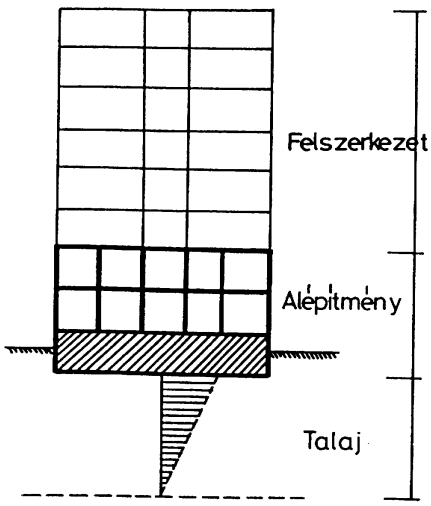
Talajra helyezett szerkezetek számítása

Dr. Meskó András
okl. építőmérnök
főiskolai adjunktus
PTE PMMF Kar
Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék

Talajra helyezett szerkezetek számítása

Épületeink talajra helyezett szerkezetek, melyek az alábbi részekből állnak:
- Felszerkezet: az építmények, teherhordó szerkezetek
- Alépítmény: az alapozási szerkezet
- Talaj



Az erőátadódás a felszerkezetben többé-kevésbé) tisztázott.
Az alap alatt a talajban ébredő feszültségek és alakváltozások - és ezzel együtt a felszerkezetre gyakorolt visszahatások - ügye azonban számtalan kérdést vet fel.

A sziklára építés esetét nem számítva a talajok mindegyike képes kisebb vagy nagyobb alakváltozásra. A terheléseknek a talajra(ba) juttatására és vizsgálatára két fő számítási módszer alakult ki:
- az ágyazási tényezős módszer
- a rugalmas féltér modell

(és létezik az úgynevezett kombinált - a fenti kettőből kialakított - módszer is).

A vizsgálatokat numerikus eljárások alkalmazásával végzik - az analitikus, az ismeretlent függvény alakban kereső megoldások néhány speciális esetben jöhetnek csak számításba.

Modellezés

A szerkezetek vizsgálata során közelítésekkel élünk, a szerkezetet modellezzük. Ennek célja kettős. A szerkezeti modell egyszerűbb és áttekinthetőbb a valódinál, a matematikai modell pedig a számítási munka hatékonyságát biztosítja.

Itt idézek egy eszmefuttatást, melyet dr. Scharle Péter kollégától, a műszaki tudományok kandidátusától (ma Győrben a Széchenyi István Egyetem rektor-helyettese) hallottam:

„Az építőmérnök nem mindem tekintetben ismert tulajdonságú anyagokból hoz létre pontosan nem elemezhető alakú és viselkedésű szerkezeteket. E szerkezeteket megbízhatóan meg nem határozható erők terhelik, mégsem szabad felébreszteniük a nyilvánosság (az építtetők, laikusok) bizonytalanságérzetét.
Fontos tehát a méretezés során használt feltevések, modellek és módszerek összhangja, az eredmények verifikálása!
A felhasználó mérnök keze ügyébe kerülhetnek olyan számítástechnikai eszközök (itt programokat is értünk), amelyek látványos eredményt adnak, érvényességi tartományuk viszont homályban van. Különösen a lineáris modellek teljesítőképessége lehet veszélyes, mert a számszerű (numerikus) pontosság növelésének néha egyszerű lehetőségei vannak (pl. elemhálózat sűrítése), miközben az anyagtörvény esetleg durva közelítésként változatlanul korlátozza a modell használhatóságát, érvényességét.”

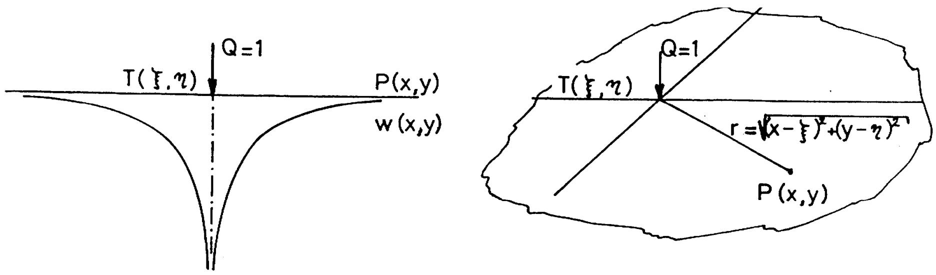
A számítások során tisztában kell lennünk az alkalmazott modell feltevéseivel, korlátaival, a mindenkori ésszerű használhatósággal.

A rugalmas féltér elmélete

Boussinesq nyomán az

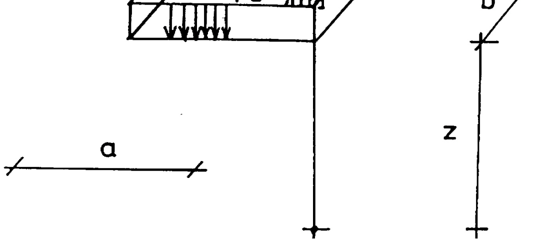
$$y = P \,.\, (1-v^2) / E / r$$

összefüggés írja le a térszín alakváltozását, az anyagot végtelen mélységig összenyomhatónak, rugalmas, homogén, izotróp féltérnek feltételezve.



A rugalmas féltér lehajlása koncentrált erő hatására

Megoszló terhelésre és „z” határmélységre Steinbrenner adott képletet.



$$s = \frac{p}{\pi \cdot M} \cdot \left(\frac{m^2 - 1}{m^2} \left[a \cdot \ln \frac{(b + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot \sqrt{a^2 + z^2}}{a \cdot (b + R)} + b \cdot \ln \frac{(a + \sqrt{a^2 + b^2}) \cdot \sqrt{b^2 + z^2}}{b \cdot (a + R)} \right] + \right.$$

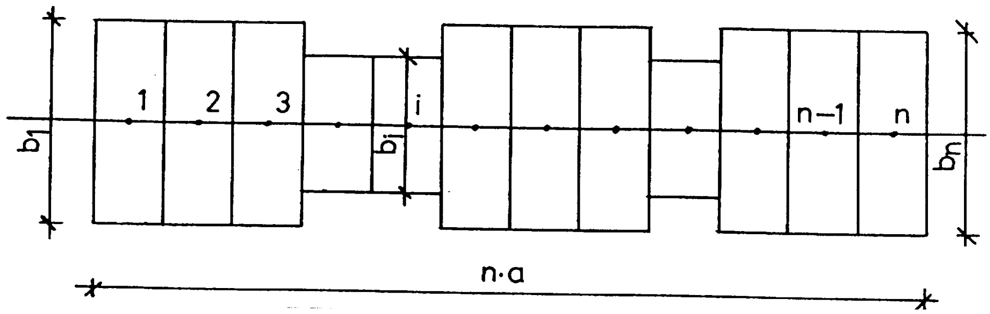
$$\left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{m^2 - m - 2}{m^2} \cdot z \cdot \operatorname{arctg} \frac{a \cdot b}{z \cdot R} \right) \qquad R = \sqrt{a^2 + b^2 + z^2}$$

Az előzőekre tekintettel tudnunk kell, hogy az építmények alatti talaj nem igazán rugalmas, nem homogén, nem izotróp és nem féltér.

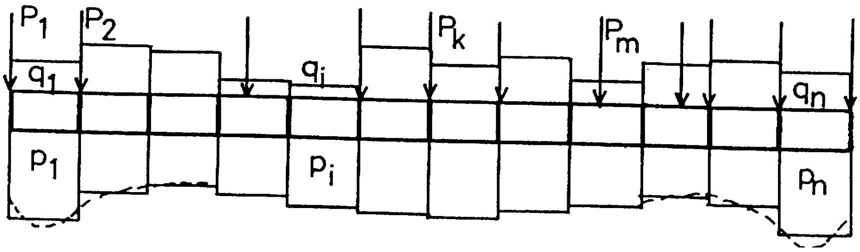
Az Ohde féle eljárás alapgondolata az építmény részekre - szakaszokra bontása.

A talaj a terhelés hatására alakváltozik, az alaptest-gerenda alatt, annak hossza mentén lesüllyed. Az egyes szakaszok alatt fellépő talpfeszültséget ismeretlennek tekintve a következő összefüggésekre jutunk.

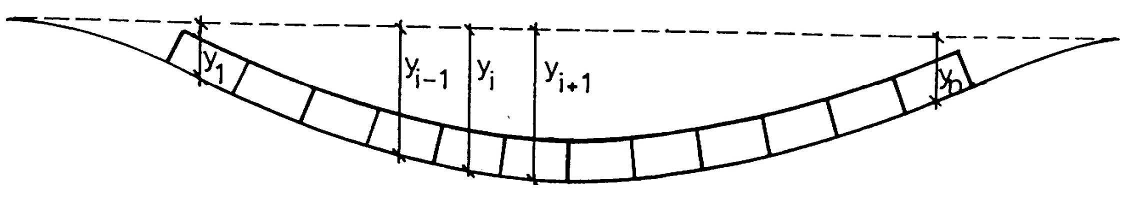
Alaprajzi elrendezés



Terhelések és talpfeszültségek



Tényleges süllyedések



A talajban az egyes mezők középpontjában a különböző mezőkön fellépő talpfeszültségek hatására süllyedések, az ismert terhelések és a talpfeszültségek hatására a gerendatartóban nyomatékok keletkeznek.

támaszponti süllyedéskülönbségekből képzett görbületek		támaszponti nyomatékokból képzett görbületek

$$\frac{-y_{i-1} + 2 \,.\, y_i - y_{i+1}}{a^2} = \frac{M_{i-1} + 4 \,.\, M_i + M_{i+1}}{6.E.I}$$

Az összes szakaszra felírva

$$\mathbf{G}_{\underline{1}} \,.\, \mathbf{y} = \mathbf{G}_{\underline{3}} \,.\, (\mathbf{G}_{\underline{2}} \,.\, \mathbf{p} + \mathbf{M}_a) \qquad (1)$$

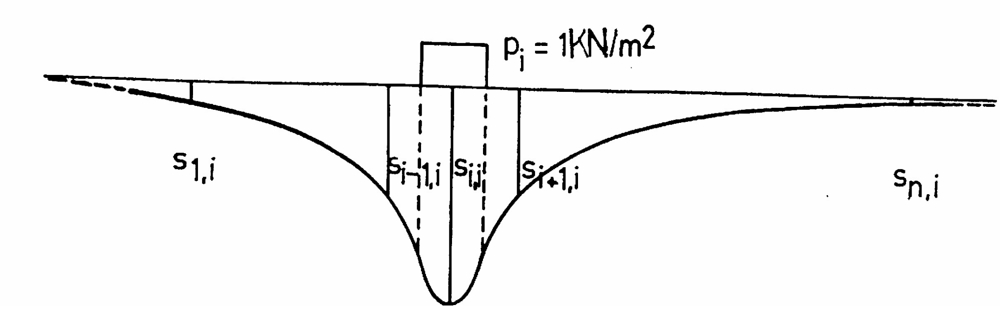
Itt $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$ és $\mathbf{G}_3$ geometriai adatokat tartalmazó mátrixok,
$\mathbf{G}_2 \,.\, \mathbf{p}$ az ismeretlen talpfeszültségek nyomatéka
$\mathbf{M}_a$ az ismert aktív erők nyomatéka.

$$\mathbf{y} = \mathbf{S} \,.\, \mathbf{p} \qquad (2)$$

A süllyedések **S** mátrixának elemeit különböző módszerrel határozz(hatj)uk meg (Bousinesq, Steinbrenner,...).

Az **S** mátrix az egyes mezők "1" terheléséből a különböző mezőközéppontokban fellépő süllyedéseket tartalmazza (süllyedési tölcsér).

Az i-edik ponthoz tartozó süllyedési tölcsér



Az (1) és (2) mátrixegyenletekben két ismeretlen mennyiség, az **y** süllyedések és a **p** talpfeszültségek vektora szerepel.

A (2)-t az (1)-be behelyettesítve az alábbi összefüggésre jutunk:

$$\mathbf{G}_1 \,.\, \mathbf{y} = \mathbf{G}_1 \,.\, \mathbf{S} \,.\, \mathbf{p} = \mathbf{G}_3 \,.\, (\mathbf{G}_2 \,.\, \mathbf{p} + \mathbf{M}_a)$$

$$(\mathbf{G}_1 \,.\, \mathbf{S} - \mathbf{G}_3 \,.\, \mathbf{G}_2) \,.\, \mathbf{p} = \mathbf{G}_3 \,.\, \mathbf{M}_a$$

ebben az egyenletben a **p** talpfeszültségek az ismeretlenek, azaz erőmódszeres megoldásra jutottunk.

A **p** ismeretében a mezőközépi süllyedések és a tartó különböző keresztmetszeteiben a nyíróerő és a nyomaték igénybevételek kiszámíthatók, így a T és az M ábrák meghatározhatók.

Ha a (2) egyenletből kifejezzük a **p** talpfeszültségeket (mivel **S** négyzetes mátrix és van inverze - $\mathbf{S}^{-1}$)

$$\mathbf{y} = \mathbf{S} \,.\, \mathbf{p} \qquad\qquad \mathbf{S}^{-1} \,.\, \mathbf{y} = \mathbf{p}$$

és az (1)-be behelyettesítjük, az alábbi eredményt kapjuk:

$$\mathbf{G}_1 \,.\, \mathbf{y} = \mathbf{G}_3 \,.\, (\mathbf{G}_2 \,.\, \mathbf{S}^{-1} \,.\, \mathbf{y} + \mathbf{M}_a)$$

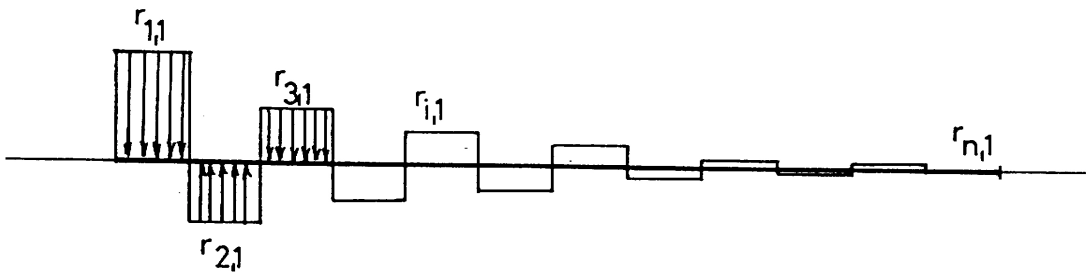
$$(\mathbf{G}_1 - \mathbf{G}_3 \,.\, \mathbf{G}_2 \,.\, \mathbf{S}^{-1}) \,.\, \mathbf{y} = \mathbf{M}_a$$

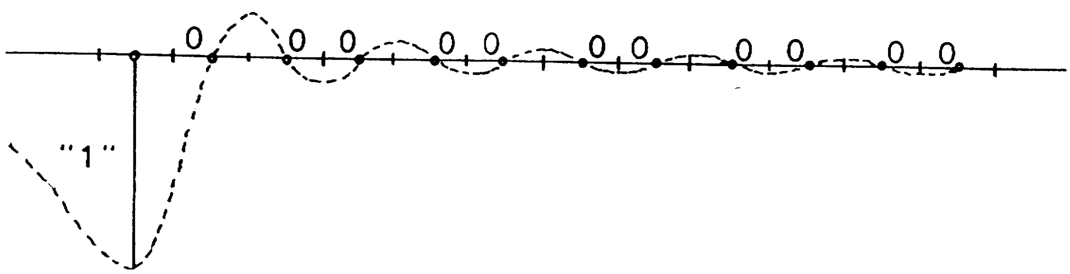
ebben az egyenletrendszerben az **y** süllyedések az ismeretlenek, így tehát elmozdulás-módszeres megoldásra jutottunk.

Az **S** süllyedési mátrix $\mathbf{S}^{-1}$ inverzét szokás **R** reakcióerő mátrixnak is nevezni.

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{R}$$

A reakcióerő mátrix elemei azok az egyes mezőkön fellépő R(i,j) talpfeszültségek, melyek az i-edik mező középpontjában "1", a többi mező középpontjában 0 nagyságú süllyedést okoznak.



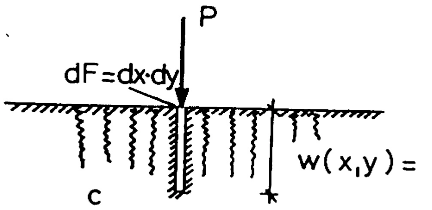


A talaj rugalmas tulajdonságait, elmozdulásokkal - süllyedésekkel - szembeni ellenállását tartalmazó **R** reakcióerő mátrix alkalmas a szerkezetek mozgásmódszerrel történő számításakor a talaj rugalmas tulajdonságainak a figyelembevételére.
Így a talaj egy nagyméretű rugórendszernek tekinthető, amely a szerkezet elemeivel összevonható.

Ha az **R** mátrix diagonálmátrix, akkor a rugalmasan megtámasztott többtámaszú tartó esetéhez jutunk.
Ha **R** nem diagonálmátrix, akkor van távolhatás, egy támaszerő a környezetében is okoz süllyedést.

Az ágyazási tényezős módszer

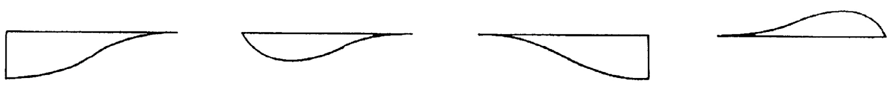
A rugalmas ágyazás ágyazási tényezős, először Winkler által levezetett modellje a talajt egy folytonosan megoszló rugórendszerrel helyettesíti. Ezek a rugók terhelés hatására egymástól függetlenül süllyednek.



$$w(x,y) = \frac{P}{dx \cdot dy} \cdot \frac{1}{c(x,y)} = \frac{P}{dF} \cdot \frac{1}{c(x,y)}$$

Koncentrált erővel terhelt Winkler – típusú talajmodell

Az ágyazás nélküli rúdelem csomóponti (rúdvégi) elmozdulásainak hatására az alábbi rúdvégi igénybevételek keletkeznek:



T(0)	$\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3}$	$\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$	$-\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3}$	$\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$
M(0)		$\frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$	$-\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$	$\frac{2 \cdot E \cdot I}{l}$
T(l)			$\frac{12 \cdot E \cdot I}{l^3}$	$-\frac{6 \cdot E \cdot I}{l^2}$
M(l)	(szimmetrikus)			$\frac{4 \cdot E \cdot I}{l}$

(✱)

(Ágyazat nélküli) hajlított gerenda merevségi mátrixa

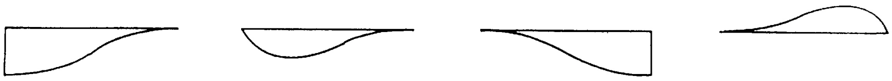
Ezeket az elfordulási és eltolási merevségeket használjuk, amikor mozgásmódszerrel számolunk.

Ha a rúd(elem) folyamatosan fekszik fel a megoszló rugórendszerrel modellezett talajra, ahol az egyes rugók egymástól függetlenül süllyednek, akkor a megoldásfüggvényt az alábbi alakban kapjuk:

$$y(x) = e^{-\beta x}.(A.\sin\beta x+B.\cos\beta x) + e^{\beta x}.(C.\sin\beta x + D.\cos\beta x)$$

A rugók megtámasztó hatása az összenyomódásukkal arányos, azaz az eltolódással szembe mutató és a süllyedés vonalához hasonló "ellenteher" hatását kell számításba venni.

A folytonosan megoszló rugórendszerre - ahol az egyes rugók a többitől függetlenül süllyednek, távolhatás tehát nincs - támaszkodó rúdelem csomóponti (rúdvégi) elmozdulásainak hatására az alábbi igénybevételek keletkeznek:

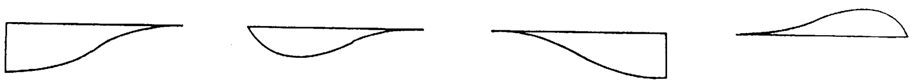


$\frac{EI}{(sh^2 - si^2)} \cdot$				
T(O)	$\frac{4\cdot(\beta l)^3\cdot(ch\cdot sh + co\cdot si)}{l^3}$	$\frac{2\cdot(\beta l)^2\cdot(sh^2 + si^2)}{l^2}$	$-\frac{4\cdot(\beta l)^3\cdot(ch\cdot si + sh\cdot co)}{l^3}$	$\frac{4\cdot(\beta l)^2\cdot sh\cdot si}{l^2}$
M(O)		$\frac{2\cdot(\beta l)\cdot(ch\cdot sh - co\cdot si)}{l}$	$-\frac{4\cdot(\beta l)^2\cdot sh\cdot si}{l^2}$	$\frac{2\cdot(\beta l)\cdot(ch\cdot si - sh\cdot co)}{l}$
T(l)			$\frac{4\cdot(\beta l)^3\cdot(ch\cdot sh + co\cdot si)}{l^3}$	$-\frac{2\cdot(\beta l)^2\cdot(sh^2 + si^2)}{l^2}$
M(l)	(szimmetrikus)			$\frac{2\cdot(\beta l)\cdot(ch\cdot sh - co\cdot si)}{l}$

$si = \sin\beta l \quad sh = \sinh\beta l$
$co = \cos\beta l \quad ch = \cosh\beta l$

Rugalmas ágyazatra helyezett hajlított gerenda merevségi mátrixa.

Az összefüggésekben szereplő sin, cos, sinh és cosh függvényeket Taylor-sorba (végtelen hatványsorba) fejtve a Winkler féle ágyazaton fekvő rúdelem merevségi mátrixa végtelen mátrixsorrá alakul. Ennek 1. eleme az előbbi (*) mátrix, második eleme pedig



$\frac{c\cdot l\cdot b}{420} \cdot$				
T(O)	156	$22\cdot l$	54	$-13\cdot l$
M(O)		$4\cdot l^2$	$13\cdot l$	$-3\cdot l^2$
T(l)			156	$-22\cdot l$
M(l)	(szimmetrikus)			$4\cdot l^2$

Ágyazási mátrix

azaz az ágyazatlan rúd elmozdulásokkal szembeni ellenállásához (merevségéhez) az ágyazat merevsége hozzáadandó.

Próbaszámítások eredménye alapján általában elegendőnek tűnik a végtelen mátrixsor fenti két (1. és 2.) tagjának a számításba vétele.

Kapcsolódó irodalom

Dr. Nagy Tamás:
Az altalaj mint rugalmas féltér hatásának figyelembe vétele többszintes épületek statikai számításánál
Magyar Építőipar, 1974. 12. Budapest

Maros József:
Rugalmasan ágyazott gerenda Ohde – Steinbrenner módszerrel
PÉCSITERV, TPA Számítóközpont, 1975

Dr. Meskó András:
Talajra helyezett szerkezetek számítása
Segédanyag a Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskolai Kar Építőmérnöki Szak Szerkezetépítő szakirányon a Szerkezettervezés I. tantárgyhoz, 1995 – 2002