A Newton törvénye és alkalmazásai íves pályán való mozgásnál

Adott pályán való mozgásnál:

$$\underline{R}_{\mathrm{t}} = m\underline{a}_{\mathrm{t}} \ ,$$
$$\underline{R}_{\mathrm{n}} = m\underline{a}_{\mathrm{n}} \ .$$

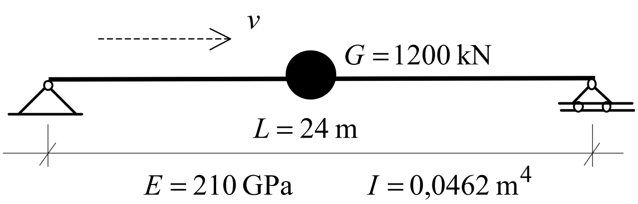
D'Alembert elve:

$$\underline{R}_{\mathrm{t}} - m\underline{a}_{\mathrm{t}} = 0 \, ,$$
$$\underline{R}_{\mathrm{n}} - m\underline{a}_{\mathrm{n}} = 0 \, .$$

Mintafeladatok

a.) Ismert mozgás létrehozásához szükséges erő meghatározása

1. példa



Az ábrán látható, elhanyagolható tömegű, L fesztávolságú kéttámaszú hídon G súlyú mozdony halad át v sebességgel. A szerkezet hajlító merevsége EI.. Határozzuk meg a - híd lengésétől eltekintve - a lehajlásból keletkező túlterheléshez tartozó dinamikus tényezőt a sebesség függvényében! Mekkora lesz a dinamikus tényező, ha a sebesség 20, 60, illetve 120 km/h?

Megoldás:

A lehajlás következtében a híd meggörbül. A legnagyobb görbület akkor keletkezik, amikor a nyomaték a legnagyobb, vagyis amikor a mozdony a tartó közepén van. A görbületi sugár: $\dfrac{1}{\mathrm{r}} = \dfrac{M}{EI} = \dfrac{GL}{4EI}$.

A tehetetlenségi erő a normál irányú gyorsulással ellentétes irányba - azaz a domború oldal felé, a mi esetünkben lefelé - mutat: $C = \dfrac{mv^2}{\mathrm{r}} = \dfrac{G}{g} v^2 \dfrac{GL}{4EI}$.

A teljes dinamikus terhelés a mozdony súlyának és a tehetetlenségi erőnek az összege lesz:

$$R = G + C = G + \frac{G}{g} v^2 \frac{GL}{4EI} \, .$$

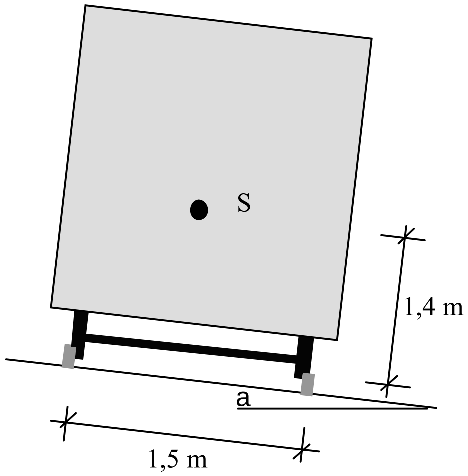
A dinamikus tényező a dinamikus teherérték és a statikus teherérték hányadosa: $\mathrm{n} = \dfrac{R}{G} = 1 + \dfrac{1}{g} v^2 \dfrac{GL}{4EI}$.

A feladathoz tartozó adatokat behelyettesítve: $\mathrm{n} = 1 + \dfrac{1}{9{,}81} v^2 \dfrac{1200 \cdot 10^3 \cdot 24}{4 \cdot 210 \cdot 10^9 \cdot 0{,}0462} = 1 + 0{,}0000756 v^2$.

Ha $v = 20$ km/h $\qquad \mathrm{n} = 1 + 0{,}0000756 \left(\dfrac{20}{3{,}6} \right)^2 = \underline{1{,}002 v}$.

Ha $v = 60$ km/h $\qquad \mathrm{n} = 1 + 0{,}0000756 \left(\dfrac{60}{3{,}6} \right)^2 = \underline{1{,}021}$.

Ha $v = 120$ km/h $\qquad \mathrm{n} = 1 + 0{,}0000756 \left(\dfrac{120}{3{,}6} \right)^2 = \underline{1{,}084}$.

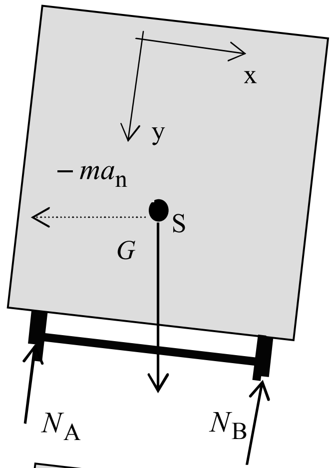


Az ábrán lévő G=500 kN súlyú vasúti kocsi r=600 m sugarú ívben 80 km/h sebességgel halad.

Milyen α hajlásszögű túlemelésre van szükség, hogy a síneken ne ébredjen oldalerő?

Határozzuk meg a kapott túlemelés esetén a sínekre ható erőket, ha a vonat az adott 80 km/h, majd 120 km/h sebességgel halad, és amikor áll!

Megoldás:



v = 80 km/h $= \dfrac{80}{3{,}6} = 22{,}22\ \mathrm{m/s}, \qquad a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(22{,}22)^2}{600} = 0{,}823\mathrm{m/s}^2.$

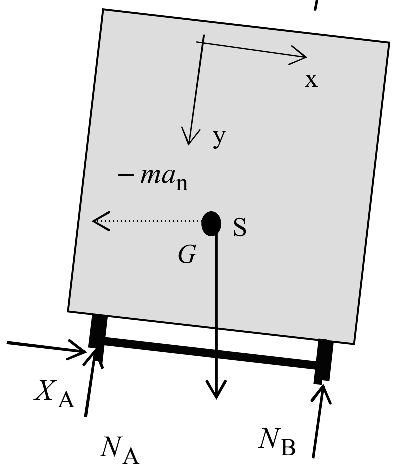
$$\sum F_x = 0, \qquad -\mathrm{ma_n}\cos\alpha + G\sin\alpha = 0,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{ma_n}{G} = \frac{ma_n}{mg} = \frac{a_n}{g} = \frac{0{,}823}{9{,}81} = 0{,}0839, \qquad \alpha = \underline{4{,}80^\circ}.$$

$$\sum F_y = 0, \qquad \mathrm{ma_n}\sin\alpha + G\cos\alpha - N_A - N_B = 0.$$

Mivel a tehetetlenségi erő és a G erő x irányú vetületösszege zérus, eredőjük y irányú lesz. Ezért

$$N_A = N_B = \frac{ma_n\sin\alpha + G\cos\alpha}{2} = G\frac{\mathrm{tg}\alpha\sin\alpha + \cos\alpha}{2} = \underline{250{,}88\ \mathrm{kN}}.$$



v=120km/h $= \dfrac{120}{3{,}6} = 33{,}33\ \mathrm{m/s}, \quad a_n = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(33{,}33)^2}{600} = 1{,}852\mathrm{m/s}^2.$

$$\sum F_x = 0, \qquad -\mathrm{ma_n}\cos\alpha + G\sin\alpha + X_A = 0,$$

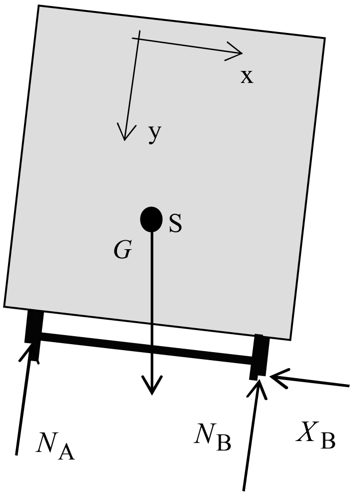
$$X_A = \frac{500}{9{,}81}1{,}852\cdot 0{,}9965 - 500\cdot 0{,}0837 = \underline{52{,}21\ \mathrm{kN}}.$$

$$\sum F_y = 0, \qquad \mathrm{ma_n}\sin\alpha + G\cos\alpha - N_A - N_B = 0.$$

$$N_A = \frac{500}{9{,}81}\cdot 0{,}0837 + 500\cdot 0{,}9965 - N_B = 502{,}5 - N_B,$$

$$\sum M_S = 0, \qquad N_A\cdot 0{,}75 - N_B\cdot 0{,}75 - X_A\cdot 1{,}4 = 0.$$

Ebből $\qquad N_A = \underline{300{,}0\ \mathrm{kN}}, \qquad N_B = \underline{202{,}5\ \mathrm{kN}}.$



v=0 km/h.

$$\sum F_x = 0, \qquad G\sin\alpha - X_B = 0,$$

$$X_B = 500\cdot 0{,}0837 = \underline{41{,}85\ \mathrm{kN}}.$$

$$\sum F_y = 0, \qquad G\cos\alpha - N_A - N_B = 0.$$

$$N_A = 500\cdot 0{,}9965 - N_B = 498{,}3 - N_B,$$

$$\sum M_S = 0, \qquad N_A\cdot 0{,}75 - N_B\cdot 0{,}75 + X_B\cdot 1{,}4 = 0.$$

Ebből $\qquad N_A = \underline{210{,}1\ \mathrm{kN}}, \qquad N_B = \underline{288{,}2\ \mathrm{kN}}.$

b.) Ismert erők hatására létrejövő mozgás meghatározása

A vízszintes terepen lévő autóúton a jármű 350 m sugarú ívben halad. A jármű és az út felület közötti súrlódási tényező az időjárási viszonyoktól függően 0,1 és 0,3 között változik.

Határozzuk meg a megengedhető sebességet (amelynél nincs kicsúszás) a fenti súrlódási tényezők, valamint $f = 0{,}2$ esetére!

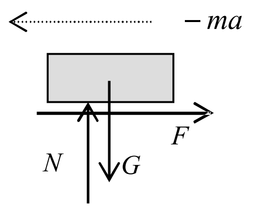
Milyen α hajlású túlemeléssel lehetne biztosítani a 110 km/h sebességet $f = 0{,}1$ esetén is?

Megoldás:

A megengedett sebességek számításánál az adott erőből számítjuk a mozgásjellemzőt, míg a túlemelés meghatározásánál adott mozgásjellemzőnél biztosítjuk a kinetikai egyensúlyt.

a.) A megengedett sebességek számítása.

Az ívben haladó járműre ható erők:



A függőleges vetületi egyenletből: $N = G = mg$,

a súrlódási erő: $F = fN = fmg$.

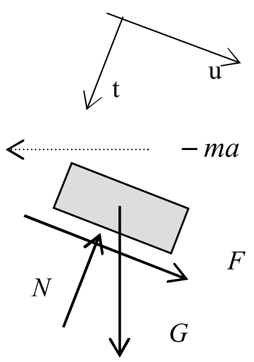
A gyorsulás: $a = \dfrac{v^2}{r}$.

A kinetikai egyensúly: $fmg - m\dfrac{v^2}{r} = 0$.

A megengedhető sebesség: $v = \sqrt{grf} = \sqrt{9{,}81 \cdot 350 \cdot f} = 5{,}90\sqrt{f}$.

$f = 0{,}1 \rightarrow v_1 = \underline{67{,}1\ \text{km/h}}$, $f = 0{,}2 \rightarrow v_1 = \underline{94{,}8\ \text{km/h}}$, $f = 0{,}3 \rightarrow v_1 = \underline{116{,}1\ \text{km/h}}$.

b.) A túlemelés számítása.



Az u irányú vetületi egyenletből: $Nf + G\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0$,

A t irányú vetületi egyenletből: $N - G\cos\alpha - ma\sin\alpha = 0$.

A második egyenletből kifejezve N-t és behelyettesítve az első egyenletbe:

$$f\left(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha\right) + mg\sin\alpha - ma\cos\alpha = 0 .$$

Ebből $tg\alpha = \dfrac{a - fg}{fa + g}$.

A gyorsulás: $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{30{,}55^2}{350} = 2{,}668\ \text{m/s}^2$.

A túlemelés hajlásszöge: $\alpha = \arctan\dfrac{2{,}668 - 0{,}1\cdot 9{,}81}{0{,}1\cdot 2{,}668 + 9{,}81} = \underline{9{,}50^\circ}$.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 39-43. oldalon. További példa: 2.5