A Newton törvénye és alkalmazásai egyenes vonalú pályán való mozgásnál

A kinetika az anyagi pont vagy merev test mozgásállapota megváltozásának okait kutatja, és az anyagi testek mozgásait a rájuk ható erőkkel összefüggésben tárgyalja. A kinematikai alapfogalmak tárgyalása során szerepelt a hosszúság és az idő fogalma. A kinetikában újabb alapfogalommal találkozunk: a tömeggel. A tömeg mértékegysége a kilogramm [kg].

Az anyagi pont kinetikai törvényszerűségeinek meghatározására szolgáló elmélet Newton második axiómáján alapszik mely szerint: **Az anyagi pont mozgásának változása a mozgatóerő hatásával arányos, és ugyanannak az egyenes vonalnak az irányába esik, mint amelyben az erő működik.**

A dinamika alaptörvényét $\underline{F} = \frac{\mathrm{d}(m\underline{v})}{\mathrm{d}t}$ formában Euler adta meg. A szilárd testek mechanikájában a tömeg általában nem függ az időtől, így: $\underline{F} = m\underline{a}$.

Newton arra is utal, hogy több erő esetén az anyagi pont úgy mozog, mintha az erők egymástól függetlenül - helyesebben mondva - egymás után működnének. Az anyagi pont elmozdulása úgy tekinthető, hogy az valamely $\underline{F}_1$ erő hatására Δt idő alatt bekövetkező $\Delta\underline{r}_1$ és valamely $\underline{F}_1$ erő hatására bekövetkező $\Delta\underline{r}_2$ eltolódásvektor $\Delta\underline{r}$ eredő eltolódása: $\Delta\underline{r} = \Delta\underline{r}_1 + \Delta\underline{r}_2$.

Az egyenletet Δt -vel elosztva és képezve a $\frac{\Delta\underline{r}}{\Delta t}$ határértékét: $\frac{\mathrm{d}\underline{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\underline{r}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\underline{r}_2}{\mathrm{d}t}$.

A kapott egyenletet idő szerint még egyszer deriválva: $\frac{\mathrm{d}^2\underline{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\underline{r}_1}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}^2\underline{r}_2}{\mathrm{d}t^2}$, vagy $\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2$.

Általánosítva: $\underline{a} = \sum \underline{a}_\mathrm{i}$. Mivel $\underline{a}_\mathrm{i} = \frac{\underline{F}_i}{m}$, így $\underline{a} = \sum \underline{a}_\mathrm{i} = \sum \frac{\underline{F}_i}{m} = \frac{1}{m}\sum \underline{F}_i$.

Miután $\sum \underline{F}_i$ az anyagi pontra ható erők eredőjét jelenti, Newton törvénye több erő működése esetén a következő lesz: $\underline{R} = m\underline{a}$.
A derékszögű koordináta-rendszerben:

$$R_\mathrm{x} = ma_\mathrm{x} \ ,$$
$$R_\mathrm{y} = ma_\mathrm{y} \ ,$$
$$R_\mathrm{z} = ma_\mathrm{z} \ .$$

A haladó mozgást végző m tömegű merev testre vonatkozó egyenlet ugyanaz, mint az olyan m tömegű anyagi pontra vonatkozó egyenlet, amelyre a testre ható erők vetületösszegének megfelelő $\underline{R}$ erő hat.

D'Alembert elve

A Newton törvényét kifejező $\underline{R} = m\underline{a}$ egyenletet d'Alembert egyensúlyi egyenlet alakjában írta fel:

$$\underline{R} - (m\underline{a}) = 0 \ .$$

Ez az átrendezés nem egyszerű algebrai átrendezés, sokkal mélyebb értelme van. Az $m\underline{a}$ mennyiség a mozgásjellemzőket tartalmazó oldalról az erő oldalra került át, tehát megváltozott a jellege. Így a $-m\underline{a}$ mennyiséget erőnek kel1 tekintenünk, és ezt a képzelt erőt d'Alembert **tehetetlenségi erő**nek nevezte.

D'Alembert elve értelmében a mozgó testre ható erők a tehetetlenségi erővel együtt egyensúlyban vannak. Ezt az egyensúlyi állapotot a statikai egyensúlytól megkülönböztetve **kinetikai egyensúly**nak nevezzük. Ennek megfelelően formálisan egyensúlyi egyenletek felírása lehetséges, tehát:

$$R_x - ma_x = 0,$$
$$R_y - ma_y = 0,$$
$$R_z - ma_z = 0.$$

A dinamika két alapfeladata

A dinamikai vizsgálatokkal kapcsolatos feladatok általában két nagy csoportba sorolhatók. Az első csoportba tartoznak azok a feladatok, amelyeknél az ismert mozgáshoz tartozó erőt keressük, míg a másodikba az ismert erők hatására létrejövő mozgás jellemzőinek meghatározása szerepel.

a.) **Ismert mozgás létrehozásához szükséges erő meghatározása**

A feladat megoldása viszonylag egyszerű, ugyanis ebben az esetben ismert valamelyik kinematikai jellemző. Így például egy anyagi pontnál $\underline{r}(t)$, illetve derékszögű koordinátarendszerben történő vizsgálatnál $x(t), y(t), z(t)$, míg adott pályán történő mozgásnál $s(t)$ ismeretében a teljes kinematikai információ rendelkezésre áll, mivel a sebesség és gyorsulás a meglévő adatokból számolható.

Ezt követően pedig a mozgás létrehozásához szükséges erők a - gyorsulásösszetevők számítása után - meghatározhatók lesznek.

Ilyen feladatoknál igen előnyös a d'Alembert elvének megfelelő $\underline{R} - (m\underline{a}) = 0$ - az úgynevezett kinetikai egyensúlyi állapotot kifejező - egyenlet (egyenletek) felírása, mert így a statikából jól ismert megoldások kinetikai feladatok megoldására is alkalmazhatók.

b.) **Adott erők hatására létrejövő mozgás meghatározása**

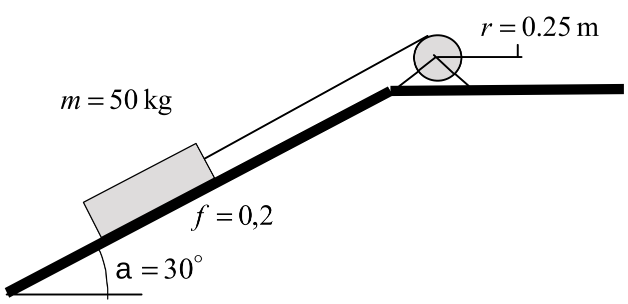
A mérnöki feladatoknál gyakori eset, hogy az anyagi pontra ható erők az idő, hely és sebesség függvényeként adottak, és az ezen erők hatására létrejövő mozgást keressük előírt kezdeti feltételek mellett. Ez a feladat az előzőhöz viszonyítva bonyolultabb, mert differenciálegyenlet, vagy differenciál-egyenletrendszer megoldását vonja magával. Erre a rezgésszámításnál mutatunk példákat

A dinamikai feladatok közül ugyanakkor az a gyakoribb eset, amikor az erő csak az idő függvénye, ezen belül is az, amikor az erő állandó nagyságú.

Mintafeladatok

a.) Ismert mozgás létrehozásához szükséges erő meghatározása

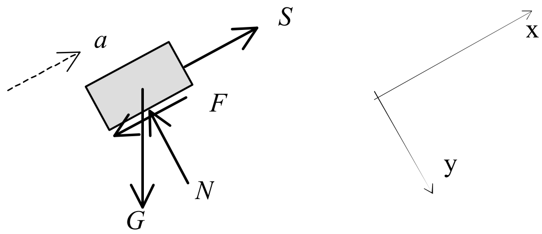
1. példa



Az 2.2. ábrán lévő m tömegű testet az α hajlásszögű lejtőn csörlővel húzzuk fel. Az r sugarú dob $j = 2t^2$ függvény szerint forog.

Határozzuk meg a kötélben ébredő erőt, ha a test és a lejtő közötti súrlódási tényező $f = 0,2$!

Megoldás:



A dob szöggyorsulása: $k = \dot{j} = 2 \cdot 2 = 4\ \mathrm{rad/s^2}$.

Az érintőirányú gyorsuláskomponens a dob kerületi pontjánál és a dobon felfekvő kötélnél:

$$a = rk = 0{,}25 \cdot 4 = 1\ \mathrm{m/s^2}\ .$$

Az elválási ponttól a testig ez lesz az adott kötélszakasz és a végén lévő test lejtő irányú gyorsulásának értéke is.

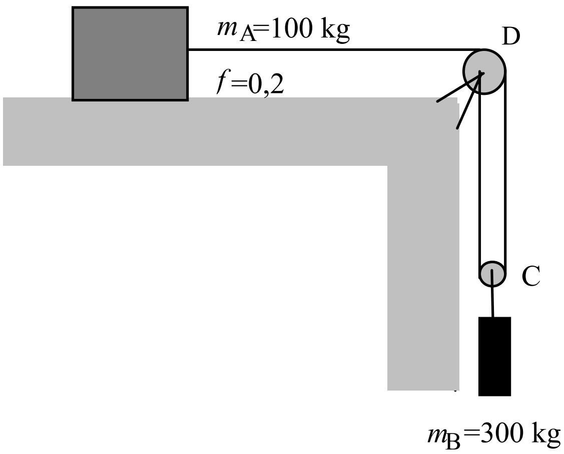
Az x tengely irányában $a = rk = 0{,}25 \cdot 4 = 1\ \mathrm{m/s^2}$ gyorsulás van:

$$\sum F_{ix} = ma\ , \qquad -G \sin 30^\circ - F + S = ma\ .$$

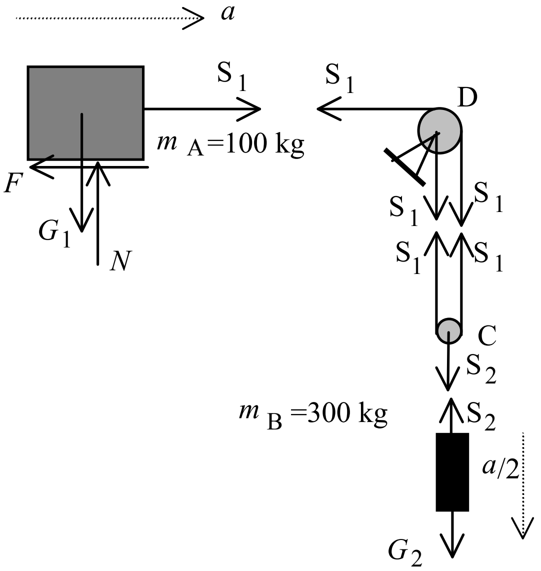
$$S = 50 \cdot 1 + 84{,}85 + 50 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}5 = \underline{380{,}2\ \mathrm{N}}\ .$$

b.) Ismert erők hatására létrejövő mozgás meghatározása

2. példa



Az ábrán látható mechanikai rendszerben a csigáknál nincs kötélsúrlódás és a C jelű csiga tömege elhanyagolható. A rendszer nincs egyensúlyban, mozgásnak indul. Határozzuk meg az egyes testek gyorsulását és a kötelekben ébredő erőket!



Megoldás:

Az A jelű test vizsgálata:

$$G_1 = N = 9{,}81 \cdot 100 = 981\ \mathrm{N}\ , \quad F = 0{,}2 \cdot N = 196{,}2\ \mathrm{N}\ .$$

$$S_1 - F = ma\ , \qquad S_1 - 196{,}2 = 100a\ .$$

A D jelű test vizsgálata: Mivel nincs kötélsúrlódás, a függőleges kötélágban is S_1 erő van.

A C jelű test vizsgálata: Mivel nincs kötélsúrlódás, a másik felfelé menő kötélágban is S_1 erő van. A test tömege elhanyagolható, így $S_2 = 2S_1$.

A csiga gyorsulása fele az A jelű test gyorsulásának, hiszen a behajlított kötél középső pontjának mozgása fele akkora, mint a jobboldali kötélág felső pontjának az elmozdulása.

A B jelű test vizsgálata:

$$G_2 = 9{,}81 \cdot 300 = 2943\ \mathrm{N}\ ,$$

$$-S_2 + G_2 = m\frac{a}{2}\ , \quad -2S_1 + 2943 = 150a\ .$$

A fenti egyenletrendszerből a gyorsulás megkapható: $a = \underline{7{,}287\ \mathrm{m/s^2}}$.

Ezek után: $S_1 = \underline{924{,}9\ \mathrm{N}}\ ,$ $\qquad S_2 = \underline{1850\ \mathrm{N}}\ .$

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 39-43. oldalon. További példa: 2.6.