



EURÓPAI UNIÓ
STRUKTURÁLIS ALAPOK



M
E
C
H
A
N
I
K
A

III.

D
i
n
a
m
i
k
a

PMSTNB 113 segédlet a PTE PMMK építőmérnök hallgatói részére

„Az építés- és az építőmérnök képzés szerkezeti és tartalmi fejlesztése”

HEFOP/2004/3.3.1/0001.01

MECHANIKA III. Dinamika

DR. MESKÓ ANDRÁS

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar,
Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék
<mesb@minicomp.hu>

2007

Bevezetés

Az építőmérnöki képzésben a mechanika az erők és mozgások vizsgálatával foglalkozik. A kinetika az erők és az általuk létrehozott mozgások közti összefüggéseket vizsgálja. A statika a testekre ható erőkkel foglalkozik, nem vizsgálja a mozgásokat. A statika és kinetika közös neve a dinamika.

Az Építőmérnök Hallgatók a Dinamika tantárgyat a Mechanika III. fejezetben tanulják. A tantárgy eredményes elsajátításának előfeltétele, hogy a Statika és a Szilárdságtan összefüggéseit ismerjék és képesek legyenek azokat alkalmazni.

A Dinamika tantárgyat Dr. Györgyi József "Dinamika" című könyve (Műegyetemi Kiadó 2003) alapján tárgyaljuk. A tananyagot a könyv részletesen tárgyalja.

A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Építőmérnöki Kar Szerkezetek Mechanikája Tanszékén elkészítették a tantárgy 14 részből álló, részenként 3-3 oldalas rövid kivonatát. A pdf formátumú kivonat a Mechanika Tanszék honlapján megtalálható, a könnyebb hozzáférés miatt a Pécsi Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Kar Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszéke honlapján is elérhető.

Ezt a tantárgyi kivonatot érdemes alaposan áttanulmányozni és a tanultakat példák megoldásával célszerű rögzíteni.

A módszeres tanulást ütemezetten célszerű végezni, hiszen a vizsgára a teljes tananyagot nem lehet egyszerre megtanulni.

A Dinamika tantárgy sokszor használja a Mechanika I és II fogalmait és tételeit, akinek az előtanulmányai hiányosak, célszerűen ismételje át, frissítse fel a Mechanika szükséges tételeit.

A Tanulási Segédlet használatára a következőt javasoljuk:

- a tematikában keressék meg az adott hétre vonatkozó anyagot, témát
- a mellékelt 14 hetes bontású rövid kivonat segítségével megismerjük és megtanuljuk az előírt tananyagot
- a rövid kivonatban és a jelen Tanulási Segédletben található példák elemzésével és tanulmányozásával begyakoroljuk az anyagot
- az ellenőrző kérdések segítségével és alapján az anyag elméleti részét is elsajátítjuk.

A Tanulási Segédletben szereplő oldalszámok Dr. Györgyi József "Dinamika" című könyve (Műegyetemi Kiadó 2003) oldalszámait jelentik.

Részletes tantárgyprogram:		
Hét	Ea/Gyak./Lab.	Témakör
1.	2/1/0 Ea Gy #	A tantárgy elhelyezkedése a mechanika tudományán belül, témacsoportok. Anyagi pont kinematikája.
2.	2/1/0 Ea Gy +	A dinamika alaptörvénye. Dinamikai feladatok megoldása egyenes vonalú és íves pályán való mozgás esetén.
3.	2/1/0 Ea Gy #	A mozgásmennyiség, a mozgási energia változásának tételei, perdülettétel. Kis lejtőn való mozgás, vontatási feladatok.
4.	2/1/0 Ea Gy +	Merev testek síkmozgása. Síkmozgást végző merev testek kinetikája.
5.	2/1/0 Ea Gy #	1. ZH. Anyagi pont kinematikája, kinetikája. A_merev test kinematikája, kinetikája.
6.	2/1/0 Ea Gy +	Haladó mozgást végző testek ütközése.
7.	2/1/0 Ea Gy #	Haladó mozgást végző test ütközése rugalmasan megtámasztott testtel.
8.	2/1/0 Ea Gy +	Leeső test dinamikai hatása.
9.	2/1/0 Ea Gy #	Rezgések általános ismertetése. Csillapítatlan szabad rezgés, példák. Egyszabadságfokú rendszerek szabad rezgése.
10.	2/1/0 Ea Gy +	Egyszabadságfokú rendszerek harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgése.
11.	2/1/0 Ea Gy #	Csillapított szabad rezgés. Egyszabadságfokú rendszerek harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgése.
12.	2/1/0 Ea Gy +	2. ZH. Egyszabadságfokú rendszerek rezgése, ütközések
13.	2/1/0 Ea Gy #	Egyszabadságfokú rendszerek tetszőleges erővel és támaszmozgással gerjesztett rezgései. Többszabadságfokú rendszer szabad rezgései.
14.	2/1/0 Ea Gy + #	Többszabadságfokú rendszer gépek okozta harmonikus gerjesztése. Többszabadságfokú rendszer támaszrezgése, földrengés számítás.

1. hét

A tantárgy elhelyezkedése a mechanika tudományán belül, témacsoportok. Anyagi pont kinematikájá.

Ezen a héten megismerjük a dinamikának a tudományon belüli elhelyezkedésével.

Az általunk megismert és megtanult dinamika a Mechanika tudományán belül a Műszaki mechanika fejezetében az Építési mechanika részterületéhez tartozik.

Fontossága az utóbbi néhány évtizedben megnőtt. Ennek több oka is van. Legfontosabb az, hogy a statikai, szilárdságtani és stabilitási ismeretek gyarapodása, a nagy szilárdságú új anyagok alkalmazása és a gépesített tartószerkezet számítás lehetővé tette a korábbiaknál karcsúbb és kisebb anyagigényű szerkezetek építését. Ezek kisebb merevségűek és tömegűek, ezért a dinamikus hatásokra különösen érzékenyek (széllökés, földrengés, kiegyensúlyozatlan tömegeket mozgató gépek, nagy terhelésű és sebességű közúti járművek, ...).

A dinamikai vizsgálatok jellemzői:

- az erők időbeli változása jelentős
- a tömegek, a tömegeerők hatása nem hanyagolható el
- a vizsgált szerkezet, szerkezeti elem nincs egyensúlyban, mozog.

A dinamikus hatás fogalma:

- ha a testet érő erőhatás időben változik, vagy csupán elegendően rövid ideig működik, akkor az erőhatást dinamikusnak nevezzük.
- ha a testet érő mozgáshatás kielégíti az előbbi feltételek valamelyikét, akkor dinamikus mozgáshatásnak nevezzük.
- az időbeni lejátszódás matematikai függvénnyel jellemezhető.
- a gyakorlat szempontjából szóba jöhető függvények köre erősen leszűkíthető.

A tananyag a könyv 7. - 14. , 19. - 22. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 1.1 - 1.8 példák, a rövid kivonat pedig az 1. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. részében

Ellenőrző kérdések

1. Hol helyezkedik el a Dinamika tantárgy a mechanika tudományán belül?
2. Mi indokolja a Dinamika fontosságát?
3. A dinamikai vizsgálatok jellemzői?
4. A dinamikus hatás fogalma?
5. Mondjon példát dinamikus hatásokra, soroljon fel dinamikus hatást okozó jelenségeket?
6. Anyagi pont általános térbeli pályán való mozgásának összefüggései.
7. Anyagi pont helyzete, sebessége, sebességváltozása.
8. Hogyan határozzuk meg az ismert pályán mozgó az anyagi pont sebességét és gyorsulását?
9. A mozgás függvényei egyenes vonalú mozgás esetén.
10. A mozgás függvényei körpálya esetén.
11. A mozgás függvényei harmonikus rezgő mozgás esetén.
12. Hasonlítsa össze az egyenes vonalú (haladó) mozgást és a körmozgást (forgást).
13. Út, sebesség, gyorsulás értelmezése anyagi pont egyenes vonalú pályán, körpályán való mozgása és harmonikus rezgő mozgása esetén.

2. hét

A dinamika alaptörvénye. Dinamikai feladatok megoldása egyenes vonalú és íves pályán való mozgás esetén.

A dinamika alaptörvénye Newton II. axiómáján alapul: "Az anyagi pont mozgásának a változása a mozgató erő hatásával arányos és ugyanannak az egyenes vonalnak az irányába esik, amelyben az erő működik".

A téma tárgyalása során használjuk a hosszúság, az idő és a tömeg fogalmát.

Vizsgálatainkat először az anyagi pontra korlátozzuk, később az anyagi pontrendszer és a merev test mozgásaira is kiterjesztjük.

A feladatok megoldása során a következő kérdéseket érdemes feltennünk:

- Mi mozgat? (Milyen erők, hatások működnek?)
- Mit mozgat? (Milyen anyagi pontok, testek, szerkezeti elemekre fejtik ki a hatásukat?)
- Hogyan mozgat? (Milyen irányú, milyen geometriájú (egyenys vonalú, körpályán mozgó, teengely körül forgó,... mozgás jön létre, változik-e a sebesség, van-e gyorsulás, ... ?)

Megismerkedünk Newton további törvényeivel és a belőlük levezetett összefüggésekkel.

A dinamika két alapeladatának megismerését kidolgozott példák könnyítik meg.

A tananyag a könyv 39. - 43. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 2.1 - 2.7 példák, a rövid kivonat pedig a 2. és a 3. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. és 2. részében

Ellenőrző kérdések

1. Ismertesse Newton II. törvényét.
2. Sorolja fel Newton törvényeit.
3. Milyen jelenségek szerepelnek Newton törvényeiben?
4. Milyen fizikai mennyiségek szerepelnek Newton törvényiben?
5. Mitől függ az anyagi pontra működő erő mozgást változtató hatása?
6. Milyen mennyiségek között kapcsolatot írnl le Newton tötvényei?
7. Milyen példákat oldottunk meg Newton törvényeinek az alkalmazásával?
8. Ismertesse a dinamika alapeladatait.
9. Miről szól a D'Alembert elv?
10. Milyen erő-fajttát ismertünk meg a D'Alembert elv segítségével?
11. Milyen egyensúlyi helyzetet ismertünk meg a D'Alembert elv kapcsán?
12. Milyen dinamikai alapeladatokat oldottunk meg?

3. hét

A mozgásmennyiség, a mozgási energia változásának tételei, perdülettétel, az erő munkája. Kis lejtőn való mozgás, vontatási feladatok.

Az elmúlt héten megismerkedünk Newton axiómáival és a belőlük levezetett összefüggésekkel.

Közülük a mozgásmennyiség, más szóhasználattal a lendület, az impulzus megváltozását a tömegre ható erő adott időtartam szerinti összegzésével, integrálásával számítjuk ki, az összefüggést pedig az impulzustételnek nevezzük.

A mozgásmennyiség adott pontra vonatkozó nyomatékát perdületnek (kinetikai nyomatéknak) nevezzük. A perdülettétel szerint a fix pontra vonatkozó perdület idő szerinti differenciálhányadosa egyenlő az anyagi pontra ható erőknek ugyanarra a pontra számított nyomatékösszegével.

Az erő munkája segítségével értelmezzük a mozgási energiát, továbbá a teljesítményt.

A gyorsító erő munkájának a hatására a mozgó test sebessége és a mozgási energiája megnő, a lassító erő munkájának a hatására a mozgó test sebessége és a mozgási energiája csökken.

A teljesítmény a munkavégzés "sebessége", kiszámításának módja az F erő és a mozgás v sebességének szorzása.

A tananyag a könyv 50., 54. - 55., 57. - 59., 67. - 68. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 2.8 - 2.22 példák, a rövid kivonat pedig a 4. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. és 2. részében

Ellenőrző kérdések

1. Mi a mozgásmennyiség (impulzus, lendület)?
2. Ismertesse a mozgásmennyiség változásának tételét.
3. Mi az erő munkája? Hogyan határozzuk meg?
4. Mi a mozgási energia?
5. Ismertesse a mozgási energia megváltozásának a tételét.
6. A mozgási energia megmaradásának törvénye anyagi pont esetén?
7. Mi a perdület?

4. hét

Merev testek síkmozgása. Síkmozgást végző merev testek kinetikája.

A merev test végtelenül sok anyagi pont együttese. A merev test egyes pontjainak egymástól való távolsága és egymáshoz képesti elhelyezkedése a test mozgása során nem változik, ezért a mozgás általános leírásakor jelentős egyszerűsítéseket tehetünk.

A merev test mozgásának különböző formái vannak (haladó mozgás, helytálló tengely körüli forgás, síkmozgás, adott pont körüli forgás, általános térbeli mozgás).

Megismerkedtünk a pillanatnyi forgáspont fogalmával. Ennek ismerete lényegesen egyszerűsíti a mechanikai - dinamikai összefüggéseket.

Meghatároztuk a merev test tömegközéppontját (súlypontját) és tehetetlenségi nyomatékait.

Ezek segítségével megismertük a merev testek kinetikájának alaptételeit, a súlyponttételt és a forgástengelyre vonatkozó perdülettételt, értelmeztük a mozgásmennyiség és a perdület megváltozásának a tételét, végül elsajátítottuk a mozgási energia és változásának síkmozgás esetére vonatkozó tételét.

A tananyag a könyv 27. - 31., 71. - 78. 86. - 87., 90. - 91. oldalán, a kidolgozott feladatok az 1.9 - 1.13, 2.23 - 2.34 példák, a rövid kivonatok pedig a 7. és a 8. számúak.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. és 2. részében

Ellenőrző kérdések

1. Mi a mozgásmennyiség (impulzus, lendület)?
2. Ismertesse a mozgásmennyiség változásának tételét.
3. Mi a mozgási energia.
4. Ismertesse a mozgási energia megváltozásának a tételét.
5. A mozgási energia megmaradásának törvénye merev test esetén?
6. Tehetetlenségi nyomaték, testek tehetetlenségi nyomatéka számítására vonatkozó összefüggések.
7. Mi a perdület?
8. Ismertesse a perdület megváltozásának a tételét merev test esetére.
9. Merev test mozgási energiájának számítására vonatkozó összefüggések.

5. hét

1. ZH. Anyagi pont kinematikája, kinetikája. Merev test kinematikája, kinetikája.

A dolgozatban számpéldák megoldásával igazoljuk a félév első részében elsajátított tananyagban való jártasságot.

Témakörök:

egyenes vonalú mozgás kinematikai és dinamikai adatainak a kiszámítása, összefüggéseinek tisztázása, az átlagsebesség meghatározása, út, sebesség, gyorsulás függvények ábrázolása

egyenes vonalú és körpályán való mozgás kinematikai és dinamikai adatainak a kiszámítása, összefüggéseinek tisztázása

anyagi pont mozgási és helyzeti energiájának meghatározása, az energia megmaradása tételének alkalmazása a körpályán való mozgás jellemzőinek a meghatározására, dinamikus túlterhelés kiszámítása

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. és 2. részében

6. hét

Haladó mozgást végző testek ütközése.

Az ütközés a mechanikai mozgások csoportjába tartozó olyan jelenség, amelynek során a mozgó test sebességvektorának egy adott pillanatnyi időtartamhoz véges nagyságú változása tartozik.

Az ütközés a mechanikai mozgásoknak abba a csoportjába tartozik, amelyek vizsgálata során a belső, relatív elmozdulásokat figyelembe kell venni, az alakváltozások elhanyagolása esetén a feladat nem oldható meg.

Az ütközésben a pillanatnyi időtartam alatt bekövetkező sebességváltozást igen nagy "ütközési" erők hozzák létre, az erők impulzusa azonban véges nagyságú.

Az ütközés alapvető formái:

- mozgó test ütközik álló testtel
- mozgó test ütközik mozgó testtel
- mozgó test ütközik mozogni képes rugalmasan megtámasztott testtel

Az ütközés geometriai formái:

- egyenes (merőleges) centrikus
- egyenes excentrikus
- ferde centrikus
- ferde excentrikus

Az ütköző testek alakváltozási jellemzői, a becsapódási és a visszapattanási sebesség alapján:

- rugalmas ütközés (az alakvisszanyerés tökéletes, a két sebesség megegyezik)
- rugalmatlan ütközés (az alakvisszanyerés nem tökéletes, a visszapattanási sebesség kisebb)
- képlékeny ütközés (az alakvisszanyerés tökéletlen, a két test együtt marad)

A tananyag a könyv 95. – 102. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 2.35 – 2.38 példák, a rövid kivonat pedig a 5. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 1. és 2. részében

Ellenőrző kérdések

1. Az ütközés fogalmának ismertetése.
2. Az ütközés során fellépő erők es működési időtartamuk nagysága.
3. Az ütközések geometriai jellemzése.
4. Az ütközések rugalmassági jellemzése. A visszapattanás jelensége.
5. Ismertesse a rugalmas, a rugalmatlan és a képlékeny ütközés fogalmát, jellemzőit.
6. Mozgó és álló testek ütközése.
7. Mozgó testek ütközése.
8. A képlékeny ütközés két alapvető célú alkalmazása.
9. A szögbeverés – cölöpverés, illetve a kovácsolás, alakítás feladatának ütközés szempontú jellemzése.
10. Az ütközés tényleges lejátékozása és a jelenség modellezése, a számítási alapfeltételezés.

7. hét

Haladó mozgást végző test ütközése rugalmasan megtámasztott testtel.

Ezt a feladatot két féle esetre vizsgáltuk meg. Ezen a héten a vízszintes rugóval megtámasztott testviselkedését, hatását elemeztük.

A gyakorlatban a rugalmas megtámasztás egy szerkezettel való megtámasztást jelent (vasúti ütközőbak, védőkorlát, ...).

A vizsgálathoz ismernünk kell az ütközés előtti sebességet, az ütközés fajtáját, rugalmassági viszonyait ahhoz, hogy a rugalmas megtámasztó szerkezet viselkedését (elmozdulás, igénybevétel) elemezhessük.

A vizsgálat során megismerkedtünk a redukált tömeg fogalmával.

A tananyag a könyv 105 - 108. oldalán található, a kidolgozott feladat a 2.39 példa, a rövid kivonat pedig a 6. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 3. részében

Ellenőrző kérdések

1. Az ütközés fogalmának ismertetése.
2. Az ütközés során fellépő erők es működési időtartamuk nagysága.
3. Az ütközések rugalmassági jellemzése. A visszapattanás jelensége.
4. Ismertesse a rugalmas, a rugalmatlan és a képlékeny ütközés fogalmát, jellemzőit.
5. Haladó mozgást végző test ütközésének hatása az elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testre (vízszintes mozgás esete).
6. A mozgási és a rugalmas alakváltozási energia kapcsolata az ütközés folyamatában.
7. Az ütközés tényleges lejátszódása és a jelenség modellezése, a számítási alapfeltételezés.

8. hét

Leeső test dinamikai hatása.

Ezt a feladatot két féle esetre vizsgáltuk meg.

A múlt héten a vízszintes rugóval megtámasztott test, ezen a héten pedig a leeső test hatását elemeztük.

A gyakorlatban a rugalmas megtámasztás egy szerkezettel való megtámasztást jelent (általában védőtető - háló, ...).

A vizsgálathoz ismernünk kell az ütközés előtti sebességet, az ütközés fajtáját, rugalmassági viszonyait ahhoz, hogy a rugalmas megtámasztó szerkezet viselkedését (elmozdulás, igénybevétel) elemezhessük.

A leeső test hatásának számításakor nem hagyható figyelmen kívül a súlyerő és a rugóerő.

A vizsgálat során megismerkedtünk a dinamikus hatással, a dinamikus tényező és a redukált tömeg fogalmával.

A tananyag a könyv 105. - 108. oldalán található, a kidolgozott feladat a 2.40 példa, a rövid kivonatok pedig a 6. és a 4. számúak.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 3. részében

Ellenőrző kérdések

1. Az ütközés fogalmának ismertetése.
2. Az ütközés során fellépő erők es működési időtartamuk nagysága.
3. Az ütközések rugalmassági jellemzése. A visszapattanás jelensége.
4. Ismertesse a rugalmas, a rugalmatlan és a képlékeny ütközés fogalmát, jellemzőit.
5. Haladó mozgást végző test ütközésének hatása az elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testre (függőleges mozgás esete).
6. A leeső test hatása az elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testre.
7. A leeső test hatása, a vele szembeni védekezés ismertetése.
8. Az ütközés tényleges lejátszódása és a jelenség modellezése, a számítási alapfeltételezés.
9. A mozgási és a rugalmas alakváltozási energia kapcsolata az ütközés folyamatában.

9. hét

Rezgések általános ismertetése. Csillapítatlan szabad rezgés, példák. Egyszabadságfokú rendszerek szabad rezgése.

Ezen a héten a rezgések, a rezgő mozgás fogalmával ismerkedtünk meg.

A rezgés az időben valamilyen szabály, összefüggés szerint ismétlődő mozgás, a mindennapi életben gyakran előforduló, megfigyelhető jelenség.

A súlytalan, k merevségű rugóra (rugóállandója = k N/m) fokozatosan felfüggesztett anyagi pont a rugót addig nyújtja, amíg a rugó $R = k \cdot e_s = G = m \cdot g$ nagyságú rugóerő ébred.

A nyugalmi (egyensúlyi) helyzetéből kimozdított és magára hagyott anyagi pontra a megváltozott hosszúságú rugóban ébredő (visszatérítő hatású) rugóerő és a mozgásállapot megváltozása (sebesség változás - gyorsulás) miatt keletkező D'Alembert - féle tehetetlenségi erő működik. Az anyagi pont az egyensúlyi helyzet körül rezgő mozgást végez. A rezgő mozgás adatai csak a rendszer saját adataitól függenek (sajátrezgés, sajátkörfrekvencia). (A környezet csillapító hatásától eltekintünk.)

A csillapítatlan rezgő mozgást a D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésen alapuló másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, homogén differenciálegyenlet írja le.

Ennek az egyenletnek a megoldását a harmonikus függvények között keressük.

(A jól kezelhető harmonikus függvények (sinus, cosinus) kielégítik a differenciálegyenletet és előnyösen alkalmazhatók a Fourier sorok elméletében és gyakorlatában.)

A differenciálegyenlet általános megoldásában szereplő integrálási állandók a kezdeti feltételek alapján meghatározhatók.

A tananyag a könyv 115. - 120. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 3.1 - 3.4 példák, a rövid kivonat pedig a 9. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 4. részében

Ellenőrző kérdések

1. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapítatlan rezgő mozgást.
2. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapítatlan rezgő rendszerre vonatkozó differenciálegyenletet.
3. Mi a harmonikus rezgő mozgás? Mondjon példát egyszabadságfokú rendszerre.
4. A harmonikus rezgő mozgás szemléletes származtatása.
5. Milyen differenciálegyenlettel írható le a harmonikus rezgő mozgás?
6. Mik a harmonikus rezgő mozgás kinematikai jellemzői?
7. Mi a harmonikus rezgő mozgás esetén a körfrekvencia?
8. Mi a harmonikus rezgő mozgás esetén a frekvencia?
9. Mi a harmonikus rezgő mozgás esetén a rezgésidő?
10. Hogyan számítjuk ki a rezgő rendszer energiáját?
11. Hogyan számítjuk ki az egy tömegű egyenes vonalú lengő rendszer körfrekvenciáját?
12. Mi a harmonikus rezgő mozgás dinamikai feltétele?

10. hét

Egyszabadságfokú rendszerek harmonikus erővel gerjesztett csillapítatlan rezgése.

Ha a rugóval kapcsolt, kezdetben nyugalomban lévő anyagi pontra egy $F(t)$ időtől függő erő működik, az anyagi pont idő-függő mozgásba jön. Az erő megszűnése után az anyagi pont a pillanatnyi mozgási adatok (kitérés, sebesség), mint kezdeti feltételek szerint szabadon rezeg tovább.

Az $F(t)$ kényszerítő, gerjesztő erő hatásának az elemzéséhez, vizsgálatához a 2. héten megismert "módszer" szerinti kérdéseket tesszük fel: "Mi, Mit, Hogyan mozgat?"

Az m tömegű anyagi pontra a D'Alembert - féle tehetetlenségi erő, a rugó visszatérítő ereje és az $F(t)$ gerjesztő erő működnek, a differenciálegyenlet az időben változó három erőnek a dinamikus egyensúlyát írja le.

A mindig jelenlévő energia-felemésztő hatások miatt a szabad rezgés elhal, a szerkezet a gerjesztő erő hatására a gerjesztés ritmusának, körfrekvenciájának megfelelő mozgásba jön.

A különböző típusú kényszerítő erők közül részletesen elemztük a harmonikus gerjesztő erő esetét.

A harmonikus gerjesztő erővel terhelt, csillapítatlan rezgő mozgást a D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésen alapuló differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, a működő erő miatt pedig inhomogén.

A létrejövő mozgás összefüggéseinek a vizsgálata alapján megállapítottuk, hogy a gerjesztő erő és a szerkezet ritmusának, körfrekvenciájának, rezgésszámának az egybeesése rezonanciához vezet, az elmozdulások, az igénybevételek a szerkezet számára elviselhetetlenül nagyok, a szerkezet tönkremegy.

A tananyag a könyv 131. - 133., 135. - 140. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 3.5 - 3.8 példák, a rövid kivonatok pedig a 10. és 11. számúak.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 4. részében

Ellenőrző kérdések

1. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapítatlan, harmonikus erővel gerjesztett rezgő mozgást.
2. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapítatlan, harmonikus erővel gerjesztett rezgő rendszerre vonatkozó differenciálegyenletet.
3. A gerjesztés létrejöttének mechanizmusa, kifejlődésének időbeni lejátszódása?
4. Hány féle gerjesztést ismerünk?
5. Mi az erőgerjesztés?
6. Mi az támaszgerjesztés (útgerjesztés)?
7. Mi a rezonancia?
8. Mi a rezonancia függvény?
9. A dinamikus tényező (a rezonancia tényező) ábrázolása a gerjesztő- és a sajátkörfrekvencia hányadosa függvényében, a levonható következtetések.

11. hét

Csillapított szabad rezgés.

Egyszabadságfokú rendszerek harmonikus erővel gerjesztett csillapított rezgése.

Az olyan rezgő mozgást, melynél a kitérés a rezgések során csökken, csillapított rezgő mozgásnak nevezik.

A jelenséget gyakran a sebességgel arányos csillapító erő okozza. Ilyen csillapított rezgő mozgást végez egy folyadékban - nem túl nagy sebességgel rezgő - test.

A rendszer az egymás utáni egyenlő időközökben mozgási energiájának mindig ugyanannyiad részét veszíti el, a megmaradó rész mértani sor szerint csökken, a közegellenállási erő miatti mozgási energia csökkenés az idő exponenciális függvénye.

A $C \cdot v$ fékező, csillapító erő hatásának az elemzéséhez, vizsgálatához a 2. héten megismert "módszer" szerinti kérdéseket tesszük fel: "Mi, Mit, Hogyan mozgat?"

Az m tömegű anyagi pontra a D'Alembert - féle tehetetlenségi erő, a rugó visszatérítő ereje és a $C \cdot v$ fékező, csillapító erő működnek, a differenciálegyenlet az időben változó három erőnek a dinamikus egyensúlyát írja le.

A csillapított rezgő mozgást a D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésen alapuló másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, homogén differenciálegyenlet írja le.

Ha a rugóval kapcsolt, csillapított, kezdetben nyugalomban lévő anyagi pontra egy $F(t)$ időtől függő erő is működik, az anyagi pont idő-függő mozgásba jön.

Az m tömegű anyagi pontra a D'Alembert - féle tehetetlenségi erő, a csillapító erő, a rugó visszatérítő ereje és az $F(t)$ gerjesztő erő működnek, a differenciálegyenlet az időben változó négy erőnek a dinamikus egyensúlyát írja le.

A harmonikus gerjesztő erő hatására létrejövő, csillapított rezgő mozgás D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésén alapuló differenciálegyenlete másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, a működő erő miatt inhomogén.

A különböző típusú kényszerítő erők közül részletesen elemztük a harmonikus gerjesztő erő esetét. A létrejövő mozgás összefüggéseinek a vizsgálata alapján megállapítottuk, hogy a gerjesztő erő és a szerkezet ritmusának, körfrekvenciájának, rezgésszámának az egybeesése rezonanciához vezet, az elmozdulások és az igénybevételek jelentős nagyságúak lehetnek, de a csillapítás jelenléte mérsékeli a gerjesztés hatását.

A tananyag a könyv 120. - 126., 133. - 134., 140. - 145. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 3.1 - 3.4, illetve a 3.5 - 3.8 példák, a rövid kivonatok pedig a 10. és a 11. számúak.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 4. részében

Ellenőrző kérdések

1. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapított rezgő mozgást.
2. Jellemezze az egyszabadságfokú, csillapított rezgő rendszerre vonatkozó differenciálegyenletet.
3. Mit jelent a sebességgel arányos csillapítás?
4. Mi a sebességgel arányos csillapítás csillapítási tényezője? Milyen csillapításokat ismer?
5. Milyen a sebességgel arányosan csillapított lengő rendszer modellje?
6. Milyen a sebességgel arányosan csillapított lengő rendszer differenciálegyenlete?
7. Mi a kritikus csillapítás?
8. Mitől függ a kritikus csillapítás?
9. Milyen lefolyású a csillapított lengés nagy csillapítás esetén?
10. Milyen lefolyású a csillapított lengés kis csillapítás esetén?
11. Mi a csillapított lengés lengésideje?
12. Mi a csillapított lengés körfrekvenciája?
13. Mi a csillapított lengés rezgésszáma?
14. Mi a logaritmikus dekrementum?
15. Mi a szerkezeti csillapítás? Mi az egyenértékű (ekvivalens) csillapítás?

12. hét

2. ZH. Egyszabadságfokú rendszerek rezgése, ütközések

A dolgozatban számpéldák megoldásával igazoljuk a félév középső részében elsajátított tananyagban való jártasságot.

Témakörök:

ütközési feladatok megoldása

mozgó test ütközése álló testtel, energia veszteség, a maradék energia felhasználása

mozgó test ütközése elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott álló testtel, a mozgási energia és a rugalmas alakváltozási energia átalakulása felhasználása az igénybevételek meghatározására

rezgéstani feladatok megoldása

harmonikus rezgő mozgás hiányzó adatainak ismert adatokból való meghatározása

harmonikus rezgő mozgás hiányzó adatainak ismert adatokból való meghatározása, adott kezdeti feltételeket kielégítő megoldásának bemutatása, az út, sebesség és gyorsulás függvényének meghatározása

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 3. és 4. részében

13. hét

Egyszabadságfokú rendszerek támaszmozgással gerjesztett rezgései.
Többszabadságfokú rendszer szabad rezgései.

Ha a rugóval kapcsolt, kezdetben nyugalomban lévő anyagi pont megtámasztó rugójának a környezethez kapcsolódó (támasz)pontja egy $z(t)$ időtől függő elmozdulást végez, az anyagi pont idő-függő mozgásba jön. A támasz-elmozdulás megszűnése után az anyagi pont a pillanatnyi mozgási adatok (kitérés, sebesség), mint kezdeti feltételek szerint szabadon rezeg tovább.

A $z(t)$ kényszerítő, gerjesztő támasz-elmozdulás hatásának az elemzéséhez, vizsgálatához a 2. héten megismert "módszer" szerinti kérdéseket tesszük fel: "Mi, Mit, Hogyan mozgat?"

Az m tömegű anyagi pontra a D'Alembert - féle tehetetlenségi erő, a rugó visszatérítő ereje és a $z(t)$ gerjesztő támasz-elmozdulás működnek, a differenciálegyenlet az időben változó három hatásnak a dinamikus egyensúlyát írja le.

A mindig jelenlévő energia-felemésztő hatások miatt a szabad rezgés elhal, a szerkezet a gerjesztő támasz-elmozdulás hatására a gerjesztés ritmusának, körfrekvenciájának megfelelő mozgásba jön.

A különböző típusú kényszerítő támasz-elmozdulások közül részletesen elemztük a harmonikus hatás esetét, $z(t) = z \cdot \sin(\omega \cdot t)$.

A szerkezetben a D'Alembert - féle tehetetlenségi erő a nyugalmi helyzethez képest létrejövő teljes $y(t)$ elmozdulásból származó gyorsulás hatására keletkezik.

A szerkezetben a rugalmas visszatérítő erő a támaszelmozduláshoz képest létrejövő elmozdulások $x(t)$, alakváltozások, rugalmas deformációk hatására keletkezik.

A két ismeretlen meghatározására a 2. egyenlet: $y(t) = z(t) + x(t)$.

A 2. egyenletből szükség esetén az egyensúlyi egyenletbe beírható, az $x(t)$ meghatározható.

A 2. egyenletből szükség esetén az $x(t) = y(t) - z(t)$ is kifejezhető, az egyensúlyi egyenletbe beírható, az $y(t)$ meghatározható.

A matematikai átalakítás eredményként a gerjesztő támaszelmozdulás hatása kényszerítő erőként jelenik meg az egyenlet jobboldalán.

A harmonikus gerjesztő támasz-elmozdulással terhelt, csillapítatlan rezgő mozgást a D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésen alapuló differenciálegyenlet másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, a működő hatás miatt pedig inhomogén.

Több tömegeből és kapcsoló rugókból álló rendszer esetén a dinamikus egyensúlyt kifejező egyenleteket tömegpontként írjuk fel "Mi, Mit, Hogyan mozgat?".

Az egyensúlyi egyenletek táblázatos elrendezése egy, a tömegpontok elmozdulási szabadságfokának megfelelő számú egyenletből álló mátrix-differenciálegyenlet rendszert ad eredményül.

Az n elmozdulási szabadságfokú rezgő rendszer dinamikus egyensúlyát az elmozdulási szabadságfoknak megfelelő számú, n darab egyenlet írja le.

Az i egyenletben egyenletben az i elmozdulásnak megfelelő tehetetlenségi erő és a hozzá kapcsolt rugókban ébredő visszatérítő erők szerepelnek.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldását a harmonikus elmozdulásfüggvények között keressük. (A jól kezelhető harmonikus függvények (sinus, cosinus) kielégítik a differenciálegyenleteket és előnyösen alkalmazhatók a bonyolult, különleges függvények közelítésére alkalmas Fourier sorok elméletében és gyakorlatában.)

Az n elmozdulási szabadságfokú rezgő rendszer n darab sajátkörfrekvenciával és n darab sajátrezgésalakkal rendelkezik. Beláttuk, hogy a sajátrezgésalak adatai vektorokba foglalhatók.

A tananyag a könyv 153., 157. - 165. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 3.9 - 3.11, a 3.12 - 3.14 példák, a rövid kivonatok pedig a 12. és a 13. számúak.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 4. és 5. részében

Ellenőrző kérdések

1. Mi az egy, a két és a három szabadságfokú lengő rendszer?
2. Ismertessen és ábrázoljon több szabadságfokú rezgő rendszereket.
2. Mikor beszélünk egyenes vonalú és mikor forgó lengésekről?
3. Mik az egyenes vonalú lengés kinematikai jellemzői?
4. Mi a lineáris erőtvény?
5. Mi a rugóállandó egyenes vonalú lengések esetén?
6. Hány sajátkörfrekvencia lehetséges több szabadságfokú rendszer esetén?
7. Mi a Dunkerley módszer lényege?
8. Mi a lengéskép?

14. hét

Többszabadságfokú rendszer gépek okozta harmonikus gerjesztése. Többszabadságfokú rendszer támaszrezgése, földrengés számítás.

Több tömegből és kapcsoló rugókból álló rendszer esetén a dinamikus egyensúlyt kifejező egyenletekhez tömegpontként írjuk fel: "Mi, Mit, Hogyan mozgat?".

Az egyensúlyi egyenletek táblázatos elrendezése egy, a tömegpontok elmozdulási szabadságfokának megfelelő számú egyenletből álló mátrix-differenciálegyenlet rendszert ad eredményül.

Az n elmozdulási szabadságfokú rezgő rendszer dinamikus egyensúlyát az elmozdulási szabadságfoknak megfelelő számú, n darab egyenlet írja le.

Az i egyenletben egyenletben az i elmozdulásnak megfelelő tehetetlenségi erő és a hozzá kapcsolt rugókban ébredő visszatérítő erők szerepelnek.

Ennek az egyenletrendszernek a megoldását a harmonikus elmozdulásfüggvények között keressük. (A jól kezelhető harmonikus függvények (sinus, cosinus) kielégítik a differenciálegyenleteket és előnyösen alkalmazhatók a bonyolult, különleges függvények közelítésére alkalmas Fourier sorok elméletében és gyakorlatában.)

Az n elmozdulási szabadságfokú rezgő rendszer n darab sajátkörfrekvenciával és n darab sajátrezgésalakkal rendelkezik. Beláttuk, hogy a sajátrezgésalak adatai vektorokba foglalhatók.

Ha a rugókkal kapcsolt, kezdetben nyugalomban lévő rendszerre egy $\underline{F}(t)$ időtől függő erőrendszer működik, a rendszer idő-függő mozgásba jön. Az erő megszűnése után a rendszer a pillanatnyi mozgási adatok (kitérés, sebesség), mint kezdeti feltételek szerint szabadon rezeg tovább.

A különböző típusú kényszerítő erők közül részletesen elemeztük a harmonikus gerjesztő erőrendszer esetét.

A harmonikus gerjesztő erőrendszerrel terhelt, csillapítatlan rezgő mozgást a D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyi kijelentésen alapuló mátrix-differenciálegyenlet rendszer másodrendű, állandó együtthatójú, lineáris, a működő erő miatt pedig inhomogén.

Megismertük a két tömegű, gerjesztő erővel terhelt rezgő rendszer mozgásának dinamikai eszközökkel való szabályozását, a dinamikus lengéscsillapítás módszerét.

A tananyag a könyv 173. - 176, 181. - 183. oldalán található, a kidolgozott feladatok a 3.15 és a 3.16 példák, a rövid kivonat pedig a 14. számú.

Kapcsolódó példák a Dinamika Példatár 5. részében

Ellenőrző kérdések

1. Jellemezze a többszabadságfokú, csillapítatlan, harmonikus erővel gerjesztett rezgő mozgást.
2. Jellemezze a többszabadságfokú, csillapítatlan, harmonikus erővel gerjesztett rezgő rendszerre vonatkozó differenciálegyenletet.
3. A gerjesztés létrejöttének mechanizmusa, kifejlődésének időbeni lejátszódása?
4. Több szabadságfokú rendszer esetén a nagyítási tényező előfordulása, jelentősége?
5. A földrengés hatására keletkező igénybevételek számításának feltételezései.
6. A földrengés hatására keletkező igénybevételek számítása, modellezése.
7. Mi a dinamikus lengéscsillapítás?

Irodalomjegyzék

Dr. Györgyi József: DINAMIKA
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2003. (95038) könyv
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1995. (95016) jegyzet

Dr. Vértés György: ÉPÍTMÉNYEK DINAMIKÁJA
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976

Dr. Vértés György - Dr. Györgyi József:
MECHANIKA, KINETIKA - KINEMATIKA
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994. (91060) jegyzet

Dr. Vértés György - Dr. Györgyi József - Dr. Wolf Károly:
KINEMATIKAI ÉS KINETIKAI PÉLDATÁR
Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1994. (91201) jegyzet

Mérnökkari Mechanikai Tanszék
KINEMATIKAI ÉS KINETIKAI PÉLDATÁR
Tankönyvkiadó, Budapest, 1970 (J9 - 79) jegyzet

Dr. Vértés György:
REZGÉSTAN I.
Tankönyvkiadó, Budapest, 1965 (J9 - 522) jegyzet

Szűcs Miklós:
KIDOLGOZOTT PÉLDÁK LENGÉSTANBÓL
Tankönyvkiadó, Budapest, 1982

Silbersdorff László:
LENGÉSTAN
Tankönyvkiadó, Budapest, 1963, (J7 - 135)

Sz. D. Ponomarjov:
SZILÁRDSÁGI SZÁMÍTÁSOK S GÉPÉSZETBEN 6.
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966

Lengyel János:
MŰSZAKI LENGÉSTAN
Módszertani útmutató
Tankönyvkiadó, Budapest, 1979

Dinamika példatár Tartalomjegyzék

1. Kinematika

- 1.1 Anyagi pont
- 1.2 Anyagi pontrendszer
- 1.3 Merev test

2. Kinetika

- 2.1 Anyagi pont
- 2.2 Anyagi pontrendszer
- 2.3 Merev test

3. Ütközések

- 3.1 Mozgó test ütközése álló testtel
- 3.2 Mozgó test ütközése mozgó testtel
- 3.3 Mozgó test ütközése elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testtel

4. Rezgések, egy szabadságfokú szerkezet

- 4.1 Csillapítatlan szabad rezgés
- 4.2 Csillapított szabad rezgés
- 4.3 Csillapítatlan gerjesztett rezgés
- 4.4 Csillapított gerjesztett rezgés

5. Rezgések, több szabadságfokú szerkezet

- 5.1 Csillapítatlan szabad rezgések
- 5.2 Csillapított szabad rezgések
- 5.3 Csillapítatlan gerjesztett rezgések
- 5.4 Csillapított gerjesztett rezgések