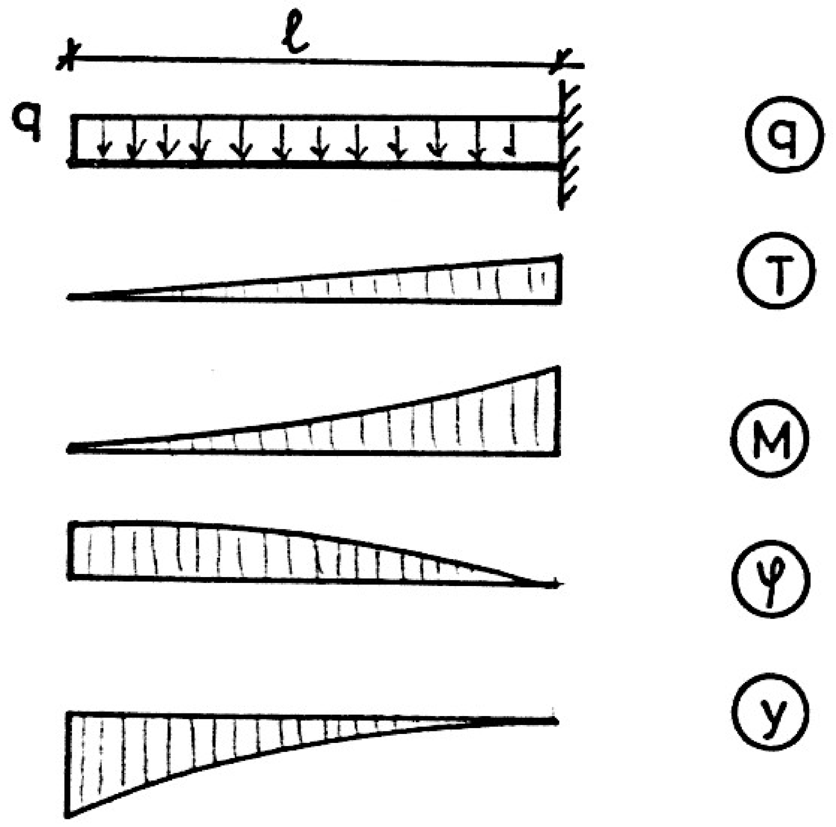
$q(x) = q = \text{áll.}$

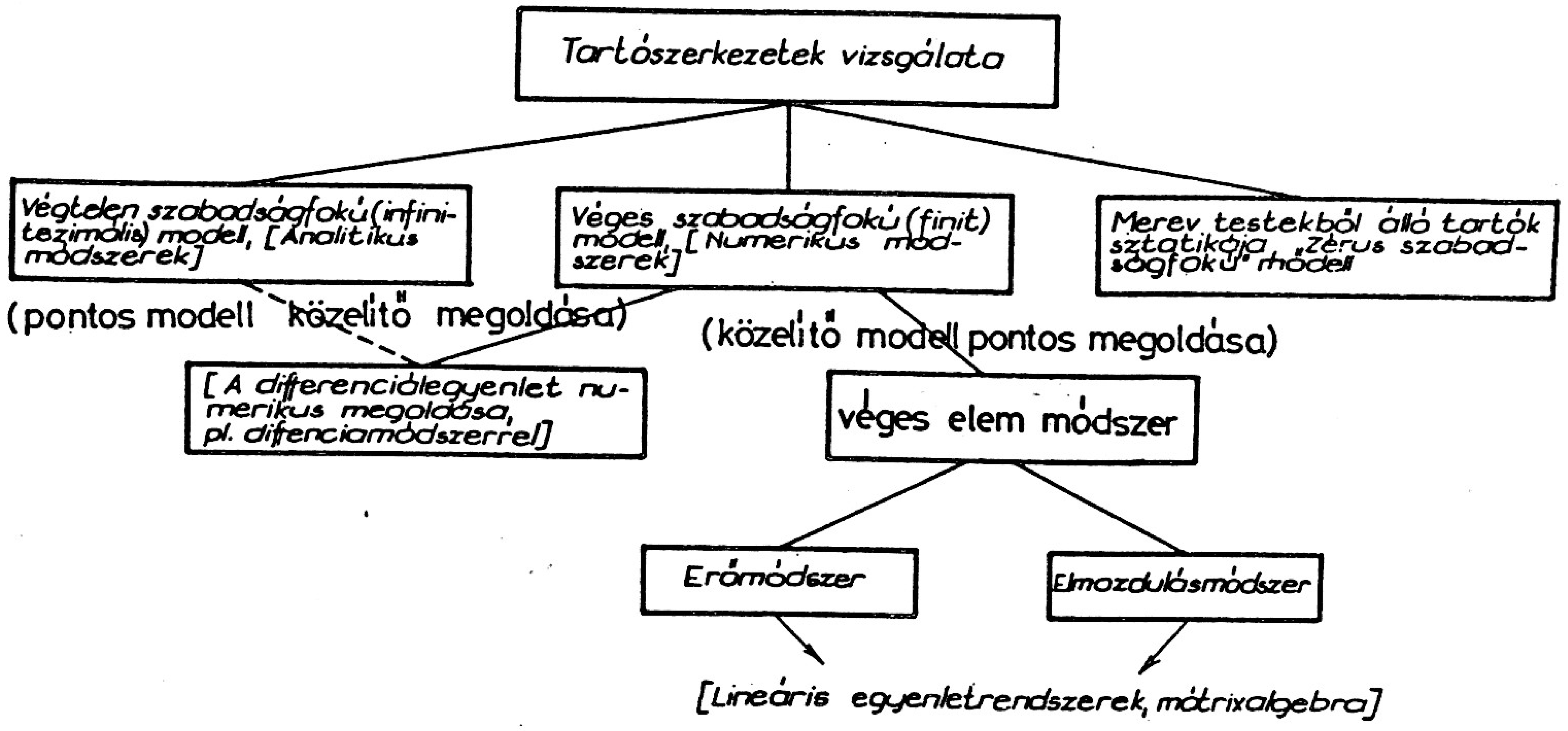
$T(x) = -q \cdot x$

$M(x) = -\dfrac{q \cdot x^2}{2}$

$\varphi(x) = \dfrac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}\left(1 - \dfrac{x^3}{l^3}\right)$

$y(x) = \dfrac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}\left(3 - 4 \cdot \dfrac{x}{l} + \dfrac{x^4}{l^4}\right)$





Véges Elem Módszer (VEM)

A mérnöki szerkezetek két- illetve háromdimenziós elemekre bontása ma már a véges elem módszer klasszikus példáinak tekinthetők. A módszer lényege következő:
A vizsgált szerkezetet véges méretü, illeszkedő elemekre bontjuk. Az egyes elemek tulajdonságait az analizis eszközeivel, az elemre vonatkozóan határozzuk meg, és a kapcsolási pontokon (a csomópontokon) értelmezett paraméterekkel fejezzük ki.
Az elemek rendszerének kapcsolatát a csomóponti mennyiségek azonosságának előirásával biztositjuk.
A mérnöki szerkezetek vizsgálatára az épitőmérnöki gyakorlat az elmozdulásmódszert alkalmazza. A csomóponti paraméterek fizikai tartalma a csomópontok elmozdulása, az elemek rendszerének kapcsolatát pedig a szerkezet egyensulyi egyenletrendszere biztositja.

A számitás lépései a következők

a.) A szerkezetet jellegének megfelelő elemekre bontjuk. Az elem tetszőleges pontjának elmozdulásait kifejezzük a csomóponti elmozdulások függvényeként (egyuttal biztositva a peremen a szomszédos elemek elemhatár menti illesztését is):

$$\underline{u} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{e}$$

itt $\underline{u}$ az elem teszőleges pontjának elmozdulásait tartalmazó vektor

$\underline{\underline{N}}$ az elmozdulási függvények (bázis- vagy alakfüggvények) mátrixa

$\underline{e}$ a csomóponti elmozdulások vektora.

Látható, hogy a módszer alapvető jellemzői közé tartozik az elmozdulásfüggvény (bázisfüggvény), az elem alakja, a csomópontok száma.

b.) Az elem tetszőleges pontjában az általánositott alakváltozások vektora az előzőkből deriválással kapható:

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{e}$$

c.) Ebből pedig az általánositott Hooke-törvény szerint

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\varepsilon}$$

itt $\underline{\sigma}$ az általánositott belső erők vektora $[\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]$

$\underline{\underline{D}}$ az általánositott Hooke-törvény mátrixa $[E, \nu, G]$

$\underline{\varepsilon}$ az általánositott alakváltozások vektora $[\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]$

$\underline{\underline{B}}$ az elmozdulásfüggvények deriváltjait tartalmazó mátrix

d.) Az elem merevségi mátrixát [illegible] rugalmas anyagu szerkezetek esetében a potenciális energia extrémumtételének alkalmazásával kapjuk meg:

$$\underline{\underline{K}} = \int_{(V)} \underline{\underline{B}}^{*} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}} \, dV$$

A megoldás numerikus hatékonysága az $\underline{\underline{N}}$ elmozdulási mátrix, vagyis az elem elmozdulási függvényeinek megválasztásától függ. Megjegyzem, hogy az elemen belüli elmozdulások meghatározására - interpolálására - olyan közelitő függvényeket választunk, mely közelitéseket a szerkezet egészére alkalmazni durva hiba lenne, egy elemen belül azonban elegendően pontos, a felosztás süritésével pedig a közelités hibája csökken.

e.) Az elemi merevségi mátrixokból összeállitható a szerkezet teljes merevségi mátrixa. A csomópontokon müködő külső erők ($\underline{q}$) és a szerkezet elmozdulásaiból keletkező rugalmas ellenerők ($\underline{\underline{K}} \cdot \underline{e}$) egyensulyát a

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{e} = \underline{q}$$

lineáris egyenletrendszer fejezi ki.

Ennek megoldása

$$\underline{e} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{q}$$

a szerkezet csomópontjainak elmozdulásai.

f.) A csomóponti elmozdulások ismeretében

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{e}$$

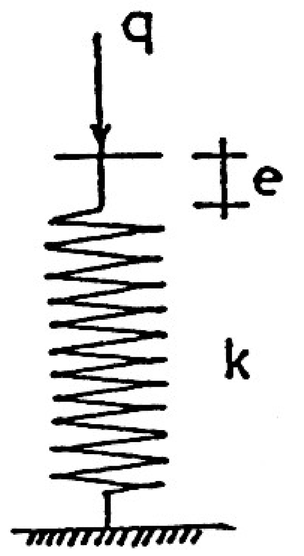
az igénybevételek tetszőleges pontokban meghatározhatók.

A véges elem módszer a matematika tudományának megalapozott, számtalan részletkérdésében tisztázott közelitő eljárása peremértékfeladatok numerikus megoldására. Alkalmazására kézenfekvő lehetőségeket kinál több más müszaki terület mellett az épitőmérnöki gyakorlat is, a tartószerkezetek vizsgálatának problémakörében. A véges elem módszer kifejlődésének történetében a tisztán matematikai megoldások és a müszaki alkalmazások állandó és szoros kölcsönhatása figyelhető meg. A szemléletesség, a müszaki alkalmazhatóság elősegitette a módszer elterjedését. Ma a véges elemes módszerek a hétköznapi tervezési tevékenység eszközei. Ezek a módszerek azonban a hagyományos kézi számitásra nem alkalmasak. Eredményes használatuk csak a számitógépek, a számitástechnika segitségével valósitható meg.

Megjegyzés: az a.) pontban szereplő "jellegének megfelelő" kifejezés a geometriai felosztáson túl további matematikai megfontolásokat jelent és az elem bázisfüggvény-rendszerével együtt a vizsgált müszaki feladat differenciálegyenletétől is függ.

A szerkezetek terhelés hatására elmozdulnak. Ezek az elmozdulások a terhelés függvényei. Bizonyos szerkezeteknél és terheléseknél a terhelés és elmozdulás kapcsolata explicit alakban, függvény formájában kifejezhető a szerkezet viselkedését leiró differenciálegyenletből. Általános esetben azonban a differenciálegyenleteknek zárt alaku megoldása nincs. Ekkor az elméletileg pontos megoldás helyett közelitő megoldást kell keresnünk /pl. a differencia módszer:a differenciálegyenlet megoldása differenciaegyenlet-rendszer alakban, a megoldásfüggvény alkalmas pontbeli közelitően pontos behelyettesitési értékei segitségével/.

Véges elem módszer alkalmazásakor a csomóponti elmozdulásokat a potenciális energia szélsőértékének tétele alapján határozzuk meg. Nézzük ezt az alábbi egyszerü példán



itt —q a terhelő erő (KN)

—k a rugó merevsége (KN/m)

—e a q terhelő erő hatására keletkező összenyomódás.

A rugóban felhalmozott /rugalmassági/ energia

$$U = \frac{1}{2} \times (\text{rugóerő}) \times (\text{elmozdulás}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (k \cdot e) \cdot (e) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot e^2$$

A q terhelő erő helyzeti energiájának csökkenése:

$$W_p = (\text{erő}) \times (\text{elmozdulás a nulla helyzeti energia szintjéről})$$

$$= -q \cdot e$$

A teljes potenciális energia tehát

$$\Pi = U + W_p = \frac{1}{2} \cdot k \cdot e^2 - q \cdot e \, .$$

Alapvető természeti tulajdonság, hogy minden folyamat az energia minimális szintjének elérésére irányul. A teljes potenciális energiának szélső értéke /minimuma/ ott van, ahol a

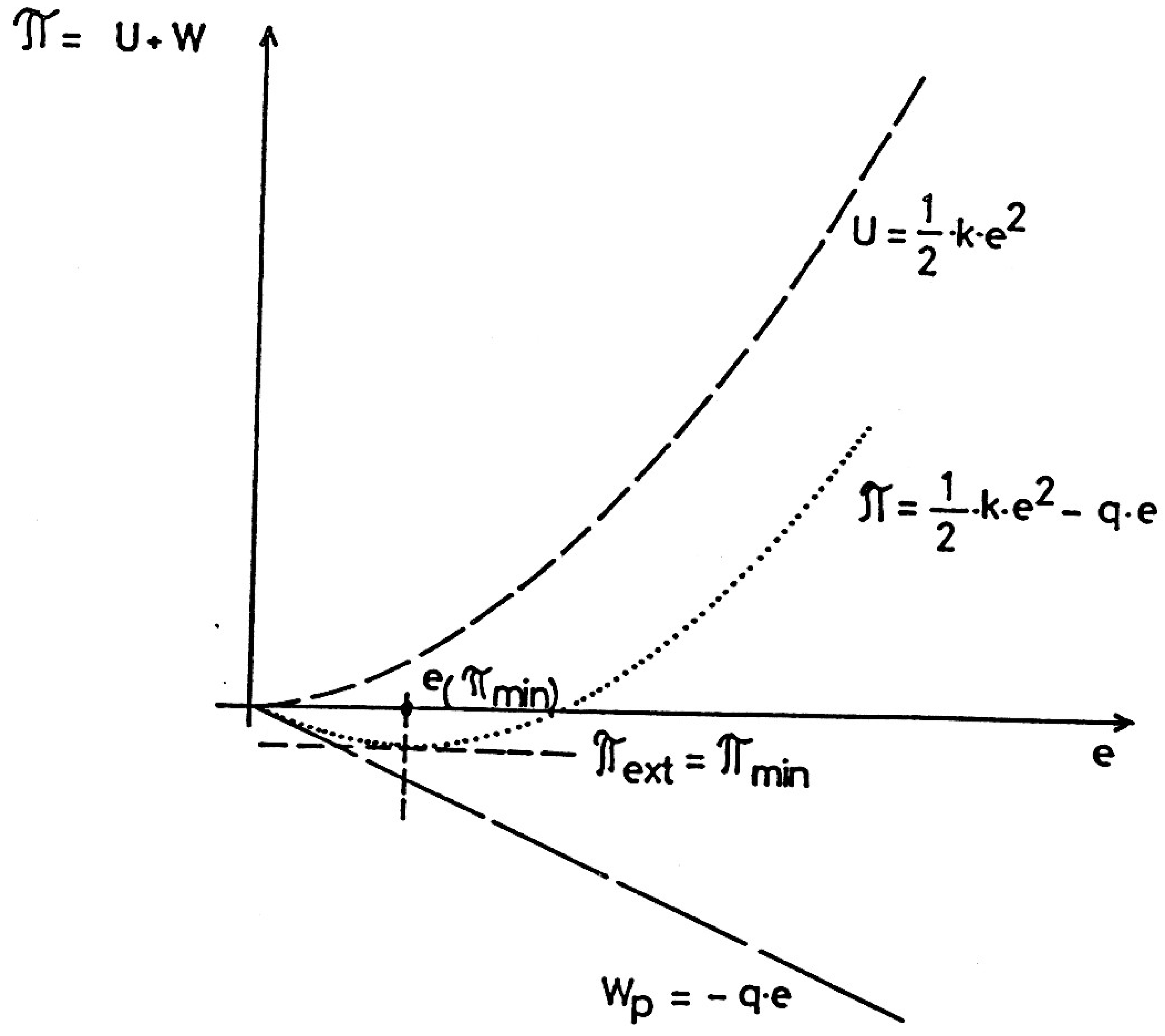
$$\frac{\partial \Pi}{\partial e} = k \cdot e - q = 0$$

azaz

$$k \cdot e = q$$

Szerkezet esetén

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{e} = \underline{q} \quad \text{és innen} \longrightarrow \quad \underline{e} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{q} \, .$$



Példa Közelítések – egyszerűsítések

A mérnöki mechanika feladatainak numerikus vizsgálata során gyakran fordul elô, hogy a számítások az analízis eszközeivel, explicit alakban nem hajthatók végre és a matematikai modell keretein belül egyszerûsítésekre van szükség egy közelítô megoldás meghatározásához.

A digitális gépi számítástechnika tág teret enged a közelítési pontosság fokozásának és lehetôvé teszi a numerikus megoldást akkor is, ha a feltevések finomítása a végül megoldandó egyenletrendszer méretét (az ismeretlenek számát) jelentôsen növeli.

Matematikai értelemben egyszerûsítést alkalmazunk akkor, amikor a hajlított tartó analítikus vizsgálata során a görbületek pontos kifejezése helyett annak a kis elmozdulások esetén jelentéktelenné váló, az érintô iránytangense négyzetét jelentô tag elhanyagolásával kapott alakját alkalmazzuk a levezetés további szakaszában.

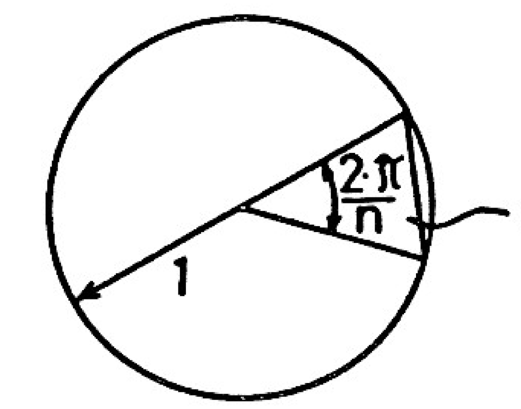
$$\frac{M}{E\cdot I} = \frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{\sqrt{1+(y')^2}} \qquad (\varrho \text{ : görbületi sugár})$$

mivel $y' \approx 0 \longrightarrow (y')^2 \approx 0$

$$\frac{1}{\varrho} \cong y'' \cong \frac{M}{E\cdot I}$$

A kör területének meghatározása már a korai görög gondolkodókat is foglalkoztatta.
Noha a megoldást nem sikerült megtalálniuk, Arkhimédesz gyakorlati szempontból kielégítôen pontosan oldotta meg a feladatot.

Az egységsugarú körbe n-szöget szerkesztett és meghatározta egy háromszög "t" területét



$$t = \frac{1}{2}\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{n}$$

A teljes n-szög területe:

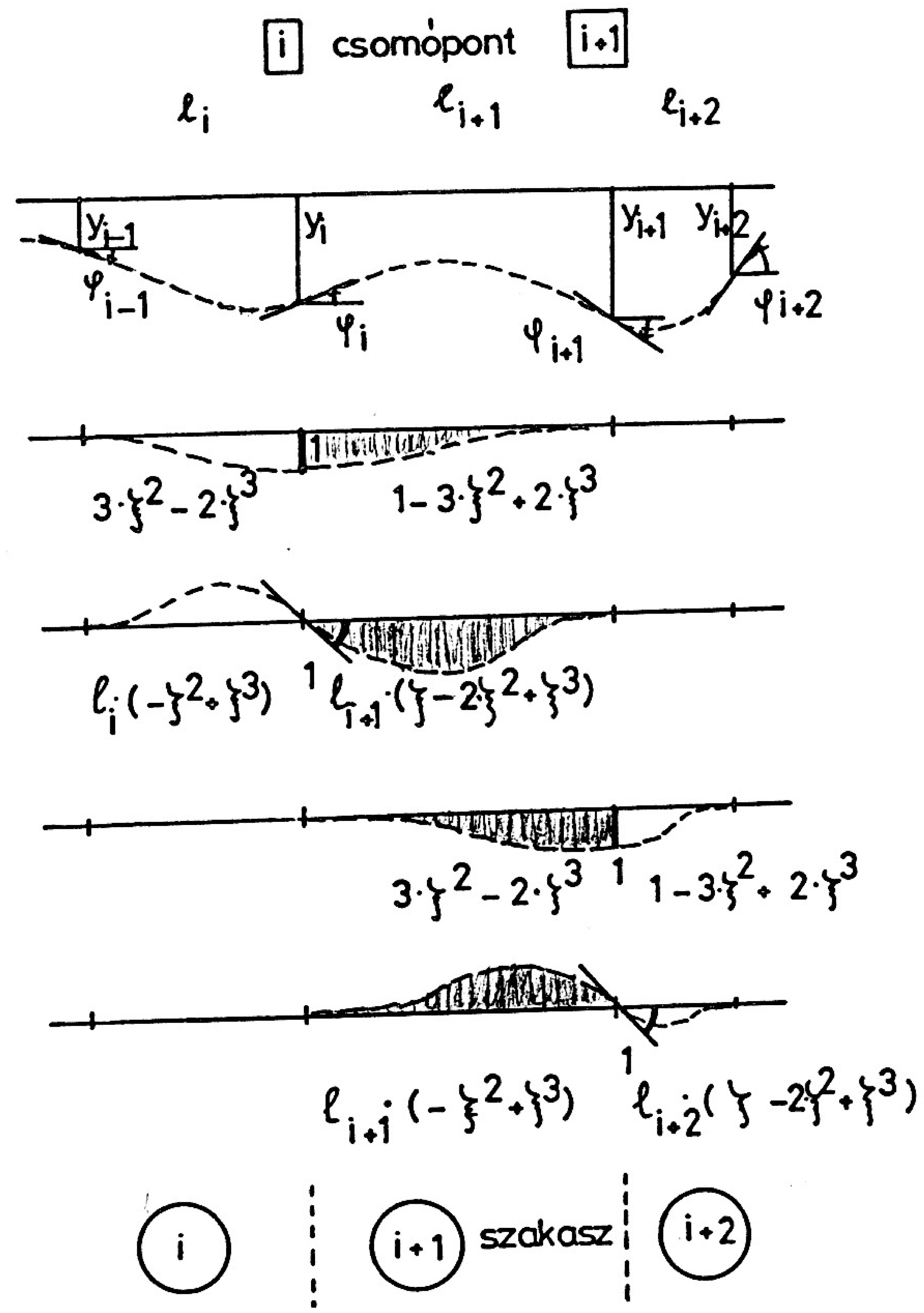
$$T = n\cdot t = \frac{n}{2}\cdot\sin\frac{2\cdot\pi}{n}$$

és n növelésével "T" az egzakt $T = \pi$ területhez tart.
Például $n = 12$ esetén $T_{12} = 3$, tehát a közelítés hibája kevesebb, mint 5 %.

Példa Egydimenziós szerkezet

Vizsgáljuk meg a folytatólagos többtámaszú gerenda tartót véges elem elmozdulásmódszerrel.
A tartót szerkezeti, terhelési, megtámasztási okokból szakaszokra bontjuk. A csatlakozó pontokat csomópontoknak, a csomópontok közötti véges méretû résztartót gerendaelemnek nevezzük.
Az elem egy tetszôleges pontjának elmozdulásait a csomópontok elmozdulásaival és interpoláló polinomok segítségével fejezzük ki.
A szerkezetnek csomópontonként egy elfordulási és egy eltolódási szabadságfoka van, egy gerendaelemnek tehát összesen 4 db. A négy féle csomóponti mozgás hatására keletkezô belsô pontbeli elmozdulások, jelen esetben a gerenda tengelyére merôleges eltolódások Hermite-féle interpolációs polinomokkal adhatók meg.

Ezek a polinomok ugyanis a szakasz (gerenda) —előirt— végponti elmozdulásai és elfordulásai (a rugalmas vonal érintője iránytangensének—deriváltjának) alapján interpolálnak.
Szokás a következőkben ismertetett Hermite-féle negyedrendü polinomokat simuló interpolációs formulának is nevezni

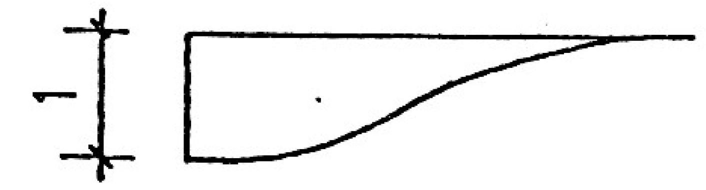


Az ábrából látható, hogy a tényleges lehajlásokat az interpoláló bázisfüggvények és a csomóponti elmozdulások szorzatösszegeként kapjuk meg (ha tehát meghatározzuk a csomóponti elmozdulásokat - lehajlások, elfordulások - a deformált tartóalak felrajzolható).
Az ábrából az is látható, hogy a közelítô függvények a teljes tartónak (tartománynak) csupán kis részén különböznek nullától: a vizsgált csomópontot megelôzô és követô szakaszon. A véges elem módszernek ezt a tulajdonságát a lokális közelítés elvének nevezik.
Az ábrából a továbbiakban még az is látható, hogy a símuló interpoláció Hermite-polinomjai szakaszonként ismétlôdôen fordulnak elô. Ezért a

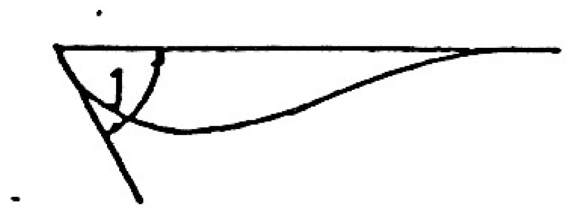
$$\underline{\underline{K}}=\int \underline{\underline{B}}^{*}\cdot\underline{\underline{D}}\cdot\underline{\underline{B}}\,dV$$

mûveletsort elegendô csupán egy gerendaelemre elvégeznünk, a kapott eredményeket alkalmazni tudjuk a többi elemre.

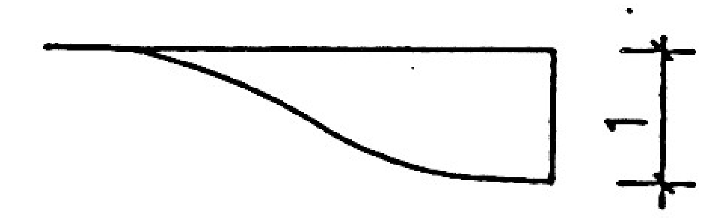
$H1=H1(\xi)=1-3\xi^2+2\xi^3$



$H2=H2(\xi)=\ell(\xi-2\xi^2+\xi^3)$



$H3=H3(\xi)=3\xi^2-2\xi^3$

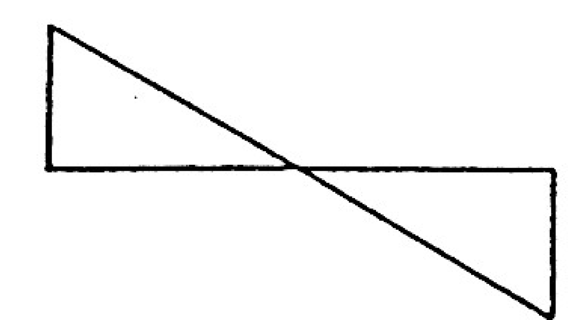


$H4=H4(\xi)=\ell(-\xi^2+\xi^3)$

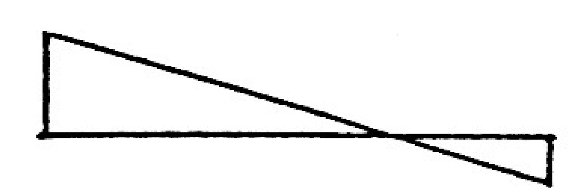
$(\xi=\frac{x}{\ell})\quad \xi=1\rightarrow x=\ell$

Az ábrákból jól látszik, hogy azok éppen a rudelem csomópontjainak egységnyi eltolódásából és elfordulásából keletkező alakváltozások. A $H2(\xi)$ ill. $H4(\xi)$ függvények deriváltjának értéke a $\xi=0$ ill. $\xi=1$ helyen 1.
Az alakváltozások ismeretében a fajlagos alakváltozások könnyen meghatározhatók.
Hajlított rudelem esetén a fajlagos alakváltozások a görbületek /második deriváltak/.

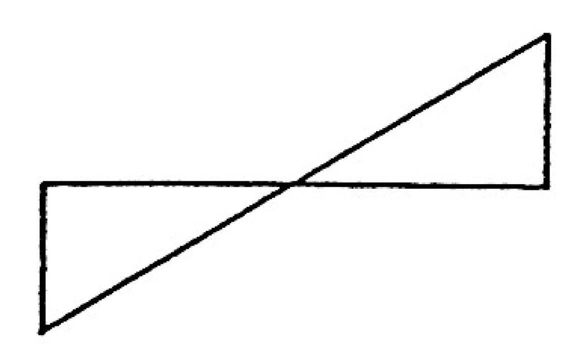
$H1''=H1''(\xi)=\frac{1}{\ell^2}(-6+12\xi)$



$H2''=H2''(\xi)=\frac{\ell}{\ell^2}(-4+6\xi)$



$H3''=H3''(\xi)=\frac{1}{\ell^2}(6-12\xi)$



$H4''=H4''(\xi)=\frac{\ell}{\ell^2}(-2+6\xi)$

mert $\xi=\frac{x}{\ell}$, $d\xi=\frac{dx}{\ell}$ és $dx=\ell.d\xi$ (*)

A rudelem belső pontjainak elmozdulásai az $\underline{\underline{N}}$ mátrixba irhatók:

$$\underline{\underline{N}} = [\, H1, H2, H3, H4,] =$$

$$= [\, 1-3\xi^2+2\xi^3 \,, \ell(\xi-2\xi^2+\xi^3),\ 3\xi^2-2\xi^3, \ell(-\xi^2+\xi^3)\,]$$

A fajlagos alakváltozások a $\underline{\underline{B}}$ mátrixba foglalhatók

$$\underline{\underline{B}} = [\, H1'', \ H2'', H3'', H4''\,]$$

$$= \left[\frac{1}{\ell^2}(-6+12\xi),\ \frac{\ell}{\ell^2}(-4+6\xi),\ \frac{1}{\ell^2}(6-12\xi),\ \frac{\ell}{\ell^2}(-2+6\xi)\right]$$

A rudelemen belül a tényleges eltolódások és fajlagos alakváltozások a csomóponti tényleges elmozdulásaitól függenek

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{N}} \cdot \underline{e} \qquad \text{és} \qquad \underline{\varepsilon} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{e}$$

A merevségi mátrix kiszámitása ezek után (*) figyelembevételével :

$$\underline{\underline{K}} = \int_V \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{D}}\, \underline{\underline{B}}\, dv = EI \int_0^{\ell} \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{B}}\, dx = EI\ell \int_0^{1} \underline{\underline{B}}^* \underline{\underline{B}}\, d\xi$$

$$\underline{\underline{K}} = EI.\ell. \begin{bmatrix} \frac{12}{\ell^4} & \frac{6}{\ell^3} & -\frac{12}{\ell^4} & \frac{6}{\ell^3} \\ \frac{6}{\ell^3} & \frac{4}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell^3} & \frac{2}{\ell^2} \\ -\frac{12}{\ell^4} & -\frac{6}{\ell^3} & \frac{12}{\ell^4} & -\frac{6}{\ell^3} \\ \frac{6}{\ell^3} & \frac{2}{\ell^2} & -\frac{6}{\ell^3} & \frac{4}{\ell^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} & -\frac{12EI}{\ell^3} & \frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} \\ -\frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{12EI}{\ell^3} & -\frac{6EI}{\ell^2} \\ \frac{6EI}{\ell^2} & \frac{2EI}{\ell} & -\frac{6EI}{\ell^2} & \frac{4EI}{\ell} \end{bmatrix}$$

Irodalom

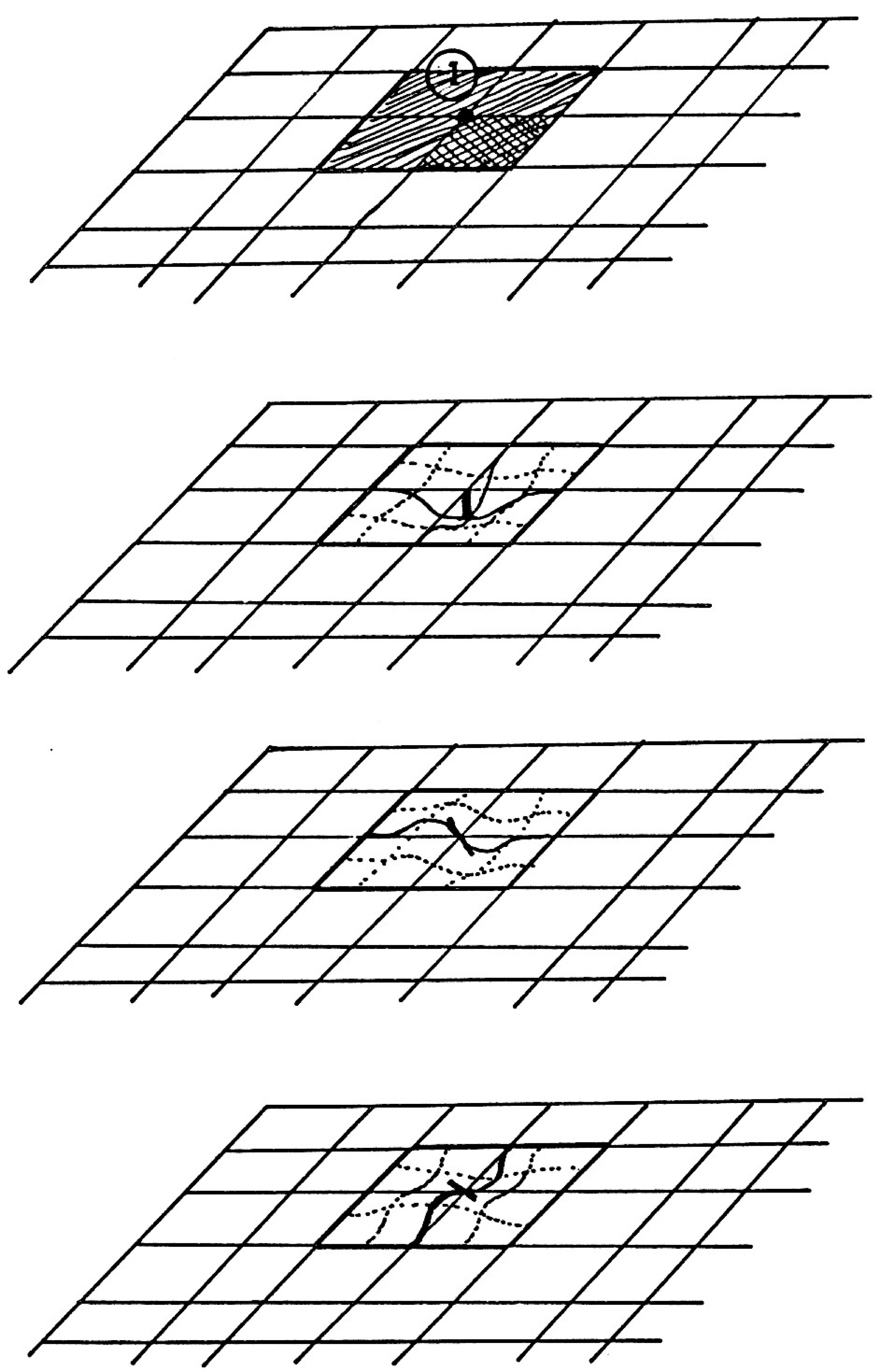
Dr. Szabó J.-Dr. Roller B.: Rúdszerkezetek elmélete és számitása
Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

Dr. Holnapy D.: Számitógépek az épitöipari tervezésben
Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

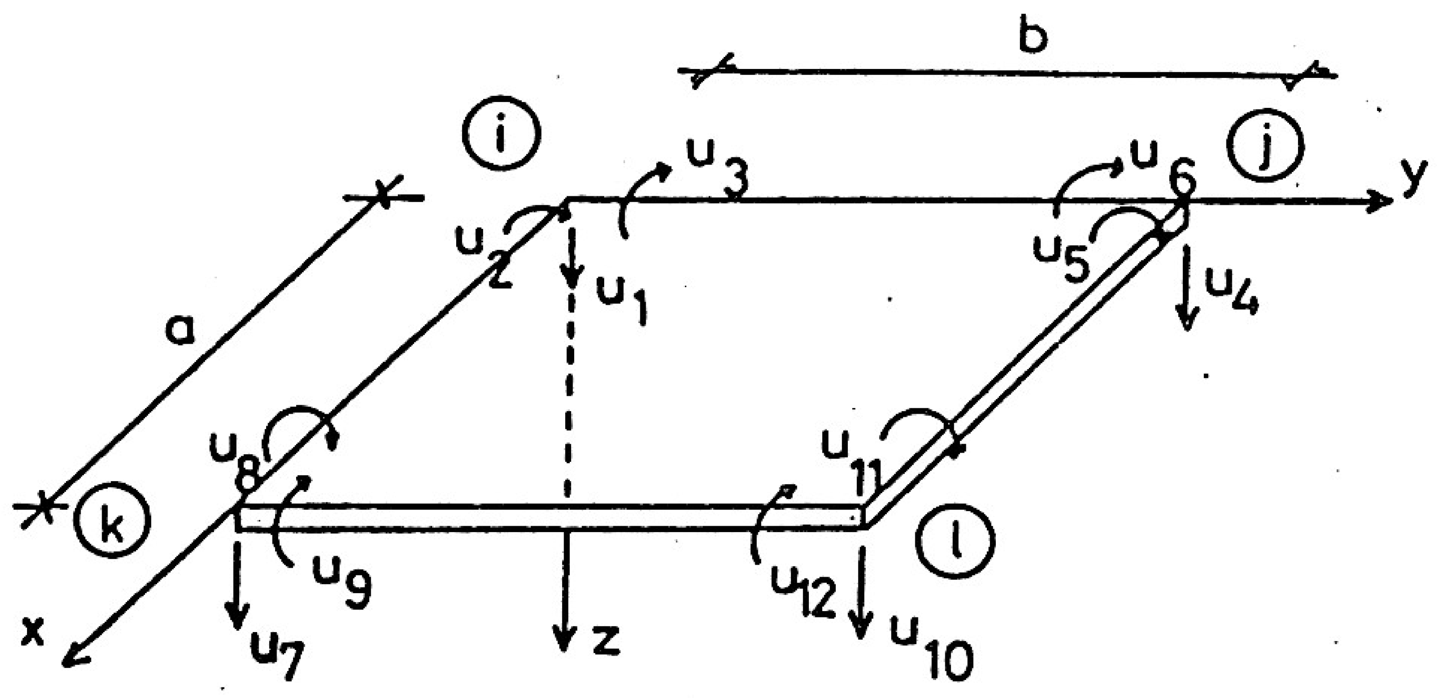
H.C. Martin - G. F. Carey: Bevezetés a végeselem analizisbe
Müszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

Példa Kétdimenziós szerkezet

Felületszerkezetek esetén kétváltozós közelítő elmozdulásfüggvényt alkalmazunk



Hajlitott lemezszerkezet (I) pontbeli bázisfüggvényeinek képe —
— lokális közelités elve



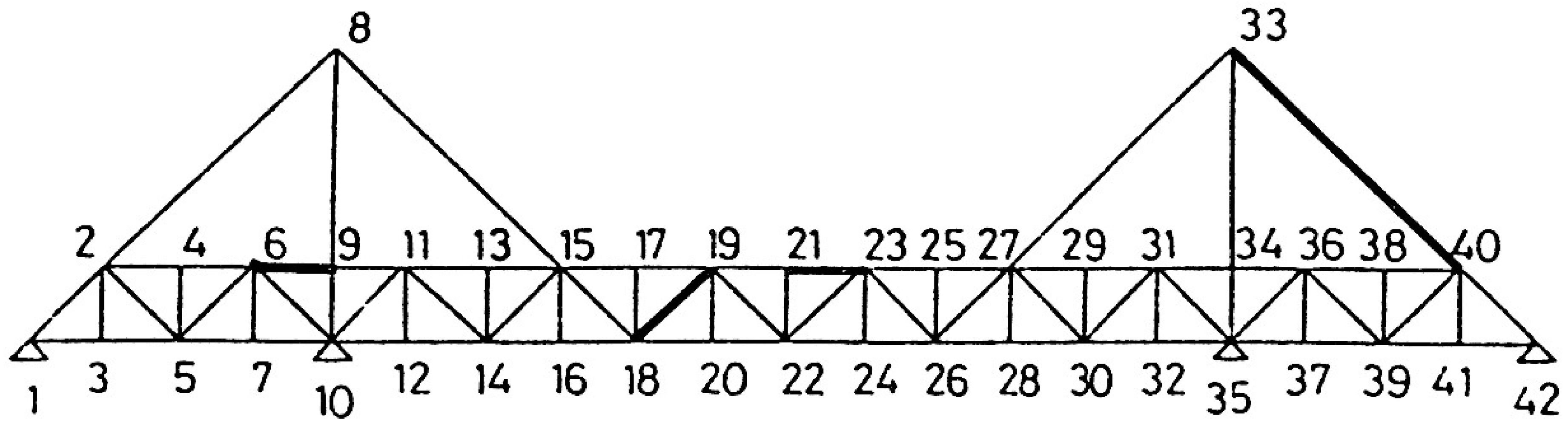
$$\underline{\underline{N}}^* = \begin{bmatrix} 1-\xi\eta-(3-2\xi)\xi^2(1-\eta)-(1-\xi)(3-2\eta)\eta^2 \\ (1-\xi)\eta(1-\eta)^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2(1-\eta)a \\ (1-\xi)(3-2\eta)\eta^2+\xi(1-\xi)(1-2\xi)\eta \\ -(1-\xi)(1-\eta)\eta^2 b \\ -\xi(1-\xi)^2\eta a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta)+\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ \xi\eta(1-\eta)^2 b \\ (1-\xi)\xi^2(1-\eta)a \\ (3-2\xi)\xi^2(1-\eta)-\xi\eta(1-\eta)(1-2\eta) \\ -\xi(1-\eta)\eta^2 b \\ (1-\xi)\xi^2\eta a \end{bmatrix}$$

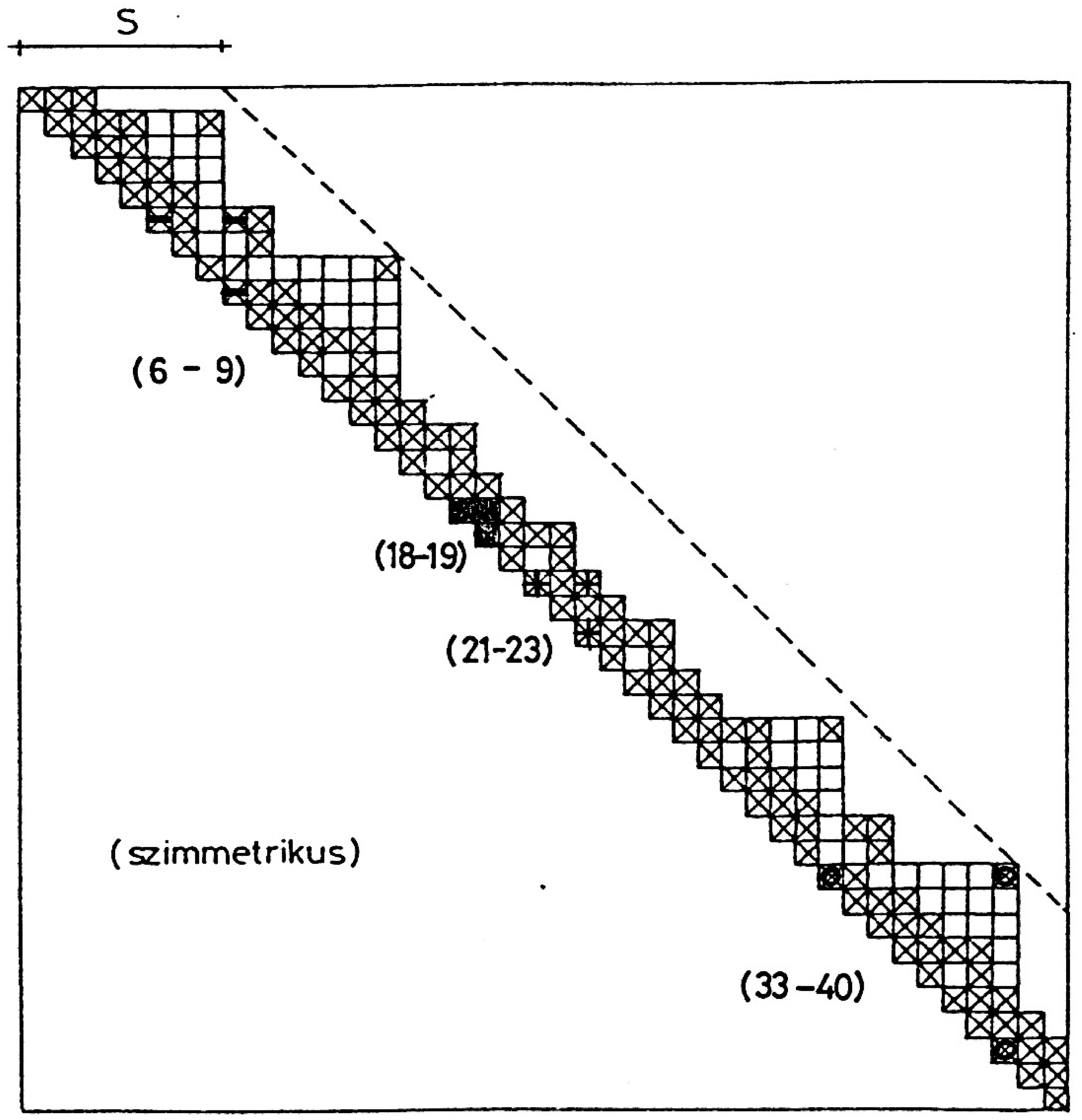
$$\xi=\frac{x}{a}, \quad \eta=\frac{y}{b}$$

A hajlított lemezelem (nem-kompatibilis) elmozdulásfüggvényei

Példa A szerkezet merevségi mátrixa

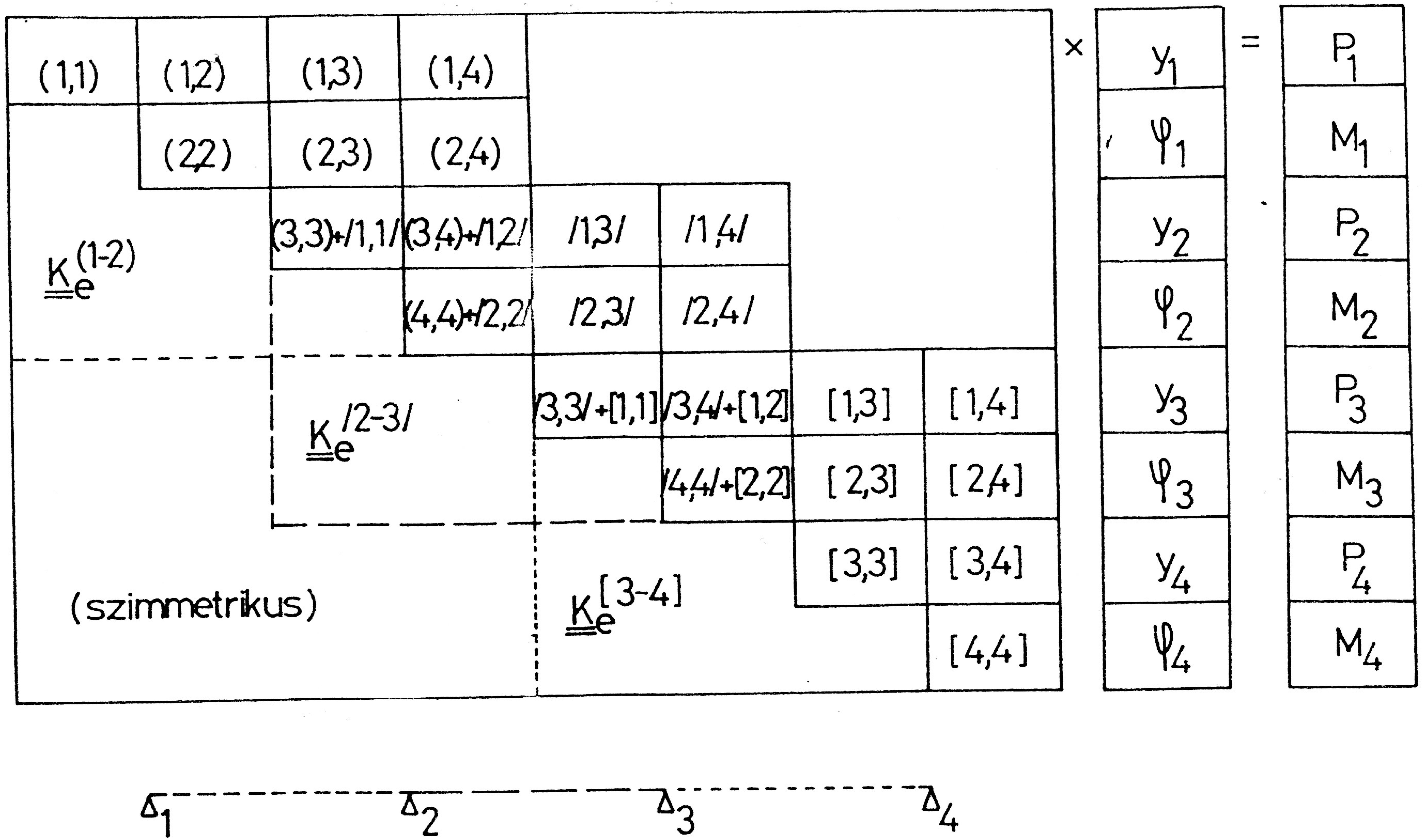
A szerkezetet alkotó elemek merevségi mátrixaiból felépíthető a teljes szerkezet merevségi mátrixa — a csomóponti kapcsolódásoknak megfelelően!





N= 84 (ismeretlen)
S= 16 (sávszélesség)

⊠ 2x2-es tele blokk
□ 2x2-es üres blokk



3 szakaszból álló szerkezet egyensúlyi egyenletrendszere

3. ábra