Egyszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése

Harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés

A differenciálegyenlet ebben az esetben: $m\ddot{x}(t)+kx(t)=q\sin\omega t$.

Az inhomogén differenciálegyenlet megoldása a homogén egyenlet általános és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának összegeként kapható. A homogén egyenlet megoldása megegyezik a csillapítás nélküli esetben kapott megoldással.
A partikuláris megoldást $x_g(t)=x_{g_0}\sin\omega t$ alakban keressük. Behelyettesítve az $x_g(t)$ és $\ddot{x}_g(t)$ függvényeket és $\sin\omega t$ -vel egyszerűsítve: $\left(k-m\omega^2\right)x_{g_0}=q$.

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $k\neq m\omega^2$ és végrehajthatjuk a $k-m\omega^2$-tel való osztást! Figyelembe véve, hogy $\omega_0^2=\dfrac{k}{m}$, a partikuláris megoldás:

$$x_g(t)=\frac{q}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\sin\omega t\,.$$

A homogén rész általános megoldását és a partikuláris megoldást összeadva

$$x(t)=\mathrm{A}\cos\omega_0 t+\mathrm{B}\sin\omega_0 t+\frac{q}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\sin\omega t$$

alakban kapjuk a differenciálegyenlet általános megoldását. Az A és B állandókat a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg. Ha $t=0$-nál a kezdeti feltételek $x=x_0$, $\dot{x}=v_0$, akkor a kezdeti feltételeket kielégítő megoldás:

$$x(t)=x_0\cos\omega_0 t+\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t+\frac{q}{k}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\left(\sin\omega t-\frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right).$$

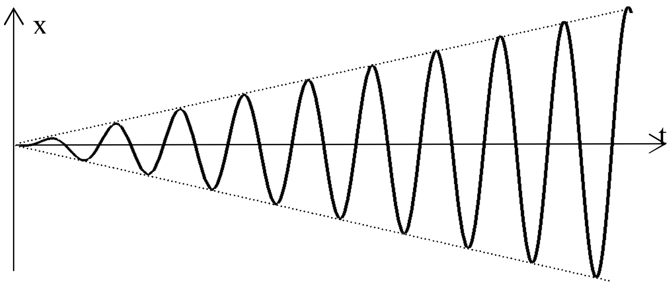
Az így kapott megoldásban az első két tag megfelel a szabad rezgésnél kapott megoldásnak, a harmadik tag pedig a gerjesztő erő hatásának. Az első két tag a csillapítás miatt rövid idő alatt megszűnik, és a továbbiakban az inhomogén rész lesz az **állandósult rezgés** tetszőleges kezdeti feltétel esetén is.

A $\dfrac{q}{k}$ egy olyan eltolódást jelent, amelyet a gerjesztő erő maximuma okozna a rendszeren, amennyiben statikusan működne. Az erő dinamikus hatását a szorzat másik tényezője, az $\dfrac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ kifejezés mutatja. Ennek abszolút értéke a μ **rezonanciatényező**. A rezonanciatényező kizárólag az $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ hányadostól, vagyis a gerjesztő erő körfrekvenciájának és a rendszer sajátkörfrekvenciájának a hányadosától függ. Amikor a gerjesztő erő körfrekvenciája a szabad rezgés sajátkörfrekvenciájánál kisebb, a rezonanciatényező értéke egynél mindig nagyobb. Amikor $\dfrac{\omega}{\omega_0}$ közeledik az egyhez, a rezonanciatényező - és vele együtt a rezgés amplitúdója - rohamosan nő. Ha ω nagyobb ω_0-nál, akkor ω növekedésével a rezonanciatényező aszimptotikusan közeledik nullához. Ez azt jelenti, hogy amennyiben ω sokkal nagyobb ω_0-nál, a gerjesztő erő igen kis amplitúdójú rezgéseket okoz.

A differenciálegyenlet megoldása során kizártuk a $k=m\omega^2$, azaz $\omega=\omega_0$ esetet, mivel ez esetben zérussal kellene osztani. Ez a jelenség, amikor $\omega=\omega_0$, azaz a gerjesztő erő frekvenciája a rendszer sajátfrekvenciájával megegyezik a **rezonancia.** Az $x_0=\dot{x}_0=0$ zérus kezdeti feltételekhez tartozó megoldást vizsgálva megkereshetjük $x(t)$ határértékét:

$$\lim_{\omega\to\omega_0}x(t)=\frac{q}{2k}\sin\omega_0 t-\frac{q\omega_0}{2k}t\cos\omega_0 t$$

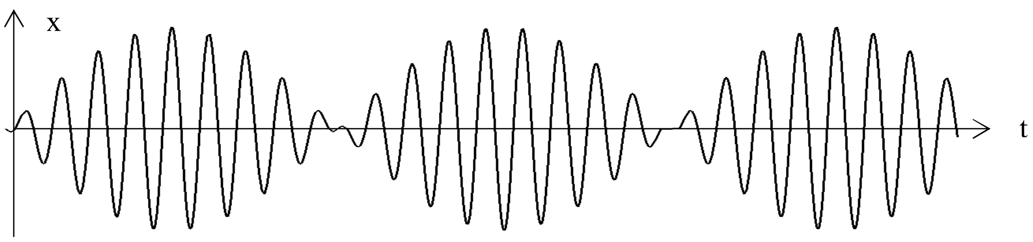
A kapott eredményből látható, hogy rezonancia esetén a második összetevő amplitúdója az idővel arányosan növekszik, tehát a rezgés során a végtelen felé tart, amint azt az ábra mutatja.



Meg kell jegyezni, hogy a rezonancia, azaz $\omega=\omega_0$ egybeesés a valóságban nem tud kialakulni, mivel a körfrekvenciák valós fizikai mennyiségek, értékük valós szám. A valóságban viszont találkozunk azzal a jelenséggel, amikor ω közel esik ω_0-hoz, de nem azonos vele. Ekkor $\frac{\omega}{\omega_0}\approx 1$ esetén, igazolható, hogy

$$x(t)=\frac{q}{k}\frac{2}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\sin\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}t\right)\cos\omega t\,,\quad \text{azaz: } x(t)=A(t)\cos\omega t\,.$$

Ezt a jelenséget, amelynél a $q\sin\omega t$ gerjesztő erő hatására az anyagi pont olyan ω frekvenciájú rezgést végez, amelynek amplitúdója periodikusan változik, **lebegés**nek nevezzük.



Harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgés

A differenciálegyenlet ebben az esetben $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=q\sin\omega t$. A partikuláris megoldás $x_g(t)=x_{g_0}\sin(\omega t-\varphi)$ alakban kereshető, ahol $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$, míg $x_{g_0}=\frac{q}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$.

A differenciálegyenlet partikuláris megoldása ezek után:

$$x_g=\frac{q}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\sin\left(\omega t-\operatorname{arc\,tg}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right).$$

Az ily módon kapott megoldás harmonikus rezgőmozgást jelent, amelynek amplitúdója x_{g_0}, periódusa azonos a gerjesztő erő periódusával, de a rezgés a gerjesztő erőhöz képest $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}$ fázissal késik.

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x(t)=e^{-\rho t}\left(A\cos\omega_0^* t+B\sin\omega_0^* t\right)+\frac{q}{k}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2+\frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}\sin\left(\omega t-\operatorname{arc\,tg}\frac{c\omega}{k-m\omega^2}\right).$$

A homogén rész általános megoldása egy csillapított rezgést képvisel, amely rövid idő alatt megszűnik. Az állandósult rezgés kifejezésében a $\frac{q}{k}$ a statikus elmozdulás, míg a rezonanciatényező:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{c^2}{km}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

Ha a különböző csillapítási értékeket a kritikus csillapításhoz, $c_{kr} = 2\sqrt{km}$ viszonyítjuk, a különböző c/c_{kr} viszonyszámokhoz tartozó maximális amplitúdók mindig véges értéket vesznek fel és nagyobb csillapítási tényezőhöz kisebb maximális amplitúdó tartozik. Kis csillapításnál - ahol a rezonanciatényező jelentős - nem okoz nagy hibát, ha a rezonanciatényező értékét az $\omega = \omega_0$ -nál számítjuk. Ekkor: $\mu_{\max} = \frac{m\omega_0}{c}$.

A $c \ge \sqrt{2km}$ csillapítási tényező esetén a rezonanciatényező maximális értéke kisebb lesz egynél, vagyis a statikus elmozdulásnál - a gerjesztő frekvenciától függetlenül - kisebbek lesznek a dinamikus elmozdulások. A $c = \sqrt{2km}$ értékű csillapítást **eszményi csillapítás**nak nevezzük.

A szabad rezgés vizsgálatánál láttuk, hogy a szerkezeteknél akkor is van csillapítás, ha erről nem gondoskodunk. A $c = \gamma\sqrt{km}$ ekvivalens csillapítás kifejezését behelyettesítve a rezonanciatényező:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \gamma^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} \quad .$$

Valós szerkezeteknél a γ nem több 0,1-nél, ami azt jelenti, hogy a szerkezeti csillapításnak csak a rezonancia közelében van jelentősége. A rezonanciatényező maximális értéke: $\mu_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2}} = \frac{1}{\gamma}$. Például γ=0,1-nél $\mu_{\max} = 10$.

A csillapítatlan rezgésnél az $\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$ kifejezés előjele más akkor, ha $\omega < \omega_0$ és más, ha $\omega > \omega_0$. Megállapítottuk, hogy amikor a gerjesztő erő frekvenciája kisebb a rendszer sajátkörfrekvenciájánál a rezgés és a gerjesztő erő azonos fázisban van, vagyis a rezgést végző test mozgásának iránya minden pillanatban megegyezik a gerjesztő erő irányával. Ha azonban a gerjesztő erő frekvenciája nagyobb a rendszer sajátkörfrekvenciájánál, a test a gerjesztő erővel ellentétes fázisban - 180° fázis eltolódással - rezeg. A csillapított esetben $\varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{c\omega}{k - m\omega^2} = \mathrm{arc\,tg}\frac{c\omega}{k\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}$, vagyis a rezgés iránya most is változik, ha $\omega < \omega_0$ vagy ha $\omega > \omega_0$, de a fázis eltolódás nem ugrásszerűen, hanem folyamatosan változik.

A szerkezeti csillapítással ekvivalens külső - sebességgel arányos – csillapítás, a $c_{\mathrm{ekv}} = \gamma\sqrt{km}$ -t behelyettesítve:

$$\varphi = \mathrm{arc\,tg}\frac{\gamma\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)} \quad .$$

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 135-145 oldalakon. Példák: 3.5, 3.6, 3.7, 3.8