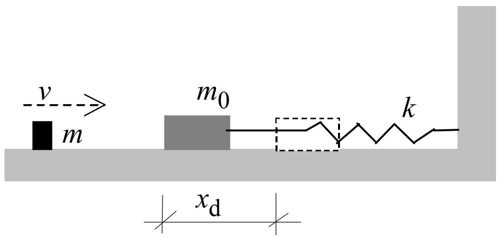
Rugalmasan megtámasztott testtel való ütközés

Vízszintes rugóval megtámasztott test

A kérdés tárgyalását a feladat gyakorlati jelentősége indokolja. A valóságban a rugalmas megtámasztás egy szerkezettel való megtámasztást jelent. A rugóerő számítása a megtámasztó szerkezet igénybevételeinek meghatározását jelenti. Sok esetben a megtámasztott tömeg magának a szerkezetnek a tömege, és az ütközés tulajdonképpen valamely idegen testnek a szerkezettel való ütközését jelenti. Ennek a kérdésnek az elemzése valódi építőmérnöki feladat.

Vizsgálataink során az első feladat most is az ütközést okozó test ütközés előtti sebességének a rögzítése. Ezt követően a megtámasztó szerkezet és az ütköző test tulajdonságai alapján dönteni kell arról, hogy rugalmas, rugalmatlan vagy képlékeny ütközésről van-e szó. Ha az ütközés rugalmatlan, a további vizsgálatokhoz kell a visszapattanási tényező. Az ütközés típusának eldöntése után lehet számítani az ütközés utáni sebességeket.

Példa



Az ábrán látható súrlódásmentes felületen fekvő m_0 tömegű test k rugómerevségű rugóval rugalmasan kapcsolódik a mozdulatlan falhoz. Az m tömegű test v sebességgel ütközik az m_0 tömegű testtel. Határozzuk meg az ütközéskor keletkező x_d dinamikus elmozdulást és a rugóban keletkező legnagyobb erőt!

Az ütközés utáni sebesség függ attól, hogy az ütközés rugalmas, rugalmatlan vagy képlékeny. A képlékeny ütközés annyiban is eltér a másik két esettől, hogy ekkor a rugóval megtámasztott tömeggel egyesül az ütköző tömeg és együtt mozognak tovább, míg nem képlékeny ütközésnél az ütköző tömeg elpattan a rugóval megtámasztott tömegtől.

Abban az esetben, ha az m tömeg visszafele mozog a továbbiakban már nem befolyásolja a megtámasztott test viselkedését. Abban az esetben azonban, ha csökkent sebességgel, de tovább halad, ismét utol fogja érni az m_0 tömegű testet. Ennek a jelenségnek az elemzése nem része a tananyagnak.

Jelöljük a megtámasztott test ütközés utáni tömegét M-mel. (Képlékeny ütközéskor $M = m + m_0$, különben $M = m_0$). Legyen a megtámasztott testnek az ütközési szakasz végéhez tartozó sebessége, amivel a megtámasztott test elindul, V. Képlékeny ütközés esetén: $V = \dfrac{mv}{m+m_0} = \dfrac{Gv}{G+G_0}$, míg rugalmatlan ütközésnél: $V = \dfrac{(1+e)mv}{m+m_0} = \dfrac{(1+e)Gv}{G+G_0}$.

Az x_d meghatározásához felírható a kinetikai energia változásának tétele: $0 - \frac{1}{2}MV^2 = L$.

A rugóerő munkája: $L = -\frac{1}{2}kx_\mathrm{d}^2$. Ebből: $x_\mathrm{d} = V\sqrt{\dfrac{M}{k}}$.

A dinamikus erő: $F_\mathrm{d} = kx_\mathrm{d} = V\sqrt{kM}$.

A különböző ütközési esetekhez tartozó eredmények az adott M és V behelyettesítésével nyerhetők.

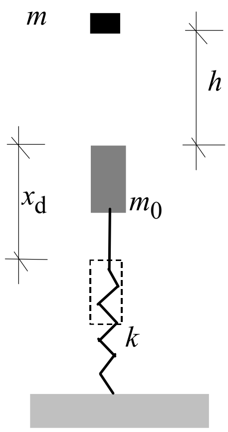
Pl. képlékeny ütközéskor:

$$x_\mathrm{d} = \frac{Gv}{G+G_0}\sqrt{\frac{G+G_0}{\mathrm{g}k}} = v\sqrt{\frac{G^2}{(G+G_0)\mathrm{g}k}},$$

$$F_\mathrm{d} = kx_\mathrm{d} = v\sqrt{\frac{kG^2}{(G+G_0)\mathrm{g}}}.$$

Jól látható, hogy a rugómerevség növelésével az ütközési erő növekszik, míg az elmozdulás csökken.

Leeső teher hatásának vizsgálata



Az. ábrán az m tömegű test h magasságról esik a k rugómerevségű rugóval az alátámasztó szerkezethez rugalmasan kapcsolódó m_0 tömegű testre.

Határozzuk meg az ütközéskor keletkező x_d dinamikus elmozdulást és a rugóban keletkező legnagyobb erőt!

Az ütközés előtt csak az m tömegnek van sebessége: $v=\sqrt{2gh}$. Az ütközés utáni sebesség most is attól függ, hogy az ütközés rugalmas, rugalmatlan vagy képlékeny.

Ugyancsak az ütközés módjától függ az együtt mozgó tömeg, ami képlékeny ütközéskor $M=m+m_0$, különben $M=m_0$.

A mozgási energia: $T_1=\frac{1}{2}MV^2$. Vizsgáljuk meg a továbbiakban a képlékeny ütközés esetét!

$$T_1=\frac{1}{2}(m+m_0)\left(\frac{Gv}{G+G_0}\right)^2=\frac{1}{2\mathrm{g}}\frac{G^2}{G+G_0}2\mathrm{g}h=\frac{G^2}{G+G_0}h\ ,$$

Munkát végez egyrészt az együtt mozgó tömegnek megfelelő súlyerő: $L_\mathrm{G}=M\mathrm{g}x_\mathrm{d}$, másrészt a rugóban ébredő rugóerő: $R=G_0+kx$.

Ennek a rugóerőnek az x_d elmozduláson végzett munkája: $L_\mathrm{R}=-\int_0^{x_\mathrm{d}}(G_0+kx)\mathrm{d}x=-G_0x_\mathrm{d}-\frac{1}{2}kx_\mathrm{d}^2$.

$$L=L_\mathrm{G}+L_\mathrm{R}=(G+G_0)\cdot x_\mathrm{d}-G_0x_\mathrm{d}-\frac{1}{2}kx_\mathrm{d}^2=Gx_\mathrm{d}-\frac{1}{2}kx_\mathrm{d}^2\ .$$

Felírva a mozgási energia változásának tételét: $-\frac{G^2}{G+G_0}h=Gx_\mathrm{d}-\frac{1}{2}kx_\mathrm{d}^2$.

$$x_\mathrm{d}^2-2\frac{G}{k}x_\mathrm{d}-2h\frac{G}{k}\frac{1}{1+\frac{G_0}{G}}=0\ .$$

Itt $\frac{G}{k}=x_\mathrm{st}$ a leeső tömegnek megfelelő súlyerőből számított statikus elmozdulás. Megoldva a másodfokú egyenletet, a fizikailag lehetséges megoldáshoz a második tagot pozitív előjellel véve:

$$x_\mathrm{d}=x_\mathrm{st}+\sqrt{x_\mathrm{st}^2+2h\frac{x_\mathrm{st}}{1+\frac{G_0}{G}}}=\mathrm{n}\cdot x_\mathrm{st}\ .$$

A kapott kifejezésben n a **dinamikus tényező**: $\mathrm{n}=1+\sqrt{1+\frac{2h}{x_\mathrm{st}}\frac{1}{1+\frac{G_0}{G}}}$.

Jól látható, hogy **a dinamikus tényező értéke növekszik a h magasság növelésével és a statikus elmozdulás csökkenésével (a rugómerevség növekedésével). Kedvezően befolyásolja a dinamikus tényezőt a szerkezet G_0 tömege**.
Speciális esetként kezelhető a $h = 0$ esete, amikor a testet zérus magasságról hirtelen ejtjük (és nem statikusan, fokozatosan engedjük) az alátámasztó szerkezetre.

Ekkor a dinamikus tényező: $n = 2$.

A **rugalmas** ütközésnél a leeső test sebessége az ütközéskor: $v = \sqrt{2gh}$.

A mozgó tömeg: $M = \dfrac{G_0}{g}$.

A rugalmasan megtámasztott test ütközés utáni sebessége: $V = \dfrac{2Gv}{G + G_0}$.

A sebesség kétszerese a képlékeny ütközésnél lévőnek!

A dinamikus elmozdulás mentén végzett munka:

$$L = L_G + L_R = Mgx_d + \left(-G_0 x_d - \frac{1}{2} k x_d^2 \right) = G_0 x_d - G_0 x_d - \frac{1}{2} k x_d^2 = -\frac{1}{2} k x_d^2 .$$

A mozgási energia változásának tétele szerint: $0 - \dfrac{1}{2} M V^2 = L$,

Behelyettesítve a V-re kapott kifejezést:

$$-\frac{1}{2} \frac{G_0}{g} \left(\frac{2Gv}{G + G_0} \right)^2 = -\frac{1}{2} \frac{G_0}{g} \frac{4G^2 \cdot 2gh}{(G + G_0)^2} = -\frac{4G^2 \cdot G_0 \cdot h}{(G + G_0)^2} = -\frac{1}{2} k x_d^2 .$$

Ebből:

$$x_d = \frac{G}{k} \sqrt{\frac{8hkG_0}{(G + G_0)^2}} .$$

Mivel $\dfrac{G}{k} = x_{st}$, a gyökös kifejezés lesz a dinamikus tényező.

Ebben az estben a nem képlékeny ütközésnél, bár elválnak a testek, de egy későbbi időpontban az m tömeg bizonyosan újra ráesik a szerkezetre. A jelenséget a tananyagban részletesen nem elemezzük.

A kapott összefüggéseket azzal a feltételezéssel vezettük le, hogy a rugalmasan megtámasztott tömeg mozgása egyszabadságfokú. Így összefüggéseink sok gyakorlati esetben (pl. folytonos tömegeloszlású gerendára leeső teher) csak akkor használhatók fel, ha a ténylegesen több (esetleg végtelen sok) szabadságfokú rendszert egyszabadságfokúra vezetjük vissza az ún. redukált tömeg meghatározásával.

Egy adott ponthoz tartozó redukált tömeget úgy lehet meghatározni, hogy az egyszabadságfokú rendszer kinetikai energiája megegyezzen az eredeti modell kinetikai energiájával. Pl. egy l hosszúságú A keresztmetszetű ρ sűrűségű oszlopnál az egyszabadságfokú rendszerrel való vizsgálatnál az ún. **redukált tömeg**: $m = \dfrac{M}{3}$. Egy kéttámaszú tartó közepére leeső teher esetén a gerenda közepére redukált tömeg: $m = \dfrac{17}{35} M \approx \dfrac{M}{2}$. Itt M a gerenda/oszlop teljes tömege.

Természetesen a leeső teherre való számítás akkor is lehetséges, ha nem képlékeny az ütközés. Ekkor az M és V helyére a rugalmatlan ütközésnek megfelelően m_0 -at, illetve $\dfrac{(1 + e)G\sqrt{2gh}}{G + G_0}$ kifejezést kell beírni.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben az 105-108. oldalakon. Példák: 2.39, 2.40.