A Newton törvényéből levezethető tételek, vontatási feladatok

A mozgásmennyiség változásának tétele

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{F}(t)\mathrm{d}t = m(\underline{v}_2 - \underline{v}_1) \ .$$

A mozgásmennyiség változásának tétele szavakban elmondva azt fejezi ki, hogy **a tömegre ható erő adott időtartam szerinti integrálja egyenlő a mozgásmennyiség adott időtartam alatti megváltozásával**.

A baloldalon lévő kifejezés az **erő impulzusa**, ezért a tételt **impulzustétel**nek is szokás nevezni. Az impulzus mértékegysége: [Ns]. A fenti kifejezés vektorokra vonatkozik, így a derékszögű koordinátarendszerben megadott mozgás esetén három skalár egyenletként írható fel.

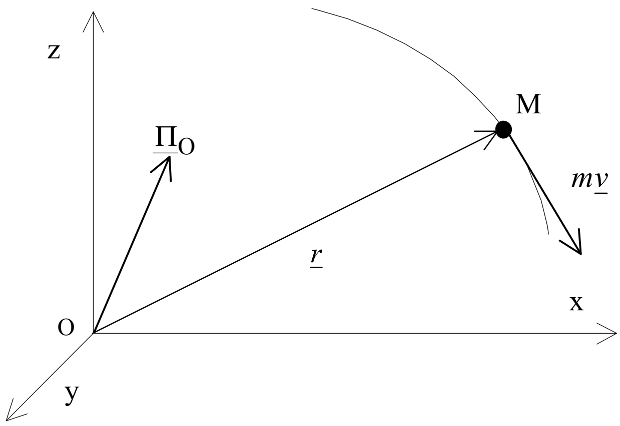
A tétel előnyösen alkalmazható olyan esetben, amikor egy anyagi pontnak adott időpontbeli sebességét vagy két pont közti sebességváltozás időtartamát akarjuk meghatározni, és ismerjük az erőt, mint az idő függvényét.

Ha a vizsgált mechanikai rendszer több anyagi pontot tartalmaz, akkor a tétel minden pontra külön felírandó. A kapcsolt rendszert vizsgálhatjuk együtt is, de ekkor csak a külső erők impulzusát kell belevonni a számításokba. Ha a rendszerre külső erő nem hat, az egyes pontok mozgásmennyisége változásának összege zérus kell, hogy legyen. Vagyis **ha egy anyagi pontrendszerre külső erő nem hat, a rendszer mozgásmennyisége nem változik.** Ezt a megállapítást nevezzük **a mozgásmennyiség megmaradása** tételének.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben az 50. oldalon. Példák: 2.8, 2.9, 2.10, 2.11.

Az anyagi pont perdülete, a perdület változásának tétele

Valamely m tömegű anyagi pont mozgásmennyiségének a fix (álló) pontra vonatkozó nyomatékát, vagy másképpen, az adott 0 jelű ponttól az anyagi pontig tartó helyzetvektornak és az anyagi pont mozgásmennyiségének vektoriális szorzatát **perdület**nek (kinetikai nyomatéknak) nevezzük



$$\underline{\Pi}_O = \underline{r} \times m\underline{v}$$

$$\underline{\Pi}_O = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} .$$

Fenti egyenletet idő szerint deriválva:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{\Pi}_O}{\mathrm{d}t} = m(\dot{\underline{r}} \times \underline{v} + \underline{r} \times \dot{\underline{v}}) \ .$$

Mivel $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$, ezért $\dot{\underline{r}} \times \underline{v} = 0$.

Így $\dot{\underline{\Pi}}_O = m(\underline{r} \times \dot{\underline{v}}) = \underline{r} \times (m\dot{\underline{v}}) = \underline{r} \times (m\underline{a})$.

A Newton törvénye értelmében $m\underline{a} = \underline{R}$ és ezek után: $\dot{\underline{\Pi}}_O = \underline{r} \times \underline{R} = \underline{M}_O$

Ahol az $\underline{M}_O$ az anyagi pontra ható erők eredőjének az O jelű pontra vonatkozó nyomatékát jelenti.

A fentiek értelmében tehát **egy fix pontra vonatkozó perdület idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő az anyagi pontra ható erők ugyanarra a pontra számított nyomatékösszegével.** Ezt az összefüggést nevezzük **perdülettétel**nek.

A változók szétválasztása, majd t_1 és t_2 időpont közti integrálás után, az anyagi pont mozgására érvényes **perdületváltozás tételé**t kapjuk:

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_{\mathrm{O}} \mathrm{d}t = \underline{\Pi}_{\mathrm{O}}(t_2) - \underline{\Pi}_{\mathrm{O}}(t_1) \ .$$

A tétel azt fejezi ki, hogy **egy *m* tömegű anyagi pontra ható erők egy fix pontra vonatkozó nyomatékösszegének két időpont közti idő szerinti integrálja egyenlő az anyagi pont ugyanarra a pontra vonatkozó perdületének a két időpont közti megváltozásával.**

Ezután vizsgáljuk azt az igen fontos speciális esetet, amikor az anyagi pontra ható erők eredőjének hatásvonala a mozgás közben mindig az O jelű fix ponton megy át. Ebben az esetben ugyanis:

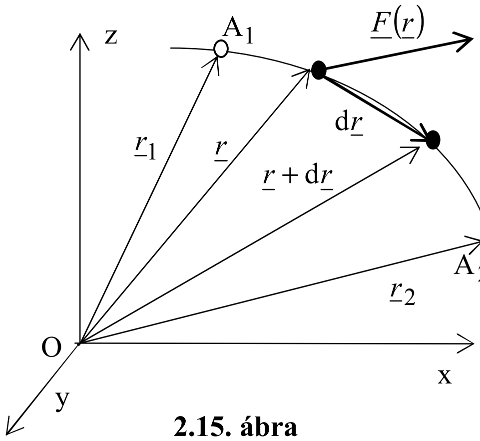
$$\underline{M}_{\mathrm{O}} = \underline{r} \times \underline{R} = 0 .$$

Azt az erőt, amely ezt a feltételt minden időpontban kielégíti, **centrális erő**nek nevezzük, és ilyenkor azt mondjuk, hogy a pont **centrális erőtér**ben mozog. Centrális erőtérben mozog például az az anyagi pont, amelyre mozgása közben csak a súlya hat, mivel ebben az esetben a pontra hatóerő - gravitációs erő - minden időpontban a Föld középpontja felé mutat. Ebben az esetben $\underline{\Pi}_{\mathrm{O}} = \underline{r} \times m\underline{v} = \text{állandó}$

Két mozgó vektor vektoriális szorzata csak akkor lehet állandó, ha mindketten ugyanabban a síkban mozognak, így mindjárt megállapítható, hogy **amennyiben az anyagi pont centrális erőtérben mozog, mozgása állandó perdületű síkmozgás lesz.**

Elméleti összefoglaló a tankönyvben az 54-55. oldalon. Példák: 2.12, 2.13

Az erő munkája, a mozgási energia változásának tétele, a teljesítmény



2.15. ábra

Az ábrán lévő $\underline{F}(\underline{r})$ erő $\mathrm{d}\underline{r}$ elemi eltolódás alatt végzett elemi munkája (dL) egyenlő az erő elmozdulás irányú komponensének és az elemi elmozdulásnak a szorzatával, vagyis az erővektor és elmozdulásvektor skaláris szorzatával: $\mathrm{d}L = \underline{F} \cdot \mathrm{d}\underline{r}$.

Véges eltolódás esetén (A_1 és A_2 pontok között), ha a végpontok helyzetvektorai $\underline{r}_1$ és $\underline{r}_2$, az erő munkája az elemi munka határozott integráljaként kapható:

$$L_{1-2} = \int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} \mathrm{d}L = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F} \mathrm{d}\underline{r} \ .$$

Ha az erőt komponenseivel adjuk meg, a munka az alábbi összefüggésből számítható ki:

$$L_{1-2} = \int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} \left(F_{\mathrm{x}} \mathrm{d}x + F_{\mathrm{y}} \mathrm{d}y + F_{\mathrm{z}} \mathrm{d}z\right) = \int_{x_1}^{x_2} F_{\mathrm{x}} \mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} F_{\mathrm{y}} \mathrm{d}y + \int_{z_1}^{z_2} F_{\mathrm{z}} \mathrm{d}z .$$

A műszaki számítások során gyakori eset, hogy egyenes vonalú pályán, egy azzal α szöget bezáró -állandó nagyságú - erő Ez esetben a munka:

$$L_{1-2} = \int_{\mathrm{A}_1}^{\mathrm{A}_2} \mathrm{d}L = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot \cos \alpha \mathrm{d}x = F \cdot \cos \alpha \cdot x_{2-1} .$$

Ugyancsak sok feladatban szerepel az anyagi pont tömegéhez tartozó súlyerő. Ha az anyagi pont mozgását térbeli derékszögű koordinátarendszerben írjuk le és a nehézségi erő irányában vesszük fel a z tengelyt a munka:

$$L_{1-2} = \int_{z_1}^{z_2} (-F)\mathrm{d}z = -F(z_2 - z_1) = F(z_1 - z_2)\,.$$

Vagyis az erő munkája nem függ a befutott pálya alakjától, csak a két pont magasságának különbségétől.

Ha egy anyagi pontot rugóval rögzítjük egy fix ponthoz. a pont mozgásakor a pontra egy, a rugó megnyúlásával arányos, visszatérítő erő hat. Ha a kezdőponthoz a nyúlásmentes állapot tartozott és a végponti kitérést x-szel adjuk meg, akkor: $L_{1-2} = -\frac{1}{2}kx^2$. A munka mértékegysége: joule [J]. 1 J=1 Nm.

A **mozgási energia változásának tétele:** $\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{\underline{r}_1}^{\underline{r}_2} \underline{F}\mathrm{d}\underline{r}$. Itt $T = \frac{mv^2}{2}$ az **anyagi pont mozgási energiája** A mozgási energia tehát pozitív skaláris mennyiség és mértékegysége: [Nm]. Ezekután:

$$T_2 - T_1 = L_{1-2}\ .$$

Eszerint **az m tömegű anyagi pont mozgási energiájának valamely útszakaszon történő megváltozása egyenlő a pontra ható erők által ugyanazon útszakaszon végzett munkával.**

Az erő munkájának meghatározásából kiindulva - állandó erő esetén - a teljesítményt a következőképpen számíthatjuk:

$$P = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\underline{F}\mathrm{d}\underline{r}}{\mathrm{d}t} = \underline{F}\frac{\mathrm{d}\underline{r}}{\mathrm{d}t} = \underline{F}\,\underline{v}\ .$$

Szavakkal kifejezve azt mondhatjuk, hogy a **teljesítmény egy adott időpontban egyenlő az anyagi pont sebességvektorának és a pontra ható erő vektorának skalár szorzatával**. A teljesítmény mértékegysége: watt [W]. 1 W = 1 J/s = 1 Nm/s.

Potenciális erők esetén a munka $L_{1-2} = U_1 - U_2$, vagyis **a potenciális erőtérben végzett munkát a potenciálfüggvénynek a mozgás kezdőpontjához és végpontjához tartozó értékéinek különbsége adja meg**. Ekkor $U_2 + T_2 = U_1 + T_1 = \text{konstans}$, ami azt fejezi ki, hogy **a potenciális térben lévő anyagi pont kinetikai és helyzeti energiájának összege a pont helyzetétől független állandó**. Ezen összefüggés a **mechanikai energia megmaradásának törvénye.**

Elméleti összefoglaló a tankönyvben az 54-63. oldalakon. Példák: 2.14, 2.15, 2.16, 2.19, 2.20

Jármű kis hajlásszögű lejtőn való mozgása.

A mozgás soorán fellépő menetellenállás $E = \mu N$, ahol N a kis lejtőn megegyezik a jármű súlyával, míg μ a menetellenállási tényező. A kis lejtő hatása , a $\cos\alpha \approx 1$ közelítés abban is jelentkezik, hogy a mozgó pont által megtett utat $s = \frac{x}{\cos\alpha} \approx x$ módon, azaz a vízszintes távolsággal számíthatjuk. Ugyancsak a kis hajlásszög miatt elfogadható a $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$ közelítés. A meredekséget nem az α-val jellemzik, hanem a $\mathrm{tg}\alpha$ -val és annak 1000-rel szorzott értékét adják meg. Az $\varepsilon\,[\permil]$ ezrelék segítségével számítható a súlyerő lejtő irányú komponense:

$$(G\sin\alpha)[\mathrm{N}] \approx (G\mathrm{tg}\alpha)[\mathrm{N}] = G[\mathrm{kN}]\varepsilon\,[\permil]\,.$$

Látható, hogy ha a súlyerőt kN-ban adjuk meg, a lejtő irányú komponens N-ban adódik

Elméleti összefoglaló a tankönyvben az 67-68. oldalakon. Példák: 2.21, 2.22