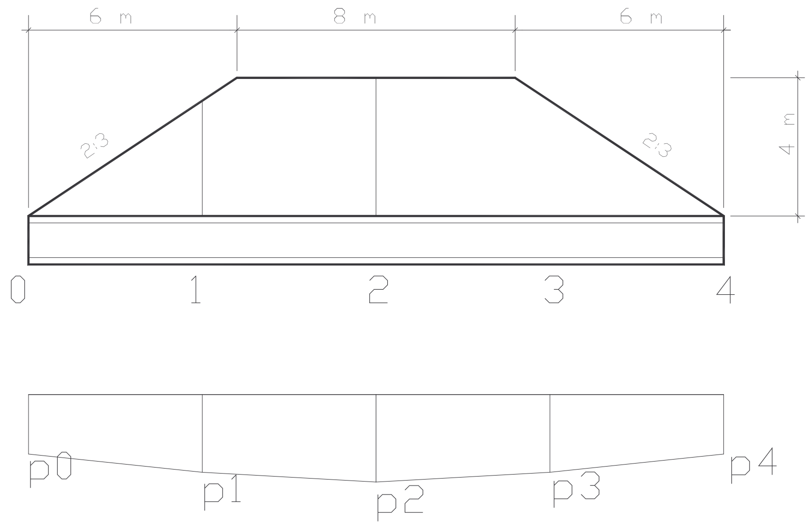
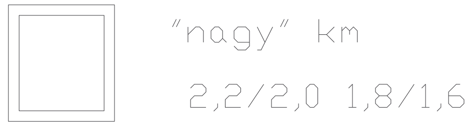
Csőáteresz vizsgálata

A töltés korona-szélessége 8 m. A 2:3-os rézsű magassága 4,00 m, a talpszélessége 20 m.
A töltés talajának térfogatsúlya 18 kN/m^3. Az ágyazási tényező $c = 20000\ kN/m^2$.



A talajt az ágyazási tényezős módszer szerint vizsgáljuk.

A feladatot különböző keresztmetszetű (merevségű) átereszek esetére oldjuk meg.



1. Végtelen merev szerkezet

Az átereszt végtelen merevnek tételezzük fel. Ez a terhelés hatására nem alakváltozik, egyenes tengelyű marad. Szimmetrikus terhelés esetén az alapfelület alatt keletkező talpfeszültség egyenletesen megoszló (p_e kN/m^2).

1 m széles szeletet vizsgálunk.

A terhek összege G = $\frac{20+8}{2}*4*18$ = 1008 kN.
Az egyenletes talpfeszültség értéke a 20 * p_e = 1008 kN egyenletből p_e = 50,4 kN/m^2.

A középső keresztmetszetben fellépő, a terhek különbsége miatt keletkező nyomaték értéke

$$\mathbf{M_{max}} = 50{,}4 * 10 * 10 / 2 - \frac{6*4*18}{2}*\left(6*\frac{1}{3}+4\right) - 4 * 4 * 18 * \frac{4}{2} =$$

$$= 2520 – 1296 – 576 = \mathbf{648\ kNm}$$

2. Kis keresztmetszetű szerkezet

Az áteresz 1,00 m széles, 1,40 m magas és 20 cm falvastagságú. E = 21000000 kM/m^2 .

1 m széles szeletet vizsgálunk.

A vízszintes súlyponti tengelyére számított I_y hajlítási inercia

$$Iy = \frac{1{,}4^3*1{,}0-1{,}0^3*0{,}6}{12} = 0{,}17866\ m^4 .$$

Az E * I hajlítási merevséggel rendelkező tartó meggörbült vonalának (függvényének) viselkedését egy negyedrendű differenciálegyenlet írja le. ($y'''' * E * I = q(x)$)
A nyomatéki (ábra) függvény $M(x) = - E * I * y(x)''$ alakú.

A mérnöki gyakorlatban a differenciálegyenlet pontos megoldása (az ismeretlen y(x) függvény megkeresése – meghatározása) helyett gyakran alkalmazott eljárás a differencia – módszer, a különbségi hányadosok segítségével felírt egyenletekből álló rendszer megoldása az ismeretlen (függvény) értékek kiszámítása.

A második differencia – hányados a meggörbült tartó vonala görbületének közelítő alakja:

$y(x)''$ az x = x_i helyen $y(x_i)'' = \dfrac{y_{i+1} - 2 * y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$

A nyomatéki ábra értéke az x_i helyen

$$M(x_i) = - E * I * y(x_i)'' = - E * I * \frac{y_{i+1} - 2 * y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

A talajt az ágyazási tényezős módszer szerint vizsgáljuk, ekkor a talpfeszültségek (reakciók) p_i és a süllyedések y_i értéke között a következő összefüggés $p_i = c * y_i$ áll fenn, ahol c az ágyazási tényező [kN/m3].

A $p_i = c * y_i$ átalakításával kapott $y_i = \dfrac{p_i}{c}$ összefüggést behelyettesítve a differenciahányadosba

$$M(x_i) = M_i = - E * I * \frac{y_{i+1} - 2 * y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_{i+1} - 2*p_i + p_{i-1}).$$

Az i-ik helyen a lévő, a meggörbült tartó görbületéből keletkező nyomaték értéke a szerkezetre működő aktív (ismert) és passzív (ismeretlen, támasz jellegű) erők M_i^a és M_i^p nyomatékának az összegével egyezik meg.

A tartót n darab szakaszra felosztva n+1 darab süllyedés (y_i) és n+1 darab talpfeszültség (p_i) ismeretlent tartalmaz a feladatunk.

A talpfeszültségek és a süllyedések közötti összefüggés $p_i = c * y_i$ miatt az ismeretlenek száma n+1.

A felosztás belső pontjaira n-1 darab különbségi hányadost írhatunk fel.

Az n+1 ismeretlent tartalmazó egyenletrendszer megoldásához még szükséges kettő darab hiányzó egyenletet a tartó függőleges erőkre vonatkozó vetületi egyensúlyt kifejező és a nyomatéki egyensúlyt kifejező egyenletei adják ($\sum F_i^f = 0$ és $\sum M_i = 0$).

Osszuk fel az áteresztt 4 darab egyforma hosszúságú részre: Δx = L / 4 = 5,00 m.

A felosztás az ábrán látható 0., 1., 2., 3. és 4. számú pont.

Közülük az 1., a 2. és a 3. számúra tudjuk alkalmazni a görbületre vonatkozó különbségi (differencia) hányados összefüggést:

$$M_i = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_{i+1} - 2*p_i + p_{i-1}).$$

Az $\frac{E*I}{c*(\Delta x)^2}$ értéke mindhárom esetben azonos, ezért érdemes előre kiszámítani:

$$A = \frac{21000000*0{,}17866}{20000*(5)^2} = 7{,}504 \text{ m}^3 .$$

i = 1

$$M_1 = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_2 - 2*p_1 + p_0) = - 7{,}504 * (p_2 - 2*p_1 + p_0)$$

i = 2

$$M_2 = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_3 - 2*p_2 + p_1) = - 7{,}504 * (p_3 - 2*p_2 + p_1)$$

i = 3

$$M_3 = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_4 - 2*p_3 + p_2) = - 7{,}504 * (p_4 - 2*p_3 + p_2)$$

és

$$\sum F_i^f = \sum F_i^{f,a} + \sum F_i^{f,p} = 0$$

végül

$$\sum M_i = \sum M_i^a + \sum M_i^p = 0$$

A feladatot a szimmetrikus töltés-test esetére oldjuk meg.

Ekkor a szerkezet és az aktív terhek is szimmetrikusak, az alakváltozások és a támaszerő értékek is szimmetrikus elrendezésűek lesznek.
Eszerint $y_4 = y_0$ és $y_3 = y_1$ és ezért $p_4 = p_0$ és $p_3 = p_1$.

Az előzőek alapján az ismeretlenek száma 5-ről 3-ra csökkenthető.
Az 1. és a 2. pontra vonatkozó egyenleteket megtartjuk.
Az i = 3 esetre felírt differencia egyenlet megegyezik az i = 1 esetével és ezért nem ad új feltételt, törölni kell.

A 4. és az 5. egyenletek közül a tartó függőleges erőkre vonatkozó vetületi egyensúlyt kifejező egyenletét alkalmazzuk: $\sum F_i^f = \sum F_i^{f,a} + \sum F_i^{f,p} = 0$ harmadik egyenletnek.

Az 1. pontra működő nyomaték az aktív erőkből

$$M_1^a = -\frac{5*\frac{2}{3}*5*18}{2}*5*\frac{1}{3} = -250 \text{ kNm}$$

Az 1. pontra működő nyomaték a passzív erőkből

$$M_1^p = \frac{p_0*5}{2}*5*\frac{2}{3} + \frac{p_1*5}{2}*5*\frac{1}{3} = p_0 * 8{,}333 + p_1 * 4{,}166$$

Az 1. helyen a lévő, a meggörbült tartó görbületéből keletkező nyomaték értéke M_1 a szerkezetre működő aktív (ismert) és passzív (ismeretlen, támasz jellegű) erők M_1^a és M_1^p nyomatékának az összegével egyezik meg:

$$M_1 = M_1^p + M_1^a$$

$$-7{,}504 * (p_2 - 2*p_1 + p_0) = p_0 * 8{,}333 + p_1 * 4{,}166 - 250$$

Rendezve

$$15{,}837 * p_0 - 10{,}8413 * p_1 + 7{,}504 * p_2 = 250 \qquad (1)$$

A 2. pontra működő nyomaték az aktív erőkből

$$M_2^a = -\frac{6*\frac{2}{3}*6*18}{2}*(6*\frac{1}{3}+4) - 4*4*18*\frac{4}{2} = -1296 - 576 = -1872 \text{ kNm}$$

A 2. pontra működő nyomaték a passzív erőkből

$$M_2^p = \frac{p_0*5}{2}*\left(5*\frac{2}{3}+5\right) + \frac{p_1*5}{2}*(5*\frac{1}{3}+5+5*\frac{2}{3}) + \frac{p_2*5}{2}*5*\frac{1}{3} =$$
$$= p_0 * 20{,}833 + p_1 * 25{,}0 + 4{,}166 * p_2$$

A 2. helyen a lévő, a meggörbült tartó görbületéből keletkező nyomaték értéke M_2 a szerkezetre működő aktív (ismert) és passzív (ismeretlen, támasz jellegű) erők M_2^a és M_2^p nyomatékának az összegével egyezik meg:

$$M_2 = M_2^p + M_2^a$$

$$-7{,}504 * (p_3 - 2*p_2 + p_1) = p_0 * 20{,}833 + p_1 * 25{,}0 + 4{,}166 * p_2 - 1872$$

Rendezve

$$20{,}833 * p_0 + 40{,}008 * p_1 - 10{,}841 * p_2 = 1872 \qquad (2)$$

A 3. egyenlet a szimmetrikus tartó felének függőleges vetületi egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$\left(\frac{6*4}{2}+4*4\right)*18 = 504 \text{ kN} = \left(\frac{p_0*5}{2} + 2*\frac{p_1*5}{2} + \frac{p_2*5}{2} = \right)$$
$$= 2{,}5 * p_0 + 5 * p_1 + 2{,}5 * p_2 = 504 \qquad (3)$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből álló, p_0, p_1 és p_2 ismeretleneket tartalmazó egyenletrendszer megoldása:

- egyenletrendszer megoldása az ismeretlenek egymás utáni kiküszöbölésével (az egyik egyenletből való kifejezés és a többi egyenletbe való behelyettesítés után az egyenletek és az ismeretlenek száma is eggyel csökken)
- az úgynevezett Cramer – szabály (determinánsok alkalmazásával) segítségével

kiszámítható.

Az egyenletrendszer megoldása:

$p_0 = 20{,}244$ kN/m^2	és az $y = p / c$ alapján	$y_1 = 1{,}01$ mm
$p_1 = 55{,}379$ kN/m^2		$y_2 = 2{,}77$ mm
$p_2 = 70{,}598$ kN/m^2		$y_3 = 3{,}50$ mm

A középső, 2. keresztmetszet nyomatéka a görbületből:

$$M_2 = - 7{,}504 * (p_3-2*p_2+p1) = -7{,}504 * (55{,}379 - 2 * 70{,}598 + 55{,}379) = 228{,}407 \text{ kNm}$$

A passzív és az aktív erők nyomatékából pedig:

$$M_2^p + M_2^a = p_0 * 20{,}833 + p_1 * 25{,}0 + p_2 * 4.166 - 1872 =$$

$$= 20{,}244 * 20{,}833 + 55{,}379 * 25{,}0 + 70{,}598 * 4.166 - 1872 = 228{,}383 \text{ kNm} \approx M_2$$

A számításban a talajba helyezett földalatti műtárgy tényleges hajlékonyságát figyelembe véve kiszámított $M_{max,h,kis} = 228{,}4$ kNm érték lényegesen kisebb, mint az 1. változatban, a végtelen merev szerkezet feltételezésével kapott érték $M_{max,\infty} = 648$ kNm)

3. Nagy keresztmetszetű szerkezet

Az áteresz 2,00 m széles, 2,20 m magas és 20 cm falvastagságú.
A tartót a keresztmetszet kivételével a 2. pontbeli adatok jellemzik.

A vízszintes súlyponti tengelyére számított I_y hajlítási inercia

$$I_y = \frac{2,2^3 * 2,0 - 1,8^3 * 1,6}{12} = 0,9971\ m^4 .$$

Most is 1 m széles szeletet vizsgálunk, az erre jutó inercia érték:

$$I_{y1} = \frac{1}{2,0} * \frac{2,2^3 * 2,0 - 1,8^3 * 1,6}{12} = \frac{1}{2,0} * 0,9971\ m^4 = 0,49855\ m^4 .$$

$$A = \frac{21000000*0,9971*\frac{1}{2,0}}{20000*(5)^2} = 20,939\ m^3 .$$

i = 1

$$M_1 = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_2 - 2*p_1 + p_0) = - 20,939 * (p_2 - 2*p_1 + p_0)$$

i = 2

$$M_2 = - \frac{E*I}{c*(\Delta x)^2} * (p_3 - 2*p_2 + p_1) = - 20,939 * (p_3 - 2*p_2 + p1)$$

Az 1. pontra:

$$M_1 = M_1^p + M_1^a$$

$$- 20,939 * (p_2 - 2*p_1 + p_0) = p_0 * 8,333 + p_1 * 4,166 - 250$$

Rendezve

$$29,2723 * p_0 - 37,711 * p_1 + 20,939 * p_2 = 250 \qquad (1a)$$

A 2. pontra:

$$M_2 = M_2^p + M_2^a$$

$$-20,939 * (p_3 - 2*p_2 + p_1) = p_0 * 20,833 + p_1 * 25,0 + 4,166 * p_2 - 1872$$

Rendezve

$$20,833 * p_0 + 66,878 * p_1 - 37,7115 * p_2 = 1872 \qquad (2a)$$

A 3. egyenlet a szimmetrikus tartó felének függőleges vetületi egyensúlyát kifejező egyenlet:

$$(\frac{6*4}{2}+4*4)*18 = 504 \text{ kN} = (\frac{p_0*5}{2} + 2*\frac{p_1*5}{2} + \frac{p_2*5}{2} =)$$
$$= 2,5 * p_0 + 5 * p_1 + 2,5 * p_2 = 504 \qquad (3)$$

Az (1a), (2a) és (3) egyenletekből álló, p_0, p_1 és p_2 ismeretleneket tartalmazó egyenletrendszer megoldása:

$p_0 = 32,33$ kN/m^2	és az y = p / c alapján	$y_1 = 1,62$ mm
$p_1 = 53,28$ kN/m^2		$y_2 = 2,66$ mm
$p_2 = 62,71$ kN/m^2		$y_3 = 3,14$ mm

A középső, 2. keresztmetszet nyomatéka a görbületből:

$M_2 = - 20,939 * (p_3 -2*p_2 +p1) = -7,504 * (53,28 – 2 * 62,71 + 53,28) = 394,91$ kNm

A passzív és az aktív erők nyomatékából pedig:

$$M_2^p + M_2^a = p_0 * 20,833 + p_1 * 25,0 + p_2 * 4.166 - 1872 =$$

$$= 32,33 * 20,833 + 53,28 * 25,0 + 62,71 * 4.166 – 1872 = 394,83 \text{ kNm} \approx M_2$$

Nyomatékok

A számításban a talajba helyezett földalatti műtárgy tényleges hajlékonyságát figyelembe véve kiszámított $M_{max,h,nagy}$ = 394,9 kNm érték kisebb, mint az 1. változatban, a végtelen merev szerkezet feltételezésével kapott érték $M_{max,\infty}$ = 648 kNm).

Az $M_{max,h,nagy}$ = 394,9 kNm érték természetesen nagyobb, mint a hajlékonyabb szerkezet $M_{max,h,kis}$ = 228,4 kNm nyomaték értéke.

Végtelen merev szerkezet	$M_{max,\infty}$	=	648,0 kNm
Nagy keresztmetszet	$M_{max,h,nagy}$	=	394,9 kNm
Kis keresztmetszet	$M_{max,h,kis}$	=	228,4 kNm

Talpfeszültségek

Kis keresztmetszet (kék)	Nagy keresztmetszet (piros)	Végtelen merev szerkezet (zöld)
$p_0 = 20{,}244\ kN/m^2$	$p_0 = 32{,}33\ kN/m^2$	$p_0 = 50{,}40\ kN/m^2$
$p_1 = 55{,}379\ kN/m^2$	$p_1 = 53{,}28\ kN/m^2$	$p_1 = 50{,}40\ kN/m^2$
$p_2 = 70{,}598\ kN/m^2$	$p_2 = 62{,}71\ kN/m^2$	$p_2 = 50{,}40\ kN/m^2$