Többszabadságfokú rendszer harmonikus gerjesztése.

Az állandósult rezgés számítása harmonikus gerjesztésnél a rezgésegyenlet közvetlen megoldásával

Abban az esetben, ha a csillapítással nem kívánunk számolni, a rezgés mátrix-differenciálegyenlete egy - a $\sin \omega t$ szerint változó - harmonikus erővel való gerjesztésnél

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}\sin \omega t$$

alakú lesz.

Amint korábban az egyszabadságfokú rendszerek vizsgálatánál láttuk, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása alkotja a rezgés állandósult részét. Keressük a partikuláris megoldást

$$\underline{x}_g(t)=\underline{x}_{g_0}\sin \omega t$$

alakban. Behelyettesítve a mátrix-differenciálegyenletbe:

$$-\omega^2\underline{\underline{M}}\,\underline{x}_{g_0}\sin \omega t+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}_{g_0}\sin \omega t=\underline{q}\sin \omega t\ .$$

A kapott egyenlőség t minden értékénél fennáll, így, ezért $\sin \omega t$ -vel egyszerűsítve:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega^2\underline{\underline{M}}\right)\underline{x}_{g_0}=\underline{q}\ .$$

Feltéve, hogy az együttható-mátrix nem szinguláris (ami azt jelenti, hogy determinánsa nem zérus, azaz ω nem sajátkörfrekvencia) az amplitúdóvektor:

$$\underline{x}_{g_0}=\left(\underline{\underline{K}}-\omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}\underline{q}\quad .$$

Természetesen nincs szükség az inverz mátrix előállítására, az $\underline{x}_{g_0}$ vektor az egyenletrendszert megoldva számítható.

Az eljárás - amely kétségtelenül egyszerű - nem ad információt a gerjesztő frekvencia és a különböző sajátkörfrekvenciák viszonyáról, a rezonanciaveszélyről és nem képes figyelembe venni a mindig jelenlévő csillapító hatásokat.

A kétszabadságfokú rendszer ez esetben egyszerűen tárgyalható. Ekkor:

$$\begin{bmatrix} x_{g_{0,1}} \\ x_{g_{0,2}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11}-\omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}.$$

Az inverz mátrix:

$$\left(\underline{\underline{K}}-\omega^2\underline{\underline{M}}\right)^{-1}=\frac{1}{f\left(\omega^2\right)}\begin{bmatrix} k_{22}-\omega^2 m_2 & -k_{12} \\ -k_{21} & k_{11}-\omega^2 m_1 \end{bmatrix}.$$

ahol
$$f\left(\omega^2\right)=\left(k_{11}-\omega^2 m_1\right)\left(k_{22}-\omega^2 m_2\right)-k_{12}^2.$$

A rezgésegyenlet megoldása a sajátvektorok ismeretében

Az ortonormált sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek ismeretében vizsgáljuk ismét az

$$\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}\sin \omega t$$

mátrix-differenciálegyenletet. Ha bevezetünk egy új ismeretlent az

$$\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$$

összefüggésnek megfelelően és ezt behelyettesítjük a mátrix-differenciálegyenletbe, majd megszorozzuk az egyenletet balról $\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}$ mátrixszal, akkor az alábbiakat kapjuk:

$$\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\ddot{\underline{y}}(t)+\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)=\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{q}\sin\omega t=\underline{f}\sin\omega t\ .$$

A kapott egyenlet struktúrája az alábbi lesz:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & 0\\ & \cdots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdots & \\ 0 & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t)\\ \cdots\\ \ddot{y}_{\mathrm{r}}(t)\\ \cdots\\ \ddot{y}_{\mathrm{n}}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \omega_{01}^2 & & & & 0\\ & \cdots & & & \\ & & \omega_{0\mathrm{r}}^2 & & \\ & & & \cdots & \\ 0 & & & & \omega_{0\mathrm{n}}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(t)\\ \cdots\\ y_{\mathrm{r}}(t)\\ \cdots\\ y_{\mathrm{n}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1\\ ..\\ f_{\mathrm{r}}\\ ..\\ f_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}\sin\omega t\ .$$

Itt az f_{r} a $\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}$ mátrix r-edik sorának (azaz az r-edik sajátvektor transzponáltjának) és a q vektornak a skaláris szorzata $f_{\mathrm{r}}=\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\cdot\underline{q}$ lesz. Elvégezve a vektorokkal való szorzásokat:

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1(t)\\ \cdots\\ \ddot{y}_{\mathrm{r}}(t)\\ \cdots\\ \ddot{y}_{\mathrm{n}}(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \omega_{01}^2 y_1(t)\\ \cdots\\ \omega_{0\mathrm{r}}^2 y_{\mathrm{r}}(t)\\ \cdots\\ \omega_{0\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1\\ ..\\ f_{\mathrm{r}}\\ ..\\ f_{\mathrm{n}} \end{bmatrix}\sin\omega t\ .$$

Vagyis a mátrix-differenciálegyenlet most is N számú független - egyszabadságfokú rezgésnek megfelelő - differenciálegyenletre esik szét, ahol az r-edik egyenlet:

$$\ddot{y}_{\mathrm{r}}(t)+\omega_{0\mathrm{r}}^2 y_{\mathrm{r}}(t)=f_{\mathrm{r}}\sin\omega t\ .$$

Az egyszabadságfokú rendszer inhomogén differenciálegyenletének partikuláris megoldását

$$y_{\mathrm{gr}}(t)=y_{\mathrm{gr}}\sin\omega t$$

alakban keresve:

$$-\omega^2 y_{\mathrm{gr}}\sin\omega t+\omega_{0\mathrm{r}}^2 y_{\mathrm{gr}}\sin\omega t=f_r\sin\omega t\ ,$$

$$y_{\mathrm{gr}}=\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^2-\omega^2}f_r\ ,$$

$$y_{\mathrm{gr}}(t)=\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^2-\omega^2}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\cdot\underline{q}\sin\omega t=\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0\mathrm{r}}^2}}\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^2}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\cdot\underline{q}\sin\omega t\ .$$

Az $\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggés ismeretében az $\underline{x}_{\mathrm{g}}(t)$ vektort úgy kapjuk meg, hogy a $\underline{\underline{V}}$ mátrix oszlopait - amelyek a $\underline{v}_{\mathrm{r}}$ sajátvektorok - szorozzuk az $y_{\mathrm{gr}}(t)$ függvényekkel és összegezzük őket:

$$\underline{x}_{\mathrm{g}}(t)=\sum_{\mathrm{r=1}}^{\mathrm{n}}\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_{0\mathrm{r}}^2}}\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^2}\underline{v}_{\mathrm{r}}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{q}\sin\omega t\ .$$

Az eredményből látszik, hogy minden sajátkörfekvenciához tartozik egy

$$\mu_r = \frac{1}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right|}$$

rezonanciatényező. Ennek nagysága a gerjesztő frekvencia és az adott sajátkörfrekvencia arányától függ. Ugyancsak minden sajátvektor szorzódik az $\frac{1}{\omega_{0r}^2}$ tényezővel. Ez a tényező annál kisebb, minél nagyobb az adott sajátkörfrekvencia. Végül minden sajátvektor szorzódik a $\underline{v}_r^T \underline{q}$ tényezővel, vagyis az egyes sajátvektoroknak a megoldásban lévő hatását a sajátvektor és a tehervektor skalárszorzata is befolyásolja. Ha a két vektor egymásra merőleges (például az egyik szimmetrikus a másik ferdén szimmetrikus) ez a tényező zérus is lehet.

Ha a gerjesztő frekvencia bármelyik sajátkörfrekvenciával egybeesik végtelen nagy amplitúdót kapunk. A valóságban a mindig meglévő szerkezeti csillapítás miatt erről nem lehet szó. A szerkezeti csillapítás hatására a rezonanciatényezők módosulnak:

$$\mu_r = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}} \ .$$

Miután a $\mu_{r,\max} = \frac{1}{\gamma}$ a rezonanciatényező maximális értéke, az amplitúdók rezonancia esetén sem végtelen nagyok. Mivel az $\frac{1}{\omega_{0r}^2}$ tényező a magasabb sajátkörfrekvenciáknál egyre kisebb, érthető az a mérnöki gyakorlat, amely csak korlátozott számú sajátvektort von be a megoldásba. Korábban láttuk, hogy csillapított rezgésnél a gerjesztő erőhöz képest fáziseltolódás van. Az adott r-edik rezgésalaknál a fáziseltolódás:

$$\varphi_r = \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma \frac{\omega}{\omega_{0r}}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)} \ .$$

Az állandósult rezgésrész pedig:

$$\underline{x}_g(t) = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}} \frac{1}{\omega_{0r}^2} \underline{v}_r \underline{v}_r^T \underline{q} \sin(\omega t - \varphi_r) \ .$$

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 173-176oldalakon. Példa: 3.15