Többszabadságfokú rendszer támaszrezgése, földrengésszámítás.

Gerjesztés az időtől tetszőlegesen függő erővel

Feladatunk az $\underline{\underline{M}}\,\underline{\ddot{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=\underline{q}(t)$ mátrix-differenciálegyenlet megoldása. Most a tehervektor minden eleme az idő tetszőleges függvénye. Korlátozzuk a megoldást a zérus kezdeti feltételek esetére, amikor a rendszer az erőhatás kezdetekor nyugalomban volt.

Az ortonormált sajátvektorok és a hozzájuk tartozó sajátértékek ismeretében az $\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggés behelyettesítésével, az egyenletnek $\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}$ mátrixszal balról való szorzása után az alábbiakat kapjuk:

$$\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{M}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{\ddot{y}}(t)+\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{K}}\,\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)=\underline{\underline{V}}^{\mathrm{T}}\underline{q}(t)=\underline{f}(t).$$

A mátrix-differenciálegyenlet most is N számú független - egyszabadságfokú rezgésnek megfelelő - differenciálegyenletre esik szét, ahol az r-edik egyenlet:

$$\begin{bmatrix}\ddot{y}_1(t)\\ \dots\\ \ddot{y}_{\mathrm{r}}(t)\\ \dots\\ \ddot{y}_{\mathrm{n}}(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\omega_{01}^2 y_1(t)\\ \dots\\ \omega_{0\mathrm{r}}^2 y_{\mathrm{r}}(t)\\ \dots\\ \omega_{0\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_1(t)\\ \ldots\\ f_{\mathrm{r}}(t)\\ \ldots\\ f_{\mathrm{n}}(t)\end{bmatrix}.$$

Az $\ddot{y}_{\mathrm{r}}(t)+\omega_{0\mathrm{r}}^2 y_{\mathrm{r}}(t)=f_{\mathrm{r}}(t)$ egyszabadságfokú rendszer inhomogén differenciálegyenlete zérus kezdeti feltételeknek megfelelő partikuláris megoldása:

$$y_{\mathrm{r}}(t)=\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}}\int_0^t f_{\mathrm{r}}(\tau)\sin\omega_{0\mathrm{r}}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

Az $\underline{x}(t)=\underline{\underline{V}}\,\underline{y}(t)$ összefüggés ismeretében az $\underline{x}(t)$ vektort úgy kapjuk meg, hogy a $\underline{\underline{V}}$ mátrix oszlopait - amelyek a $\underline{v}_{\mathrm{r}}$ sajátvektorok - szorozzuk az $y_{\mathrm{r}}(t)$ függvényekkel és összegezzük őket. Az $\underline{x}(t)$ vektor az $f_{\mathrm{r}}(t)=\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\underline{q}(t)$ visszahelyettesítése után:

$$\underline{x}(t)=\sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}}\underline{v}_{\mathrm{r}}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\int_0^t \underline{q}(\tau)\sin\omega_{0\mathrm{r}}(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ .$$

A szerkezeti csillapítás esetén az alábbiakat kapjuk:

$$\underline{x}(t)=\sum_{\mathrm{r}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\omega_{0\mathrm{r}}^*}\underline{v}_{\mathrm{r}}\underline{v}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{T}}\int_0^t \underline{q}(\tau)e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_{0\mathrm{r}}^*(t-\tau)}\sin\omega_{0\mathrm{r}}^*(t-\tau)\mathrm{d}\tau\ .$$

Támaszrezgés

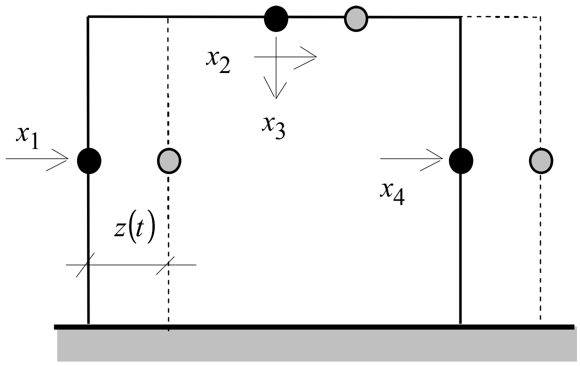
Támaszrezgések a mérnöki gyakorlatban igen gyakoriak. Ilyen rezgéseket okoznak az építmények támaszainál a közelben mozgó járművek, a nem távol működő üzemek gépi berendezései, és a földrengés is. De támaszrezgéssel kell számolni egy építményen belül elhelyezett berendezésnél is, ahova a rezgések az építmény közvetítésével jutnak el.

A támaszrezgések okozhatnak szilárdsági problémákat (pl. az erős földrengések), de lehet hogy - miközben szilársági problémák nincsenek - a keletkező rezgéssebességek az adott építményben levő berendezések üzemeltetését akadályozzák, vagy az ott tartózkodó személyeket zavarják.

Mi a továbbiakban az ún. szinkronizált rezgésekkel foglalkozunk, amikor is a vizsgált objektum minden támaszpontján egy adott időpontban azonos a kitérés. Ez a helyzet pl. nem túl nagy méretű építmények esetén a földrengés keltette hullámterjedés esetén.

Nézzük az ábrán lévő súlytalannak tekintett rudakból álló szerkezetet, amelyen több tömegpont van. Feltételezve, hogy a rudak tengelyirányú összenyomódása zérus, bejelöltük az egyes tömegpontok lehetséges elmozdulási irányait.

Az ábrán tehát többszabadságfokú rezgő rendszert látunk. Ha a szerkezet alapozása vízszintes irányban $z(t)$ mértékben elmozdul az egyes pontoknál a rugalmas elmozdulások vízszintes komponenséhez hozzáadódik a $z(t$ érték. Ha a támaszmozgások okozta összetevőket egy vektorba foglaljuk, az alábbiakat kapjuk:



$$\underline{z}(t)=\begin{bmatrix} z(t) \\ z(t) \\ 0 \\ z(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} z(t)$$

A $z(t)$ előtt álló vektort mutató vektornak nevezzük. Ez a vektor jelöli ki - azzal, hogy az adott helyre 1 kerül - azokat az elmozdulásvektor-elemeket, amelyek a támaszmozgásnak megfelelő irányúak. A rendszer teljes elmozdulásait tartalmazó $\underline{y}(t)$ vektor most két részből áll:

$$\underline{y}(t)=\underline{x}(t)+\underline{z}(t).$$

Itt $\underline{x}(t)$ a rugalmas elmozdulásoknak, $\underline{z}(t)$ pedig a támaszmozgásnak megfelelő vektor. A többszabadságfokú rendszer mátrix-differenciálegyenlete ezek után

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{y}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{y}(t)=\underline{0},$$

$$\underline{\underline{M}}\left(\ddot{\underline{x}}(t)+\ddot{\underline{z}}(t)\right)+\underline{\underline{K}}\left(\underline{x}(t)+\underline{z}(t)\right)=\underline{0},$$

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{z}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{z}(t)=\underline{0}.$$

Figyelembe véve, hogy rugalmas visszatérítő erők csak a relatív elmozdulásokból keletkeznek:

$$\underline{\underline{K}}\,\underline{z}(t)=\underline{0}.$$

Így a támaszrezgés mátrix-differenciálegyenlete:

$$\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{x}}(t)+\underline{\underline{K}}\,\underline{x}(t)=-\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{z}}(t).$$

A támaszmozgás tehát többszabadságfokú rendszer esetén is gerjesztett rezgésként kezelhető, ahol a gerjesztő erő vektora:

$$-\underline{\underline{M}}\,\ddot{\underline{z}}(t)=-\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ddot{z}(t)=-\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \\ m_3 \end{bmatrix}\ddot{z}(t)=-\underline{m}_z\,\ddot{z}(t).$$

Ezek után egy adott $z(t)$ esetén a többszabadságfokú gerjesztett rezgésre vonatkozó összefüggések alkalmazhatók. Például $z(t)=z\sin\omega t$ harmonikus támaszmozgásnál:

$$\ddot{z}(t)=-\omega^2 z\sin\omega t,$$

$$\underline{q}(t)=\underline{m}_z\omega^2 z\sin\omega t.$$

Az állandósult rezgés pedig:

$$\underline{x}_g(t)=\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_{0r}^2}}\frac{1}{\omega_{0r}^2}\underline{v}_r\underline{v}_r^T\underline{m}_z\omega^2 z\sin\omega t\ .$$

Általános esetben a $z(t)$ az idő tetszőleges függvénye és - zérus kezdeti feltételek esetén - az elmozdulások:

$$\underline{x}(t) = -\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\omega_{0r}^{*}} \underline{v}_r \underline{v}_r^{T} \underline{m}_z \int_0^t \ddot{z}(\tau) e^{-\frac{\gamma}{2}\omega_{0r}^{*}(t-\tau)} \sin \omega_{0r}^{*}(t-\tau) d\tau \ .$$

Látható, hogy az integráljel alatti kifejezés egy skalár, amely függ a γ csillapítási jellemzőtől, az idő függvényeként adódik, és sajátvektoronként az ω_{0r} eltérő volta miatt különböző lesz. Ha az integrál-kifejezés $-\frac{1}{\omega_{0r}^{*}}$ tényezővel szorzott alakját $S(\gamma, \omega_{0r}, t)$ -vel jelöljük:

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^{n} \underline{v}_r \underline{v}_r^{T} \underline{m}_z S(\gamma, \omega_{0r}, t) \ .$$

$$\underline{x}(t) = \sum_{r=1}^{n} \underline{w}_r(t) \ .$$

Itt $\underline{w}_r(t)$ az egyes rezgésalakokhoz tartozó összetevő. A kapott összefüggést használhatjuk szerkezetek földrengésre való számításánál is. Gondot okoz azonban, hogy egy leendő földrengésnél nem tudjuk, milyen lesz a $z(t)$ függvény. A mérnöki gyakorlat azt az utat követi, hogy a korábbi földrengések adatait feldolgozva előírásokban megadja az $S(\gamma, \omega_{0r}, t)$ időbeni maximumát a γ és ω_{0r} függvényében. Ezt az $S_d(\gamma, \omega_{0r})$ függvényt a földrengés **elmozdulás-válaszspektrum** függvényének nevezik. Ennek segítségével az egyes $\underline{w}_r(t)$ összetevők maximumait tudjuk számítani:

$$\underline{w}_r^{max} = \underline{v}_r \underline{v}_r^{T} \underline{m}_z S_d(\gamma, \omega_{0r})$$

Az összegzésnél azonban probléma, hogy az egyes rezgésalakoknál lévő szorzótényezők más-más időpontokhoz tartoznak. A szerkezet elmozdulásvektora tehát nem számítható. Ha azonban az egyes összetevők elemeit abszolút értékükkel összegezzük, kaphatunk egy maximális elmozdulási ábrát. Az $\underline{x}^{max}$ vektor i-edik eleme:

$$x_i^{max} = \sum_{r=1}^{n} \left| w_{r,i}^{max} \right| \ .$$

Ha a szerkezet egyes pontjainál lévő maximális sebességeket, vagy gyorsulásokat akarjuk számítani hasonlóan járhatunk el, az $S_v(\gamma, \omega_{0r})$ **sebesség-válaszspektrumot**, ill. az $S_a(\gamma, \omega_{0r})$ a **gyorsulás-válaszspektrum**ot alkalmazva.
A három válaszspektrum között a kis csillapítás miatt jó közelítéssel felírható, hogy

$$S_a(\gamma, \omega_{0r}) = \omega_{0r} S_v(\gamma, \omega_{0r}) = \omega_{0r}^2 S_d(\gamma, \omega_{0r}) \ .$$

Vagyis nincs szükség mindhárom válaszspektrum megadására. Egyik ismeretében a másik kettő számítható.

Az egyes sajátvektorokhoz tartozó maximális gyorsulások ismeretében a tömegmátrix és a gyorsulásvektor-összetevő szorzataként számítható az adott rezgésalakhoz tartozó maximális tehetetlenségi erővektor, amelyből számíthatók az adott rezgésalakhoz tartozó maximális igénybevételek. Az egyes sajátvektorokhoz tartozó maximális értékeinek összegzése adja meg a maximális igénybevételi ábrákat. Mivel az egyes sajátvektorokhoz tartozó igénybevételek nem ugyanahhoz az időponthoz tartoznak, a ténylegesnél nagyobb értékeket kapunk az összegzett maximumra, ami gazdaságtalan méretezéshez vezethet.

Későbbi tanulmányaink során látni fogjuk, hogy a különböző szabályzatok olyan összegzéseket engednek meg, amelyekkel a túlzott igénybevételek csökkenthetők. Ugyancsak látni fogjuk, hogy mód lesz a szabályzatokban megadott válaszspektrumoknak megfelelő mesterséges támaszrezgések generálására, így egyidejű igénybevételek számítására.

Elméleti összefoglaló a tankönyvben a 180-183 oldalakon. Példa: 3.16