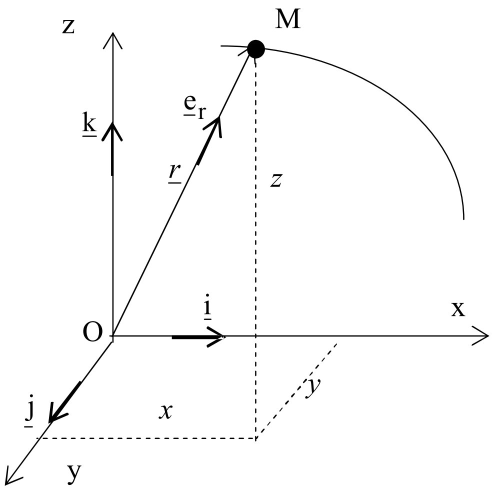
Anyagi pont kinematikája

Mozgás derékszögű koordinátarendszerben

A mechanikai mozgás valamely test térbeni helyzetének egy másik testhez viszonyított időbeli megváltozása. A pont mozgásának alapvető jellemzői valamely viszonyítási rendszerben: a **helyzet**, a **sebesség** és a **gyorsulás**.

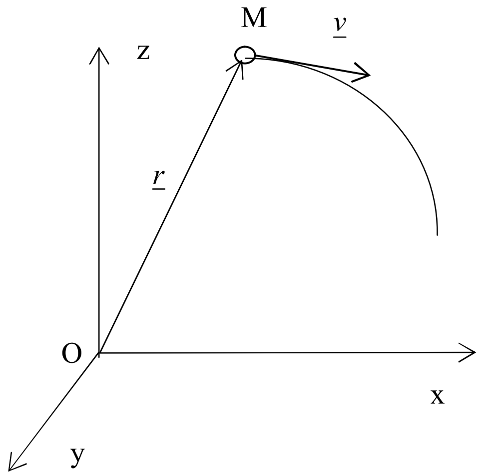


A térbeli mozgást végző M jelű pont **helyzet**e valamely test 0 pontjához képest az 0 ponthoz kapcsolt (az ábrán látható) derékszögű - az építőmérnöki mechanika oktatás hagyományainak megfelelő balsodrású - koordináta-rendszerben az adott *t* időponthoz tartozó $\underline{r}(t)$ helyzetvektorral adható meg:

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{\mathrm{i}} + y(t)\underline{\mathrm{j}} + z(t)\underline{\mathrm{k}} \ .$$

A helyzetvektor kifejezhető még a pontnak az origótól való r távolságával és az $\underline{r}$ irányú $\underline{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}}$ egységvektorral is:

$$\underline{r} = r\underline{\mathrm{e}}_{\mathrm{r}} \ , \qquad \text{ahol} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ .$$



A sebességvektor egy adott időpontban a helyzetvektor idő szerinti első differenciálhányadosa.

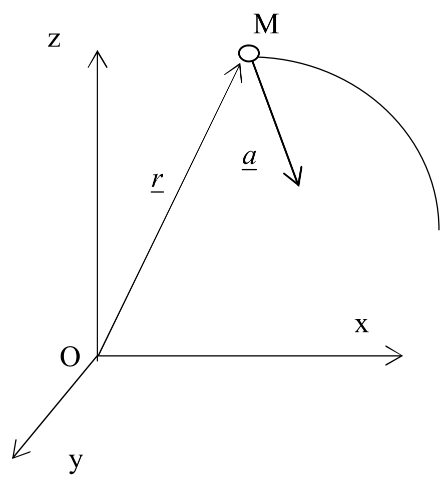
$$\underline{v}(t) = \dot{x}(t)\underline{\mathrm{i}} + \dot{y}(t)\underline{\mathrm{j}} + \dot{z}(t)\underline{\mathrm{k}} \ , \quad \underline{v}(t) = v_{\mathrm{x}}(t)\underline{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{y}}(t)\underline{\mathrm{j}} + v_{\mathrm{z}}(t)\underline{\mathrm{k}} \ .$$

A sebességvektor koordinátatengelyeknek megfelelő összetevői ismeretében a sebesség nagysága:

$$v = |\underline{v}| = \sqrt{v_{\mathrm{x}}^2 + v_{\mathrm{y}}^2 + v_{\mathrm{z}}^2} \ .$$

A sebesség mértékegysége: [m/s]. Aa $\underline{e}_{\mathrm{t}}$ érintőirányú egységvektor segítségével a sebességvektor felírható

$\underline{v} = v\underline{\mathrm{e}}_{\mathrm{t}}$ alakban is.



A gyorsulásvektor valamely *t* időpontbeli értéke a sebességvektor idő szerinti első differenciálhányadosa, illetve a helyzetvektor idő szerinti második differenciálhányadosa.

$$\underline{a}(t) = \ddot{x}(t)\underline{\mathrm{i}} + \ddot{y}(t)\underline{\mathrm{j}} + \ddot{z}(t)\underline{\mathrm{k}} \ , \quad \underline{a}(t) = a_{\mathrm{x}}(t)\underline{\mathrm{i}} + a_{\mathrm{y}}(t)\underline{\mathrm{j}} + a_{\mathrm{z}}(t)\underline{\mathrm{k}} \ .$$

A gyorsulás nagysága: $a = |\underline{a}| = \sqrt{a_{\mathrm{x}}^2 + a_{\mathrm{y}}^2 + a_{\mathrm{z}}^2} \ .$

A gyorsulásvektor a pálya M pontbeli érintősíkjába kerül és annak homorú oldala felé mutat. A gyorsulás mértékegysége: [m/s^2].

Anyagi pont egyenes vonalú mozgása

Az egyenes vonalú mozgás az általános térbeli mozgásnak egy speciális esete, amelynek vizsgálatát nagyon leegyszerűsíti, ha a koordináta-rendszert úgy választjuk, hogy az x tengely a pont pályájául szolgáló egyenessel egybe essen. Ebben az esetben tudjuk, hogy a helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor is az adott egyenes irányába esik, így elegendő ezek előjeles nagyságát meghatározni.

Ez esetben: $v(t) = \dot{x}(t)$ és $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$.

Gyakran előfordul, hogy az egyenes vonalú mozgást végző anyagi pont $a(t)$ gyorsulása az ismert, és a sebességet valamint a pont helyzetét leíró függvényeket keressük. Ezek integrálással határozhatók meg a $(t_0, x_0), (t_0, v_0)$ kezdeti feltételek figyelembevételével.

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\mathrm{d}t$$

Hasonló a helyzet az $x(t)$ függvény meghatározásánál. Ez esetben a $v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ összefüggésből indulhatunk ki, és eredményül azt kapjuk, hogy

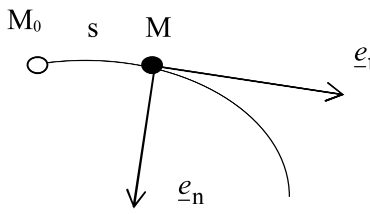
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t \ .$$

A mérnöki számításoknál gyakran előforduló eset, amikor az $a(t) = a = \text{konstans}.$ Ez esetben az ún. **egyenletesen változó mozgás**nál:

$$v(t) = v_0 + at\,, \qquad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2} \ .$$

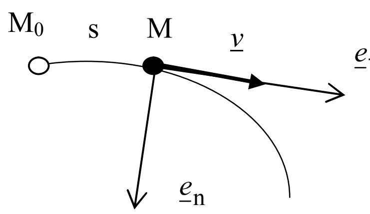
Anyagi pont ismert pályán való síkmozgása

Az anyagi pont mozgásának vizsgálatakor gyakran találkozunk olyan esettel, amikor a mozgás pályája ismert. A továbbiakban az ilyen mozgás kinematikai jellemzőit fogjuk meghatározni, **síkmozgás** esetére.



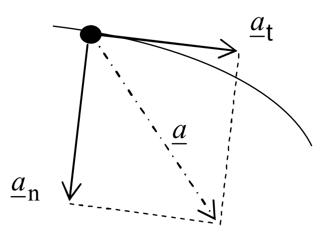
A mozgó pont valamely időpontbeli helyzetét az adott pályáján a kezdőponttól számított s úttal adjuk meg. A pálya M pontjában az érintő irányú egységvektort $\underline{e}_\mathrm{t}(s)$-sel, az erre merőleges és a görbületi középpont felé mutató egységvektort pedig $\underline{e}_\mathrm{n}(s)$-sel jelöljük. A görbületi sugár jele pedig r .

A mozgás sebessége: $\underline{v} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\underline{e}_\mathrm{t} = v\underline{e}_\mathrm{t}$.



A mozgás gyorsulását a szorzatként felírt sebességvektor időszerinti deriválásával nyerjük:

$$\underline{a} = \frac{\mathrm{d}\underline{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{v}\underline{e}_\mathrm{t} + v\underline{\dot{e}}_\mathrm{t} \ .$$



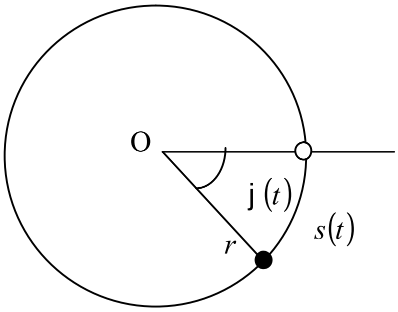
Az első tag egy **érintőirányú** vektort képvisel, míg a második tag **normálisirányú** lesz. Vagyis

$$\underline{a} = \underline{a}_\mathrm{t} + \underline{a}_\mathrm{n} \ .$$

Az érintőirányú összetevő: $\underline{a}_\mathrm{t} = \dot{v}\underline{e}_\mathrm{t} = a_\mathrm{t}\,\underline{e}_\mathrm{t}$

A normálisirányú összetevő: $\underline{a}_\mathrm{n} = \frac{v^2}{\mathrm{r}}\underline{e}_\mathrm{n} = a_\mathrm{n}\,\underline{e}_\mathrm{n}$.

Körpályán való mozgás



A kinematika mérnöki alkalmazásai során gyakran előforduló feladat a körpályán való mozgás elemzése. Ennek oka, hogy a közlekedési pályák (utak, vasutak) vonalvezetése a különböző egyenes szakaszok között összekötő íveket is tartalmaz.

A pálya geometriáját az r sugár meghatározza. A pályán a kezdőpontot a kör középpontjával összekötve kapunk egy viszonyítási vonalat. Ezt követően a pont helyzetét a ponthoz tartozó sugár és ezen viszonyítási egyenes által bezárt **elfordulás**i **szög**gel tudjuk megadni

$$s(t) = r\varphi(t).$$

A φ elfordulási szög mértékegysége: [rad].

Az érintőirányú sebesség nagysága: $v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r\varphi(t))}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = r\omega(t)$.

A sebesség kifejezésében szereplő $\omega(t)$ az ún. szögsebesség, amelynek mértékegysége: [rad/s]. A pont sebessége tehát a szögsebesség és a sugár szorzataként kapható.

A pont gyorsulásvektorának két összetevője van. Az érintő irányú gyorsulás nagysága az $\underline{a}_\mathrm{t} = \dot{v}\underline{e}_\mathrm{t}$ összefüggésből adódik:
$$a_\mathrm{t} = \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}(r\omega(t))}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t} = r\kappa(t).$$

A kifejezésében szereplő $\kappa(t)$ az ún. szöggyorsulás, amelynek mértékegysége: [rad/s^2]. A pont érintőirányú gyorsulása tehát a szöggyorsulás és a sugár szorzataként kapható.

A gyorsulásvektor normálisirányú összetevője most sugárirányú lesz és a kör középpontja felé mutat. Az összetevő nagysága:
$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2(t)}{r} = \frac{(r\omega(t))^2}{r} = r\omega^2(t) .$$

A pont gyorsulásvektorának nagysága pedig: $|\underline{a}(t)| = \sqrt{a_\mathrm{t}^2 + a_\mathrm{n}^2} = r\sqrt{\kappa^2(t) + \omega^4(t)}$.

Egyenletes körmozgás esetén a pont a körpályán $v(t) = v = \text{konstans}$ sebességgel mozog. Ez esetben a szögsebesség $\omega(t) = \frac{v}{r}$ szintén állandó lesz, amiből következik, hogy deriváltja - ami a $\kappa(t)$ szöggyorsulás - zérus lesz. A pontnak nem lesz érintőirányú gyorsulása, mivel a szöggyorsulás és a sugár szorzata zérus. Mindez azonban nem jelenti azt, hogy a pontnak egyáltalán nincs gyorsulása, hiszen a sugár irányú gyorsulás az $a_\mathrm{n}(t) = \frac{v^2}{r}$ összefüggésből számítható lesz.

Egyenletes körmozgás esetén a keringési idő: $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Az egységnyi idő alatt megtett fordulatok számát fordulatszámnak nevezzük. Ezt másodperc és perc időtartamra szoktuk értelmezni:
$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ [s^{-1}], illetve $N = \frac{30\omega}{\pi}$ [perc^{-1}].

A témakör a tankönyvben a 9-26 oldalon szerepel.