Egyszabadságfokú rendszer általános erő okozta gerjesztett rezgése

A csillapítatlan rezgés differenciálegyenlete: $m\ddot{x}(t)+kx(t)=q\,(t)$, a csillapított gerjesztett rezgés differenciálegyenlete pedig: $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=q\,(t)$.

Állandó nagyságú erővel gerjesztett csillapítatlan rezgés

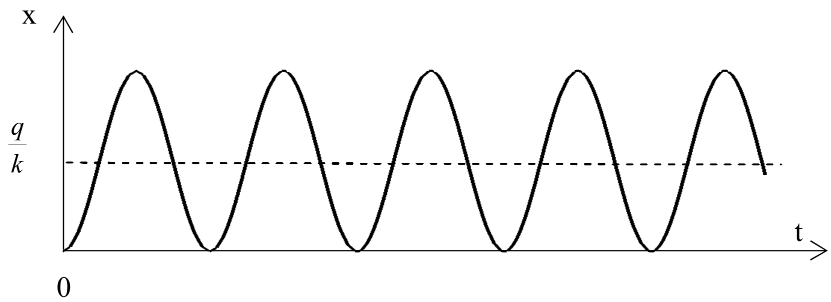
$$m\ddot{x}(t)+kx(t)=q\ .$$

A megoldás a homogén egyenlet általános megoldása és az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása összegeként áll elő. Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a partikuláris megoldás: $x_q=\frac{q}{k}$.

Ezek után a rezgésegyenlet megoldása: $x(t)=\mathrm{A}\cos\omega_0 t+\mathrm{B}\sin\omega_0 t+\frac{q}{k}$.

Az A és B állandókat a kezdeti feltételekből határozhatjuk meg. Ha $t=0$-nál a kezdeti feltételek $x_0=v_0=0$, akkor

$$x(t)=-\frac{q}{k}\cos\omega_0 t+\frac{q}{k}=\frac{q}{k}\left(1-\cos\omega_0 t\right)\ .$$



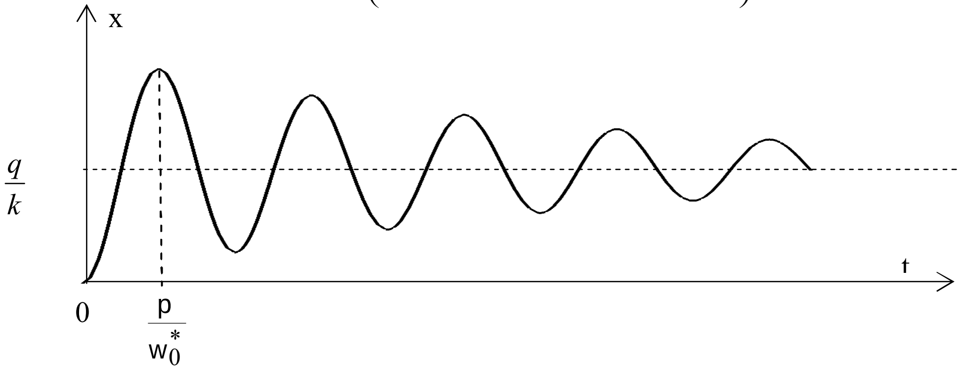
Az ábrából láthatjuk, hogy olyan - az $x_{\text{stat}}=\frac{q}{k}$ statikus egyensúlyi helyzet körüli - harmonikus rezgőmozgásról van szó, ahol az amplitúdó a statikus elmozdulásnak felel meg. Így a maximális kitérés a statikus elmozdulás kétszerese. Az eredmény megegyezik azzal, amit az ütközés fejezetben kaptunk, azaz a szerkezetre hirtelen - nem statikus módon - elhelyezett teherből az elmozdulás kétszeres.

Állandó nagyságú erővel gerjesztett csillapított rezgés

A csillapított esethez tartozó differenciálegyenlet esetében is ellenőrizhető behelyettesítéssel, hogy a partikuláris megoldás: $x_q=\frac{q}{k}$. Ezek után a rezgésegyenlet megoldása: $x(t)=e^{-\rho t}\left(\mathrm{A}\cos\omega_0^* t+\mathrm{B}\sin\omega_0^* t\right)+\frac{q}{k}$.

Az A és B állandókat most is a kezdeti feltételekből lehet meghatározni. Ha $t=0$-nál a kezdeti feltételek $x_0=v_0=0$, akkor.

$$x(t)=\frac{q}{k}\left(1-e^{-\rho t}\cos\omega_0^* t-e^{-\rho t}\,\frac{\rho q}{k\omega_0^*}\sin\omega_0^* t\right)\ .$$



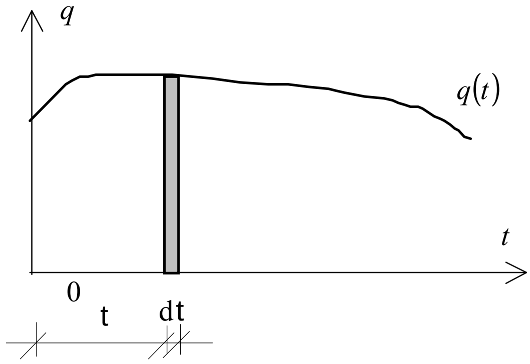
Az ábrán látható, hogy a homogén megoldásnak megfelelő rész idővel lecsillapodik és az elmozdulás a statikus elmozdulásnak - az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megfelelő lesz. A maximális kitérés a $\frac{\pi}{\omega_0^*}$ időponthoz tartozik. Ekkor

$$x\left(\frac{\pi}{\omega_0^*}\right)=\frac{q}{k}\left(1+e^{-\rho\frac{\pi}{\omega_0^*}}\right).$$

A maximális amplitúdó most a statikus elmozdulás kétszeresénél kisebb lesz.

Gerjesztés az időtől tetszőlegesen függő erővel

Az ábrán a gerjesztő erőt az idő egy tetszőleges függvényében látjuk. Ez a függvény vagy leírható az ismert függvények (esetleg szakaszonként eltérő) kombinációjaként, vagy az erő nagysága (pl. mérés során felvett) grafikonról olvasható le.



Vizsgáljuk azt az állapotot, amikor az anyagi pont a τ időpontban már mozog, de itt kap egy újabb $q(\tau)d\tau$ impulzust. Ehhez az impulzushoz tartozik a mozgásmennyiség $m dv$ növekménye. A mozgásmennyiség változásának tétele értelmében:

$$m dv = q(\tau)d\tau .$$

A sebességnek a τ időpontban az impulzus miatt bekövetkező növekedése tehát: $dv=\frac{1}{m}q(\tau)d\tau$.

Az impulzus miatti sebesség növekményéhez tartozóan a τ időponttól az anyagi pont elmozdulásában is lesz egy növekmény, amely $dx=\frac{1}{m\omega_0}q(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)d\tau$.

Ha t = 0-nál a kezdeti feltételek $x_0=v_0=0$, akkor a pont elmozdulása egy adott t időpontban az addigi növekmények összegezéséből adódik. Az $x(t)=\int_0^t dx$, vagyis:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_0}\int_0^t q(\tau)\sin\omega_0(t-\tau)d\tau$$

Teljesen hasonlóan vezethető le a kis csillapítás esetére vonatkozó összefüggés. Szerkezeti csillapításnál:

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_0^*}\int_0^t q(\tau)e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_0^*(t-\tau)}\sin\omega_0^*(t-\tau)d\tau .$$

A megoldást zárt formában megadni, azaz az elmozdulást az idő függvényében meghatározni természetesen csak akkor van módunk, ha az erőt is ismerjük az idő függvényében. Ez esetben sem biztos azonban, hogy a szorzatfüggvény primitív függvényét elő tudjuk állítani. Annak azonban nincs akadálya, hogy a különböző t időpontokban numerikusan számítsuk a határozott integrált.

Legyen $q(t) = q$, azaz vizsgáljuk az állandó erővel való gerjesztés esetét. Ekkor

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t q \sin\omega_0 (t-\tau)d\tau \ = \frac{q}{k}(1-\cos\omega_0 t)$$

Végeredményül megkaptuk a korábban már megismert összefüggést.

Vizsgáljuk a továbbiakban azt az esetet, amikor $q(t) = \alpha t$, azaz a gerjesztő erő az időben lineárisan növekszik.

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t \alpha\tau \ \sin\omega_0 (t-\tau)d\tau \ = \frac{\alpha}{m\omega_0}\int_0^t \tau \ \sin\omega_0 (t-\tau)d\tau \ .$$

A parciális integrálást alkalmazva: $x(t) == \frac{\alpha t}{k} - \frac{\alpha}{k\omega_0}\sin\omega_0 t$.

A megoldásban az első tag a lineárisan növekvő statikus erőnek felel meg és az adott időpontban az egyensúlyi helyzetet mutatja. A második tag egy állandó $\frac{\alpha}{k\omega_0}$ amplitúdójú harmonikus rezgés, amely a lineárisan növekvő statikus elmozdulás körül zajlik. Ez az amplitúdó annál nagyobb, minél gyorsabban nő az erő, ugyanakkor fordítottan arányos a rugómerevséggel és a sajátkörfrekvenciával.

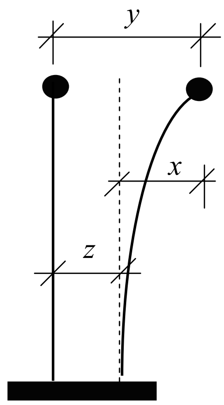
Támaszrezgés

Az ábrán látható szerkezet támasza $z(t)$ időben változó mozgást végez. A tömegpont elmozdulása a szerkezet deformációja miatt ennél $x(t)$-vel nagyobb, $y(t)$ értékű. A tömegpontra ható rugalmas visszatérítő erő $x(t)$ -vel, a tehetetlenségi erő $\ddot{y}(t)$-vel arányos. A mozgás differenciálegyenlete:

$$m\ddot{y}(t) + kx(t) = 0 \ .$$

Az $y(t) = z(t) + x(t)$ behelyettesítése után: $m\ddot{x}(t) + kx(t) = -m\ddot{z}(t)$.

A támaszrezgés tehát olyan gerjesztett rezgésként kezelhető, ahol $q(t) = -m\ddot{z}(t)$.



A differenciálegyenlet megoldásaként az $x(t)$, vagyis a szerkezet deformációja adódik, amiből a szerkezet igénybevételei számíthatók. Az $y(t) = z(t) + x(t)$ összefüggés segítségével számítható a tömegpont teljes elmozdulása.

Bizonyos mérnöki feladatoknál célszerű, ha a differenciálegyenletben ismeretlenként az y elmozdulást szerepeltetjük. Ekkor a differenciálegyenlet:

$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = kz(t) \ .$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a támaszmozgás harmonikus, azaz $z(t) = z_0 \sin\omega t$. Ekkor az egyenlet jobb oldala:

$$q(t) = kz_0 \sin\omega t = q\sin\omega t \ .$$

Megoldásként az állandósult rezgésre az

$$y_g(t) = z_0 \frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\sin\omega t$$

kifejezést kapjuk. Látható, hogy a teljes kitérés a támaszrezgés amplitúdójának a rezonanciatényezővel nagyított értéke lesz.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 151-153 oldalakon. Példák: 3.9, 3.10, 3.11