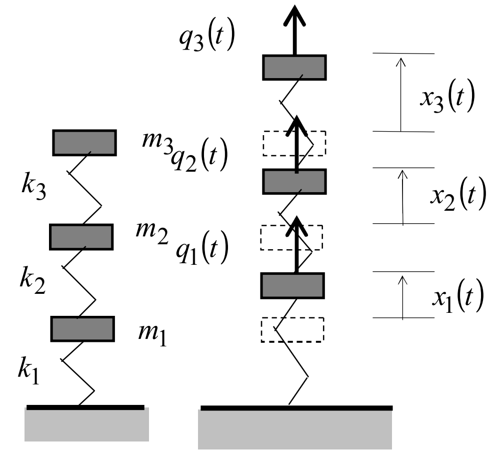
Többszabadságfokú rendszer szabad rezgései

Rugókkal kapcsolt tömegpontokból álló rendszer egyenletei



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_3(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

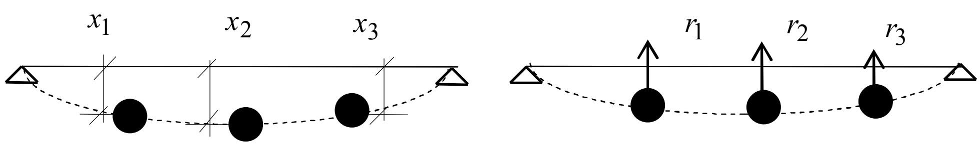
azaz

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t) \ .$$

Itt $\underline{\underline{M}}$ a tömegmátrix, $\underline{\underline{K}}$ a merevségi mátrix, $\underline{x}(t)$ a tömegpontok elmozdulásait, míg $\underline{q}(t)$ a tömegpontokra ható gerjesztő erőket tartalmazó vektor.

Merevségi mátrix számítása rugalmas szerkezeten lévő tömegpontokból álló rendszer esetén

Az ábrán egy elhanyagolható tömegű tartót látunk. A tartón három tömegpont van.



A tartót kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, aminek következtében az egyes tömegpontok $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ mértékben elmozdulnak. A tartó a kimozdított helyzetben nincs egyensúlyban, az egyes tömegpontokra a kimozdítással ellentétes, $r_1(t), r_2(t), r_3(t)$ visszatérítő erők hatnak. Ezen erőket nem ismerjük, de tudjuk, hogy az egyes erők a nekik megfelelő kitérésekkel lineárisan arányosak: $\underline{r}(t)=\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)$. Ebből $\underline{x}(t)=\underline{\underline{K}}^{-1}\underline{r}(t)=\underline{\underline{F}}\,\underline{r}(t)$.

A merevségi mátrix inverzét hajlékonysági mátrixnak nevezzük. Ennek f_{ij} eleme megadja a tömeg nélküli rugalmas tartóra ható j-edik irányú egységnyi erőből az i-edik irányú elmozdulást.

Ezen elmozdulások számítását korábbi tanulmányaink alapján - vagy a virtuális erők tételének alkalmazásával, vagy a tartók kis elmozdulásainak számításánál tanultaknak megfelelően - már el tudjuk végezni. A hajlékonysági mátrix ismeretében - annak invertálásával - a merevségi mátrix számítható.

Többszabadságfokú rendszer szabad rezgései

Feladatunk az $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$ mátrix-differenciálegyenlet adott $\underline{x}=\underline{x}_0$, $\underline{\dot{x}}_0=\underline{v}_0$ kezdeti feltételek melletti megoldása. Keressük a megoldást $\underline{x}(t)=\tilde{c}\,\underline{v}\,e^{i\omega_0 t}$ alakban, egy homogén lineáris egyenletrendszert kell megoldani. A mátrix-differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása ezek után (az egyszabadságfokú rendszereknél látottaknak megfelelő átalakítások után:

$$\underline{x}_r(t)=\underline{v}_r\left(\alpha_r\cos\omega_{0r}t+\beta_r\sin\omega_{0r}t\right)$$

alakban írható fel, míg az általános megoldás a partikuláris megoldások lineáris kombinációjaként adódik. Az $\underline{x}(t)=\sum_{r=1}^{n}\underline{v}_r\left(a_r\cos\omega_{0r}t+b_r\sin\omega_{0r}t\right)$ megoldásban szereplő a_r, b_r konstansok a kezdeti feltételek alapján - egy 2n rendszámú lineáris egyenletrendszer megoldásával - számíthatók.

A rezgésegyenlet megoldása a sajátvektorok ismeretében

A $\left(\underline{\underline{K}}-\omega_0^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{v}=\underline{0}$ egyenlet felírható $\underline{\underline{K}}\,\underline{v}=\omega_0^2\underline{\underline{M}}\,\underline{v}$ általánosított sajátérték-feladat alakjában is. Ezen feladatok megoldására megfelelő számítógépi programok állnak rendelkezésre, amelyek szolgáltatják az ω_{0r}^2 **sajátértékeket** és a hozzájuk tartozó $\underline{v}_r$ **sajátvektorok**at. Ezen sajátvektorok a továbbiakban jól hasznosítható sajátosságokkal rendelkeznek. Igazolható, hogy a sajátvektorok a tömegmátrixra és a merevségi mátrixra ortogonálisak

$$\underline{v}_r^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_s=0\,,\qquad \underline{v}_r^T\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_s=0\,.$$

Normáljuk a különböző sajátvektorokat úgy, hogy a $\underline{v}_r^T\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_r$ szorzat értéke egységnyi legyen. Ez esetben $\underline{v}_r^T\underline{\underline{K}}\,\underline{v}_r=\omega_{0r}^2$. Egy $\underline{\underline{V}}$ mátrixba foglalva az összes sajátvektort (a mátrix r-edik oszlopa $\underline{v}_r$ és a $\underline{\underline{V}}^T$ mátrixba a sajátvektorok transzponáltjai kerülnek, így annak r-edik sora $\underline{v}_r^T$) az ortonormalitás miatt a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}$ szorzat egységmátrix lesz, míg a $\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}$ szorzat egy olyan diagonális mátrix lesz, amelynek elemei az ω_{0r}^2 sajátértékek. Azaz

$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}=\underline{\underline{E}}\;,\qquad \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}=\left\langle\omega_{01}^2\;\ldots\;\omega_{0r}^2\;\ldots\;\omega_{0n}^2\right\rangle\,.$$

Ha bevezetünk egy új ismeretlent az $\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggésnek megfelelően, behelyettesítjük ezt az $\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{0}$ mátrix-differenciálegyenletbe, és megszorozzuk az egyenletet balról $\underline{\underline{V}}^T$ mátrixszal:

$$\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\ddot{\underline{y}}(t)+\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)=\underline{0}\,.$$

A mátrix-differenciálegyenlet n számú független egyszabadságfokú rezgésnek megfelelő differenciálegyenletre esik szét.

$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1(t)\\ \ldots\\ \ddot{y}_r(t)\\ \ldots\\ \ddot{y}_n(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_{01}^2y_1(t)\\ \ldots\\ \omega_{0r}^2y_r(t)\\ \ldots\\ \omega_{0n}^2y_n(t)\end{bmatrix}=\underline{0}\,.$$

Az $\ddot{y}_r(t)+\omega_{0r}^2y_r(t)=0$ egyszabadságfokú rendszer megoldása a korábbi ismeretek alapján:

$$y_r(t)=y_{0r}\cos\omega_{0r}t+\frac{\dot{y}_{0r}}{\omega_{0r}}\sin\omega_{0r}t\,.$$

A megoldáshoz tehát szükségünk van az y_{0r} és $\dot{y}_{0r}$ kezdeti feltételekre. Az $\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggés ismeretében

$$\underline{y}(t)=\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{x}(t)\,,$$

és így

$$\underline{y}_0=\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{x}_0\ \text{ ill. }\ \dot{\underline{y}}_0=\underline{\underline{V}}^{-1}\dot{\underline{x}}_0\,.$$

Ezek szerint az y_{0r} és $\dot{y}_{0r}$ kezdeti feltételek számításához szükség van a $\underline{\underline{V}}^{-1}$ mátrixra, amely $\underline{\underline{V}}^{-1}=\underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{M}}$ alakban írható fel, vagyis nincs szükség a $\underline{\underline{V}}$ mátrix invertálására.

Az $\underline{y}_{0\mathrm{r}}$ ill. $\dot{\underline{y}}_{0\mathrm{r}}$ vektorok elemei tehát oly módon kaphatók, hogy a $\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}$ mátrix r-edik sorát szorozzuk az $\underline{x}_0$ ill. $\dot{\underline{x}}_0$ vektorokkal:

$$y_{0\mathrm{r}} = \underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 \ \text{ ill. } \ \dot{y}_{0\mathrm{r}} = \underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{x}}_0 .$$

Így:

$$y_{\mathrm{r}}(t) = \underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0 \cos\omega_{0\mathrm{r}}t + \frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{x}}_0 \sin\omega_{0\mathrm{r}}t .$$

Az $\underline{x}(t) = \underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggésnek megfelelően az $\underline{x}(t)$ vektort úgy kapjuk meg, hogy a $\underline{\underline{V}}$ mátrix oszlopait - amelyek a $\underline{v}_{\mathrm{r}}$ sajátvektorok - szorozzuk az $y_{\mathrm{r}}(t)$ függvényekkel és összegezzük őket:

$$\underline{x}(t) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} \underline{v}_{\mathrm{r}}\,\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\left(\underline{x}_0 \cos\omega_{0\mathrm{r}}t + \frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}}\dot{\underline{x}}_0 \sin\omega_{0\mathrm{r}}t\right) \quad \text{vagy:} \quad \underline{x}(t) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} \underline{v}_{\mathrm{r}}\left(z_{\mathrm{r}} \cos\omega_{0\mathrm{r}}t + \hat{z}_{\mathrm{r}} \sin\omega_{0\mathrm{r}}t\right)$$

ahol $z_{\mathrm{r}} = \underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_0$ ill. $\hat{z}_{\mathrm{r}} = \dfrac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\dot{\underline{x}}_0$. Látható, hogy az elmozdulásvektor minden időpillanatban a sajátvektorok lineáris kombinációjaként adódik.

Legyen például $\underline{x}_0 = \underline{v}_{\mathrm{s}}$ és $\dot{\underline{x}}_0 = 0$. Mint láttuk $\mathrm{r} \neq \mathrm{s}$ esetén $\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{v}_{\mathrm{s}} = 0$, így a megoldásban csak a $\underline{v}_{\mathrm{s}}$ vektor fog megjelenni és $\underline{x}(t) = \underline{v}_{\mathrm{s}} \cos\omega_{0\mathrm{s}}t$ lesz az elmozdulás. A rendszer tehát a sajátvektornak megfelelő amplitúdókkal rezeg. Ez indokolja, hogy a sajátvektorokat sajátrezgésalakoknak is nevezzük. A legkisebb sajátkörfrekvenciához tartozik az alap rezgésalak.

A fentiekben ismertetett eljárást, amely a sajátvektorok bázisában írja fel a rezgésegyenlet megoldását, **modálanalízisnek** nevezzük. (Az egyes rezgésalakokat szokás módusnak nevezni). Az eljárás előnye, hogy ad egy képletet, amelyből bármely időpontban számíthatók az elmozdulások. (Az elmozdulásokra levezetett összefüggés időszerinti deriválásával pedig olyan összefüggést kapunk, amelyekből a sebességek számíthatók.)

Az eljárás azonban igényli a sajátvektorok meghatározását, amely több tízezer szabadságfokú rendszereknél nem lehetséges. Ha nem tudjuk az összes sajátvektort számítani, akkor a részleges összegzés pontatlan eredményt ad. Amint majd látni fogjuk, a megoldásban az egyes sajátvektorok szerepe különböző, így lehetséges, hogy bizonyos számú sajátvektor számítása elegendő a mérnöki gyakorlat megkövetelte pontosság eléréséhez. A sajátvektorok szükséges számának meghatározása egy felelős mérnöki feladat, amellyel a későbbi tanulmányainkban fogunk találkozni.

A szerkezeti csillapítás hatása többszabadságfokú szabad rezgésnél

Abban ez esetben, ha a belső súrlódási tényező minden rugóelemnél azonos, a csillapítatlan esetre kapott megoldások egyszerűen kiegészíthetők a csillapítás figyelembevétele érdekében. Ennek elméleti és kísérleti hátterét most nem tudjuk tárgyalni, csupán az alkalmazandó eljárást ismertetjük. Ebben az esetben a γ csillapítási jellemző minden rezgésalaknál azonosra vehető fel. A sajátkörfrekvencia módosítása az

$$\omega_{0\mathrm{r}}^{*} = \omega_{0\mathrm{r}}\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

összefüggés alapján történik. Az egyes rezgésösszetevőknél az amplitúdó csökkenés az $e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_{0\mathrm{r}}^{*}t}$ szorzó alkalmazásával érhető el. Ezek alapján az elmozdulásvektor az alábbiak szerint alakul:

$$\underline{x}(t) = \sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}} e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_{0\mathrm{r}}^{*}t}\,\underline{v}_{\mathrm{r}}\,\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\left(\underline{x}_0 \cos\omega_{0\mathrm{r}}^{*}t + \frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^{*}}\left(\frac{\gamma}{2}\omega_{0\mathrm{r}}^{*}\underline{x}_0 + \dot{\underline{x}}_0\right)\sin\omega_{0\mathrm{r}}^{*}t\right).$$

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 157-165 oldalakon. Példák: 3.12, 3.13, 3.14