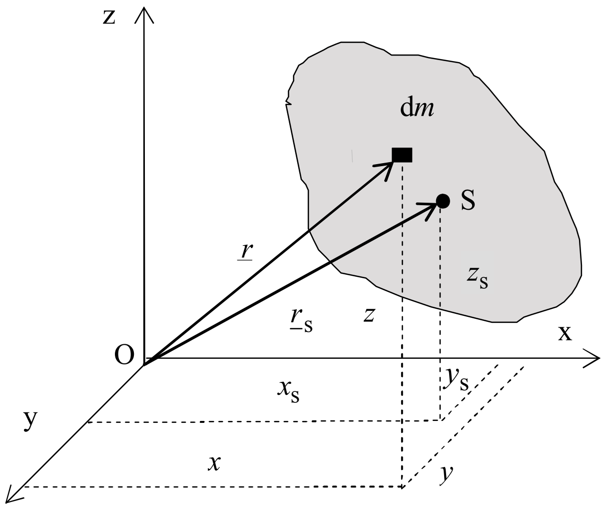
Merev testek kinetikája

A témakör tárgyalásához definiálni kell a test néhány tömegjellemzőjét.



A merev test tömegét az elemi dm tömegek egész testre számított integráljaként határoztuk meg:

$$m = \int_m \mathrm{d}m \ .$$

Egy adott testnek a koordinátarendszer kezdőpontjára vonatkozó **statikai nyomatéka**:

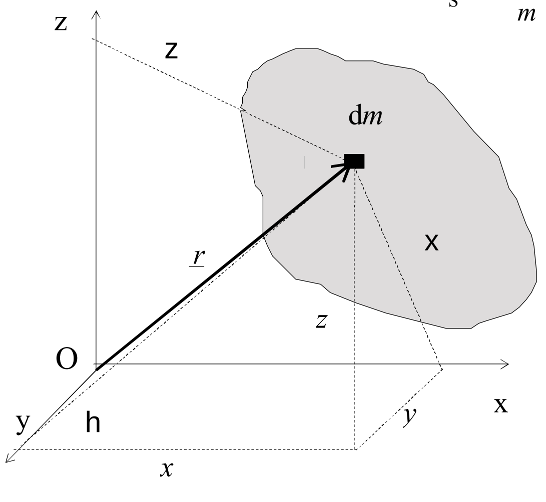
$$\underline{S}_0 = \int_m \underline{r}\mathrm{d}m \ .$$

A vektor, amely kijelöli a test **tömegközéppont**ját, vagy más néven a test **súlypont**ját:

$$\underline{r}_\mathrm{S} = \frac{\underline{S}_0}{m} = \frac{\int_m \underline{r}\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} \ .$$

A súlypont helyét a derékszögű koordináta-rendszerben az x_S, y_S, z_S koordinátákkal is megadhatjuk:

$$x_\mathrm{S} = \frac{\int_m x\mathrm{d}m}{m}, \quad y_\mathrm{S} = \frac{\int_m y\mathrm{d}m}{m}, \quad z_\mathrm{S} = \frac{\int_m z\mathrm{d}m}{m} \ .$$



A merev test tehetetlenségi nyomatéka az xy, xz és yz koordinátasíkokra:

$$\mathrm{I}_\mathrm{xy} = \int_m z^2\mathrm{d}m, \mathrm{I}_\mathrm{xz} = \int_m y^2\mathrm{d}m, \mathrm{I}_\mathrm{yz} = \int_m x^2\mathrm{d}m \ .$$

Az x, y és z koordinátatengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatékok:

$$\mathrm{I}_\mathrm{x} = \int_m \mathsf{x}^2\mathrm{d}m, \mathrm{I}_\mathrm{y} = \int_m \mathsf{h}^2\mathrm{d}m, \mathrm{I}_\mathrm{z} = \int_m \mathsf{z}^2\mathrm{d}m \ .$$

Végül a koordináta-rendszer kezdőpontjára vonatkozó tehetetlenségi nyomaték:

$$\mathrm{I}_\mathrm{O} = \int_m r^2\mathrm{d}m \ .$$

Mivel $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, és például $x^2 + y^2 = \mathsf{z}^2$,

$\mathrm{I}_\mathrm{O} = \int_m x^2\mathrm{d}m + \int_m y^2\mathrm{d}m + \int_m z^2\mathrm{d}m = \mathrm{I}_\mathrm{xy} + \mathrm{I}_\mathrm{xz} + \mathrm{I}_\mathrm{yz}$, $\mathrm{I}_\mathrm{z} = \int_m x^2\mathrm{d}m + \int_m y^2\mathrm{d}m = \mathrm{I}_\mathrm{xz} + \mathrm{I}_\mathrm{yz}$, és ezek után

$\mathrm{I}_\mathrm{O} = \mathrm{I}_\mathrm{z} + \mathrm{I}_\mathrm{xy}$.

A Steiner-tétel alapján a merev test súlypontjára, vagy azon átmenő tengelyre, illetőleg síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték ismeretében egy másik pontra, vagy a tengellyel illetőleg a síkkal párhuzamos másik tengelyre és síkra vonatkozó tehetetlenségi nyomaték is számíthatók. A tehetelenségi nyomaték

- a henger t tengelyére és a tengellyel párhuzamos t_1 alkotójára: $\mathrm{I}_\mathrm{t} = m\dfrac{R^2}{2}$ ill. $\mathrm{I}_{\mathrm{t}_1} = \dfrac{3}{2}mR^2$.
- a gerenda közepén és végén a keresztmetszeti súlyponti tengelyre: $\mathrm{I}_\mathrm{y} = \dfrac{m}{12}l^2$ ill. $\mathrm{I}_{\mathrm{y}_1} = \dfrac{m}{3}l^2$.
- a gömb súlyponti tengelyére: $\mathrm{I}_\mathrm{t} = m\dfrac{2R^2}{5}$.

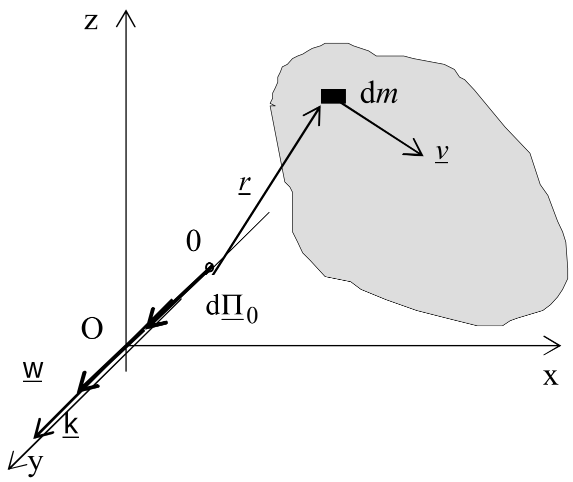
Merev testek kinetikájának alaptételei

Súlyponttétel

$$\underline{R} = m\underline{a}_{\mathrm{S}}\ .$$

A kapott kifejezés a merev test mozgására vonatkozó **súlyponttétel**, amely azt mondja ki, hogy **a merev test súlypontja úgy mozog, mint a test tömegével megegyező tömegű olyan anyagi pont, amelyre a testre ható külső erők vektorösszegének megfelelő erő működik.**

Síkmozgást végző merev test perdülete a forgástengelyre, a perdülettétel



Az ábrán lévő y fix tengely, vagy a pillanatnyi forgástengely körül $\underline{\mathrm{w}}$ szögsebességgel és $\underline{\mathrm{k}}$ szöggyorsulással forgómozgást végző merev test egy tetszőleges, anyagi pontnak tekinthető dm tömegű részének sebessége $\underline{v}$. Az $\underline{r}$ vektor a síkmetszet és a forgástengely 0 jelű döféspontjától a dm tömeghez mutató helyzetvektor. A dm anyagi pontnak a perdülete a tengelyen lévő mozdulatlan 0 pontra:

$$\mathrm{d}\underline{\Pi}_0 = \underline{r} \times \mathrm{d}m \cdot \underline{v}\ .$$

Ez a vektor a síkmozgás következtében az y tengelybe esik, így a perdület a tengelyre vett perdületként is értelmezhető. Az egész test perdülete az azonos állású elemi perdületvektorok összege:

$$\underline{\Pi}_0 = \int_m \underline{r} \times \underline{v}\, \mathrm{d}m$$

Mivel $\underline{v} = \underline{\mathrm{w}} \times \underline{r}$, ezért $\underline{\Pi}_0 = \int_m \underline{r} \times \left(\underline{\mathrm{w}} \times \underline{r}\right) \mathrm{d}m$.

Az $\underline{\mathrm{w}} \times \underline{r}$ vektoriális szorzat:

$$\underline{\mathrm{w}} \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & \mathrm{w} & 0 \\ r_{\mathrm{x}} & 0 & r_{\mathrm{z}} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{w}\, r_{\mathrm{z}}\right)\underline{i} + 0\underline{j} + \left(-\mathrm{w}\, r_{\mathrm{x}}\right)\underline{k}\ .$$

A $\underline{r} \times \left(\underline{\mathrm{w}} \times \underline{r}\right)$ vektoriális szorzat pedig:

$$\underline{r} \times \underline{\mathrm{w}} \times \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ r_{\mathrm{x}} & 0 & r_{\mathrm{z}} \\ \mathrm{w}\, r_{\mathrm{z}} & 0 & -\mathrm{w}\, r_{\mathrm{x}} \end{vmatrix} = \left(\mathrm{w}\, r_{\mathrm{z}}^2 + \mathrm{w}\, r_{\mathrm{x}}^2\right)\underline{j} = \underline{\mathrm{w}}\, r^2\ .$$

Ezek után:

$$\underline{\Pi}_0 = \int_m \underline{\mathrm{w}}\, r^2 \mathrm{d}m\ .$$

A kapott kifejezésben $\underline{\mathrm{w}}$ nem függ az elemi pont helyzetétől, így az integráljel alól kiemelhető.

$$\underline{\Pi}_0 = \underline{\mathrm{w}} \int_m r^2 \mathrm{d}m\ .$$

Az $\int_m r^2\, \mathrm{d}m$ kifejezés a testnek az y tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka, amelyet a síkmozgásra vonatkozó összefüggésekben I_0-al jelölünk. Így a **síkmozgást végző test mozdulatlan tengelyre vonatkozó perdülete**:

$$\underline{\Pi}_0 = I_0 \underline{\mathrm{w}}\ .$$

A perdületvektor idő szerinti deriváltja: $\dot{\underline{\Pi}}_0 = I_0 \dot{\underline{\mathrm{w}}} = I_0 \underline{\mathrm{k}}\ .$

Az anyagi pont mozdulatlan pontra vonatkozó perdületének deriváltja egyenlő az anyagi pontra ható erőnek a pontra számított nyomatékával. Síkmozgás esetén a perdületvektor és így annak deriváltja is a síkra merőleges tengelybe esik, így az anyagi pontra ható erők nyomatékvektorainak összege is tengelyirányú lesz.
A síkmozgást végző merev test mozdulatlan tengelyre vonatkozó perdületét, amint az korábban látható volt, az egyes elemi tömegpontok perdületének összegeként értelmeztük. Ennek megfelelően a perdület deriváltja is egyenlő az összetevők deriváltjainak összegével. Ez azt jelenti, hogy összegezni kell az egyes pontokra ható erőknek a mozdulatlan tengelyre vonatkozó nyomatékait:

$$\sum_{i=1}^{n} \underline{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(\underline{F}_i) + \sum_{i=1}^{n} \underline{M}(\underline{B}_i) = \underline{M}_0 .$$

A nyomatékok egyrészt a külső, másrészt a belső erőkből számíthatók ki. Az összegzés során azonban egy adott belső erő ellentettjének a nyomatéka is megjelenik az összegben, így a belső erőkből számítható nyomatékösszeg zérus lesz. Ebből az következik, hogy az $\underline{M}_0$ nyomatékösszegben csak a testre ható külső erők nyomatékösszege jelenik meg.

Ezek után az $\underline{M}_0 = \dot{\underline{\Pi}}_0$ alapján megfogalmazható a **síkmozgást végző merev test perdülettétele,** mely szerint **a testre ható külső erőknek a mozdulatlan tengelyre, vagy a pillanatnyi forgástengelyre számított nyomatékösszege egyenlő a testnek a tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának és a szöggyorsulásnak a szorzatával.** A vektorjelöléstől a síkmozgás miatt eltekintve:

$$M_0 = I_0 \varepsilon \; .$$

Ez az összefüggés akkor használható a gyakorlati feladatok megoldása során, ha egyszerűen meghatározható a forgás tengely. Különben célszerű az $M_S = I_S \varepsilon$ összefüggéssel számolni, amely szerint **a testre ható külső erőknek a test súlyponti tengelyére számított nyomatékösszege egyenlő a testnek a súlyponton átmenő, a mozgás síkjára merőleges tengelyre számított tehetetlenségi nyomatékának és a szöggyorsulásnak a szorzatával.** Ez a tétel a síkmozgást végző testnek a **súlyponti tengelyre (súlypontra) vonatkozó perdülettétel**e.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 71-78. oldalakon. Példák: 2.25, 2.26, 2.27, 2.28.

A mozgásmennyiség változásának tétele, a perdületváltozás tétele

Az alaptételekből most is levezethetők a feladatok megoldását segítő tételek.

A merev test mozgásmennyisége változásának tétele szerint a **merev test mozgásmennyiségének adott időtartam alatti megváltozása egyenlő a testre ható külső erők vektorösszegének az adott időtartamra vonatkozó határozott integráljával.**

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{R}\,\mathrm{d}t = m \int_{\underline{v}_{S1}}^{\underline{v}_{S2}} \mathrm{d}\underline{v}_S = m(\underline{v}_{S2} - \underline{v}_{S1}).$$

A perdület változásának tétele szerint **a merev test síkmozgásakor a síkra merőleges mozdulatlan tengelyre, illetve a test súlypontján átmenő tengelyre számított perdület adott időtartam alatti megváltozása egyenlő a testre ható külső erőknek az illető tengelyre vonatkozó nyomatékösszege adott időtartamra vonatkozó határozott integráljával.**

$$\int_{t_1}^{t_2} M_0 \mathrm{d}t = I_0(\omega_2 - \omega_1) \; , \quad \int_{t_1}^{t_2} M_S \mathrm{d}t = I_S \int_{\omega_1}^{\omega_2} \mathrm{d}\omega = I_S(\omega_2 - \omega_1) \; .$$

Merev test mozgási energiája, a mozgási energia változásának tétele

A **merev test mozgási energiája**:

$$T = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \text{, vagy } \; T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} I_S \omega^2 \; .$$

A munka számításánal az erőpár munkája az erőpár és a test elfordulásának szorzataként számítható ki. Az erők munkájával való összegzés után **a mozgási energia változásának tétele**:

$$T_2 - T_1 = L \, .$$

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 86-87 és a 90-91 oldalakon. Példák: 2.30 2.31, 2.32, 2.34.