Dinamika példatár

MECHANIKA III. Dinamika
tantárgyhoz

DR. MESKÓ ANDRÁS

Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar,
Szilárdságtan és Tartószerkezetek Tanszék
<mesb@minicomp.hu>

2007 december 1.

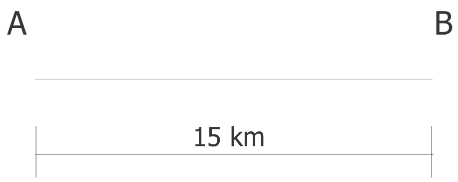
Dinamika példatár
Tartalomjegyzék

1. Kinematika

1.1 Anyagi pont

1.1.1 Egyenes vonalú mozgás

Az **A és B** település távolsága 15 km.
Azonos időpontban A-ból 10 km/ó sebességgel, B-ből 5 km/ó sebességgel elindul egy – egy ember.
Mikor és hol találkoznak?



Lehetőségek:

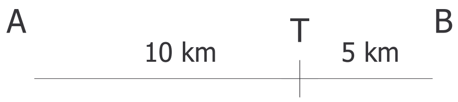
	A	B	
1.	>	<	találkoznak
2.	>	>	találkoznak
3.	<	<	nem találkoznak
4.	<	>	nem találkoznak

A találkozás feltétele, hogy A és B lakosok által megtett út $s_A = v_A * t$ és $s_B = v_B * t$ a 15 km távolságot adja ki.

1. $15 = s_A + s_B = v_A * t + v_B * t = (v_A + v_B) * t = (10 + 5) * t$

$$\mathbf{t} = \frac{15}{(v_A + v_B)} = \frac{15}{(10+5)} = \mathbf{1\ ó},$$

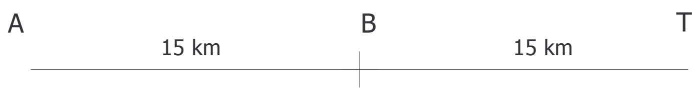
$\mathbf{s_A} = 1 * 10 =$ **10 km A-tól**, $\mathbf{s_B} = 1 * 5 =$ **5 km B-től A és B között**



2. $15 = s_A - s_B = v_A * t - v_B * t = (v_A - v_B) * t = (10 - 5) * t$

$$\mathbf{t} = \frac{15}{(v_A - v_B)} = \frac{15}{(10-5)} = \mathbf{3\ ó},$$

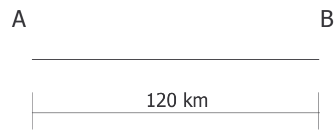
$\mathbf{s_A} = 3 * 10 =$ **30 km A-tól**, $\mathbf{s_B} = 3 * 5 =$ **15 km B-től A – B B felőli oldalán**



1.1.2 Egyenes vonalú mozgás

Az A és B település távolsága 120 km.
Azonos időpontban A-ból 60 km/ó sebességgel B felé, B-ből 20 km/ó sebességgel A felé elindul egy – egy ember.

Mikor találkoznak?



A találkozás feltétele, hogy A és B lakosok által megtett út $s_A = v_A * t$ és $s_B = v_B * t$ a 120 km távolságot adja ki.

$$120 = s_A + s_B = v_A * t + v_B * t = (v_A + v_B) * t = (60 + 20) * t$$

$$\mathbf{t} = \frac{120}{(v_A + v_B)} = \frac{120}{(60+20)} = \mathbf{1.5\ ó},$$

$\mathbf{s_A} = 1.5 * 60 =$ **90 km A-tól**, $\mathbf{s_B} = 1.5 * 20 =$ **30 km B-től** **A és B között**

$v_A = 80$ km/ó és $v_B = 0$ km/ó esetén mi a megoldás?

$v_A = 40$ km/ó és $v_B = 40$ km/ó esetén mi a megoldás?

$v_A = 100$ km/ó és $v_B = -20$ km/ó (A-val ellentétes irányba) esetén mi a megoldás?

A találkozás bekövetkezésének az ideje az A és B sebességek egymáshoz viszonyított értékétől függ.
Igaz-e hogy a találkozás létrejöttének a sebessége mindhárom esetben 80 km/ó és az indulástól 1.5 óra múlva bekövetkezik?

Készítsen ellenőrző számítást!

Rajzoljon út – idő diagramot, ábrázolja a különböző eseteket, egyúttal határozza meg a találkozási helyeket is!

1.1.3 Körmozgás

A henger r sugara 1.5 m, a forgás szögsebessége $\omega = 0.6$ 1/s állandó.

Mekkora a kerületen mozgó pont centripetális gyorsulása (a_{cp}), a keringési idő (T), a fordulatszám (n) értéke?
15 másodperc alatt mekkora a megtett út (s) és a befutott szögút-ív (α) nagysága?

A sebességvektor irányának változás, a centripetális gyorsulás

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{(r*\omega)^2}{r} = r*\omega^2 = 1.5 * 0.6^2 = 0.54 \text{ m/s}^2$$

Egy körülfordulás ideje a teljes kör (2 * π) és a szögsebesség (ω) hányadosa

$$T = \frac{2*\pi}{\omega} = 10.472 \text{ s.}$$

A fordulatszám, azaz az 1 s alatt megtett körülfordulások száma a T keringési idő reciproka:

$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2 * \pi} = 0.0955$ 1/s.

A 15 másodperc alatt befutott szögút:

$\alpha = 15 * \omega = 15 * 0.6 = 9$ rad.

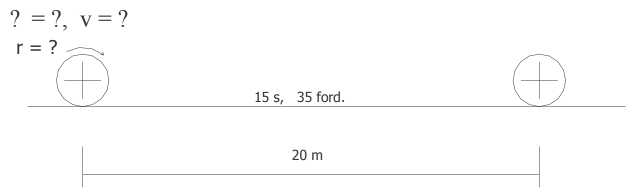
A megtett út a kerületen megtett ívhosszal egyezik meg:

$s = 15 * \omega * r = \alpha * r = (15 * 0.6) * 1.5 = 13.5$ m.

1.1.4 Körmozgás

Sima, vízszintes felületen gördülő henger 15 s és 35 fordulat alatt 20 m utat tesz meg.

Mekkora a középpont sebessége (v_k), a szögsebesség (ω), a henger sugara ®?



A középpont sebessége a megtett út és az idő hányadosa:

$v_k = \frac{s}{t} = \frac{20}{15} = 1.333$ m/s.

A szögsebesség a megtett szögút és az idő hányadosa:

$\omega = \frac{35 * 2 * \pi}{15} = 14.666$ 1/s.

A megtett utat a kerületen megtett úttal kifejezve $s = 35 * 2 * \pi * r = 20$ m és innen

$r = \frac{s}{35 * 2 * \pi} = \frac{20}{35 * 2 * \pi} = 0.0909$ m = 9.09 cm.

1.1.5 Kinematika s, v

Hol van a test és mekkora a sebessége az elindulástól számított 8., a 45. illetve a 70. másodperc végén?

Az idő tengely adatait elemezve megállapíthatjuk, hogy

- a 8. másodperc az első, egyenletesen gyorsuló
- a 45. másodperc a második, az egyenletes sebességű
- a 70. másodperc a harmadik, az egyenletesen lassuló

szakaszra esik.

Az egyenletesen gyorsuló szakaszon az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ és a $v = v_0 + a * t$ összefüggések alapján a kiinduló ponttól $s = 0 + 0 * 8 + 0.4 * 8^2 / 2 = 12.8$ m távolságra van és sebessége $v = 0 + 0.4 * 8 = 3.2$ m/s.

Az egyenletes sebességű szakaszon $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ összefüggés alapján a kiinduló ponttól $s = 20 + 4 * (45 – 10) + 0 * (45 – 10)^2 / 2 = 160$ m távolságra van és sebessége $v = 4$ m/s állandó.

Az egyenletesen lassuló szakaszon az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ és a $v = v_0 + a * t$ összefüggések alapján a kiinduló ponttól $s = 220 + 4 * (70\text{-}10\text{-}50) + (-0.2) * (70\text{-}10\text{-}50)^2 / 2 = 250$ m távolságra van és sebessége $v = 4 + (-0.2) * (70\text{-}10\text{-}50) = 2$ m/s.

1.1.6 Kinematika t, v

Mikor van és mekkora a sebessége a kezdőponttól 11.5 m-re, 100.8 m-re illetve 244.5 m-re?

Az út-idő grafikon alapján megállapíthatjuk, hogy
- a 12.5 m az első, egyenletesen gyorsuló
- a 100 m a második, az egyenletes sebességű
- a 245 m a harmadik, az egyenletesen lassuló

szakaszra esik.

Az egyenletesen gyorsuló szakaszon az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ és a $v = v_0 + a * t$ összefüggések alapján
a kiinduló ponttól $s = 0 + 0 * t + 0.4 * t^2 / 2 = 11.5$ m távolságra van, ebből a $t = 7.583$ s
és sebessége $v = 0 + 0.4 * 7.583 = 3.033$ m/s.

Az egyenletes sebességű szakaszon $s = s_0 + v_0 * t_2 + a * t_2^2 / 2$ összefüggés alapján
a kiinduló ponttól $s = 20 + 4 * t_2 + 0 * t_2^2 / 2 = 100.8$ m távolságra van, ebből a $t_2 = 20.02$ s és $t = 10 + 20.02 = 30.02$ s, a sebessége pedig $v = 4$ m/s állandó.

Az egyenletesen lassuló szakaszon az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ és a $v = v_0 + a * t$ összefüggések alapján
a kiinduló ponttól $s = 220 + 4 * t_3 + (-0.2) * t_3^2 / 2 = 244.5$ m távolságra van, ebből a $t_3 = 7.55$ s és $t = 10 + 50 + 7.55 = 67.55$ s, sebessége pedig $v = 4 + (-0.2) * 7.55 = 2.49$ m/s.

Ábrázolják a kapott eredményeket a megfelelő grafikonban!

1.1.7 Kinematika s, v, a, t, α, ω, β

Álló helyzetből, az $s_0 = 0$ helyről induló, $a = 0.5$ m/s^2 állandó gyorsulással mozgó test
mekkora utat tesz meg a 6. másodpercben?
Hol jár a test a 7. másodperc végén?

Az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ összefüggés alapján a test

az 5. másodperc végén $s_5 = s_0 + v_0 * 5 + a * 5^2 / 2 = 6.25$ m-nél,
a 6. másodperc végén $s_6 = s_0 + v_0 * 6 + a * 6^2 / 2 = 9.0$ m-nél jár.

A 6. másodpercben $s_{65} = s_6 – s_5 = 9.0 – 6.25 = 2.75$ m utat tesz meg.

A 7. másodperc végén $s_7 = s_0 + v_0 * 7 + a * 7^2 / 2 = 12.25$ m-nél jár.

A test egy **r** = 2 m sugarú hengerről lecsavarodó fonalon függve végzi a fentiekben leírt mozgást.

Álló helyzetből, az $\alpha_0 = 0$ helyről induló, állandó szöggyorsulással mozgó test mekkora szögutat tesz meg a 6. másodpercben?
Hol jár a test (szögútban) a 7. másodperc végén?

Azaz: mekkora a henger β szöggyorsulása, mekkora $\alpha_{65,}$ $\alpha_{5,}$ α_6 és α_7 szögút értékek?

A henger kerületén a szögút (α)– szögsebesség (ω) – szöggyorsulás (β) értékei a út – sebesség – gyorsulás értékekké számíthatók, az átszámítás „váltószáma” a henger **r** sugara.

Ezért

$a = r * \beta$,	ebből	$\beta = a / r = 0.5 / 2 = 0.25$ 1/s^2 (rad/s^2),
$s = r * \alpha$,	ebből	$\alpha_6 = s_6 / r = 9.0 / 2 = 4.5$ 1/s (rad/s) $\alpha_5 = s_5 / r = 6.25.0 / 2 = 3.125$ 1/s (rad/s) $\alpha_{65} = s_{65} / r = (9.0 – 6.25) / 2 = 2.75 / 2 = 4.5 – 3.125 =$ $= 1.375$ 1/s (rad/s) és $\alpha_7 = s_7 / r = 12.25 / 2 = 6.125$ 1/s (rad/s)

1.1.8 Kinematika s0, v0, a

Egy álló helyzetből induló, állandó gyorsulással mozgó test a mozgás kezdetétől számított 3. másodperc végén 10 m-re, a 4. másodperc végén 15 m-re van az indulási helytől.

Mekkora az s_0, a v_0 és az a értéke?

A test álló helyzetből indul, azaz $v_0 = 0$.

A kiindulási hely $s_0 = 0$.

Az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ összefüggésből kiindulva

A 3. másodperc végén $s(3) = 10 = 0 + v_0 * 3 + a * 3^2 / 2 =$

$0 + v_0 * 3 + a * 4.5 = 10$ (*)

A 4. másodperc végén $s(4) = 15 = 0 + v_0 * 4 + a * 4^2 / 2 =$

$0 + v_0 * 3 + a * 8 = 15$ (**)

A két-ismeretlenes (v_0, a) egyenletrendszer megoldása: $a = 0.83333$ m/s^2 és $v_0 = 2.08333$ m/s.

Behelyettesítéssel ellenőrizzük a kapott eredményt: az (*) és (**) egyenletek baloldalába v_0 és a értékét valóban 10 m illetve 15 m utat kapunk.

1.1.9 Kinematika s, a

Egy álló helyzetből induló ($v_0 = 0$), állandó **a** gyorsulással mozgó test a mozgás kezdetétől számított 5. másodpercben 10 m utat tesz meg. Mekkora a gyorsulás értéke?
Függ-e az **a** gyorsulásértéke az s_0 értékétől?

Az 5. másodpercben megtett s_{54} út az 5. és a 4. másodperc végéig megtett utak különbsége az $s = s_0 + v_0 * t + a * t^2 / 2$ összefüggés alapján:

$s_{54} = s_5 – s_4 = s_0 + v_0 * 5 + a * 5^2 / 2 – s_0 – v_0 * 4 – a * 4^2 / 2 = a * (5^2 – 4^2) / 2 = 10$

Innen $\mathbf{a} = 2 * 10 / (5^2 – 4^2) = 20 / 9 = 2.222$ m/s^2.

A megoldásból látszik, hogy az **a** gyorsulás értéke nem függ az s_0 értékétől.

1.1.10 Összetett mozgás, kinematika

A test álló helyzetből 20 m út megtétele alatt egyenletesen 0.4 m/s^2 értékel gyorsul, majd 50 s-on át egyenletes sebességgel halad tovább. A harmadik szakaszon 0.2 m/s^2 lassulással megáll.

Mekkora az 1. szakaszon a gyorsulás (**a_1**), a menetidő (**t_1**), az elért sebesség (**v**),
a 2. szakasz hossza (**s_2**),
a 3. szakaszon a menetidő (**t_3**), a szakasz hossza (**s_3**)?

Mekkora az átlag(os) sebesség **$v_{átl}$**?

Készítse el az a(t), v(t) és az s(t) diagramokat!

A példa adataiból és a szövegéből is kiderül, hogy a feladat 3 szakaszra bontható: a mozgás az 1. szakasz egyenletesen gyorsuló, a 2. szakasz állandó sebességű, a 3. szakasz egyenletesen lassuló.

A példát szakaszonként oldjuk meg.

Az **1. szakasz**: egyenletesen változó (*a* állandó sebességváltozás, gyorsulás) mozgás

A mozgás út-idő összefüggése $s = v_0 * t + \frac{a * t^2}{2}$,

esetünkben $s_1 = 0 * t + \frac{a_1 * t^2}{2}$. Innen $\mathbf{t_1} = \sqrt{\frac{2 * s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 * 20}{0.4}} = 10$ s.

A szakasz végén a test sebessége $\mathbf{v} = a_1 * t_1 = 4$ m/s.

A **2. szakasz**: egyenletes sebességű mozgás (*a* = 0, nincs sebességváltozás)

A mozgás út-idő összefüggése: $\mathbf{s_2} = v * t_2 = 4 * 50 = 200$ m.

A **3. szakasz**: egyenletesen változó (*a* állandó sebességváltozás, lassulás) mozgás

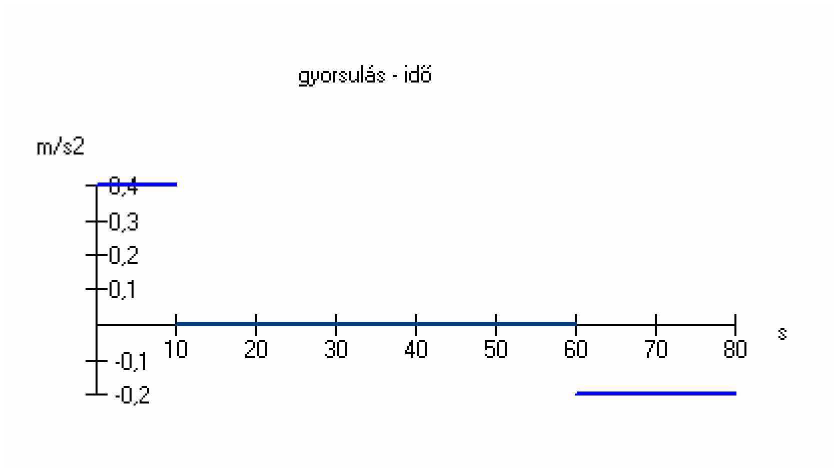
A végsebesség $v_v = v_0 + a * t = 4 + (-0.2) * t_3 = 0$. Innen $\mathbf{t_3} = \frac{v}{a_3} = \frac{-4}{-0.2} = 20$ s.

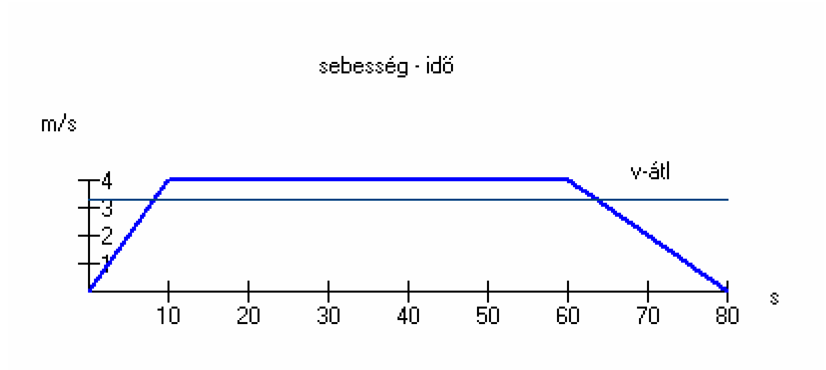
A megtett út $\mathbf{s_3} = v_0 * t + \frac{a * t^2}{2} = 4 * 20 + \frac{(-0.2) * 20^2}{2} = 40$ m.

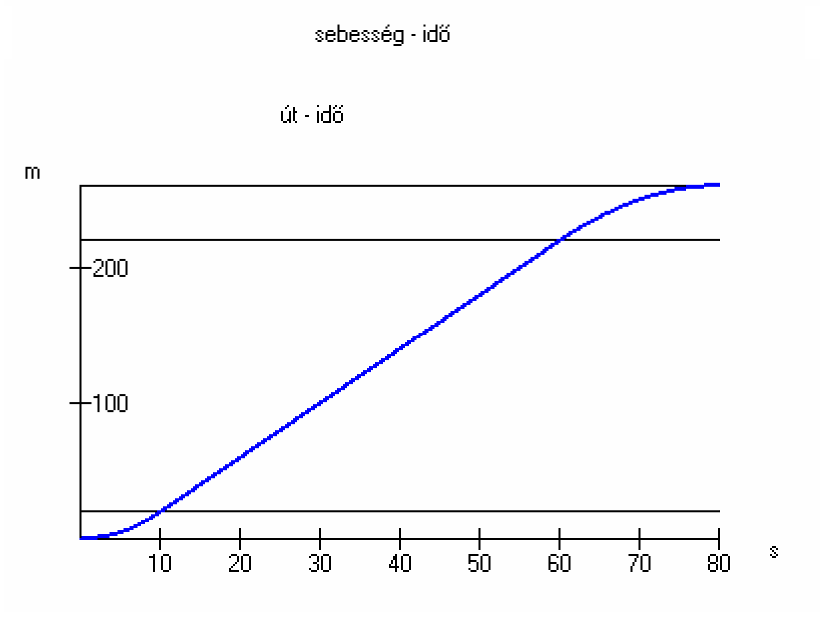
Az átlagsebesség az összes út és a teljes menetidő hányadosa,

$$\mathbf{v_{átl}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{20 + 200 + 40}{10 + 50 + 20} = \frac{260}{80} = 3.25 \text{ m/s.}$$

(A gyorsuláa – idő a(t), a sebesség – idő v(t) és az út – idő s(t) diagramok megtalálhatók a 2.1.1 feladat megoldásában is.)


gyorsulás - idő
m/s2
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2
10
20
30
40
50
60
70
80
s


sebesség - idő
m/s
v-átl
4
3
2
1
10
20
30
40
50
60
70
80
s


sebesség - idő
út - idő
m
200
100
10
20
30
40
50
60
70
80
s

1.2 Anyagi pontrendszer

1.3 Merev test

2. Kinetika

2.1 Anyagi pont

2.1.1 Összetett mozgás, kinetika

Egy 50 kg tömegű testre 20 N erő hat. A test álló helyzetből 20 m út megtétele alatt egyenletesen gyorsul, majd 50 s-on át egyenletes sebességgel halad tovább. A harmadik szakaszon 0.2 m/s^2 lassulással megáll.

Mekkora az 1. szakaszon a gyorsulás (**a_1**), a menetidő (**t_1**), az elért sebesség (**v**),
a 2. szakasz hossza (**s_2**),
a 3. szakaszon a lassító erő (**F_3**), a menetidő (**t_3**), a szakasz hossza (**s_3**)?
Mekkora az átlag(os) sebesség **$v_{átl}$**?
Készítse el az a(t), v(t) és az s(t) diagramokat!

A példa adataiból és a szövegéből is kiderül, hogy a feladat 3 szakaszra bontható: a mozgás az 1. szakasz egyenletesen gyorsuló, a 2. szakasz állandó sebességű, a 3. szakasz egyenletesen lassuló.

A példát szakaszonként oldjuk meg.

Az **1. szakasz**: egyenletesen változó (*a* állandó sebességváltozás, gyorsulás) mozgás

Ismerjük a test tömegét (m) és a testre működő erőt (F_1).

Newton II. törvénye értelmében F = m * a, ebből a gyorsulás: $\mathbf{a_1} = \frac{F_1}{m}$ = 0.4 m/s^2.

A mozgás út-idő összefüggése $s = v_0 * t + \frac{a * t^2}{2}$,

esetünkben $s_1 = 0 * t + \frac{a_1 * t^2}{2}$. Innen $\mathbf{t_1} = \sqrt{\frac{2 * s_1}{a_1}} = \sqrt{\frac{2 * 20}{0.4}}$ = 10 s.

A szakasz végén a test sebessége $\mathbf{v} = a_1 * t_1$ = 4 m/s.

A **2. szakasz**: egyenletes sebességű mozgás (*a* = 0, nincs sebességváltozás)

A mozgás út-idő összefüggése: $\mathbf{s_2} = v * t_2$ = 4 * 50 = 200 m.

A **3. szakasz**: egyenletesen változó (*a* állandó sebességváltozás, lassulás) mozgás

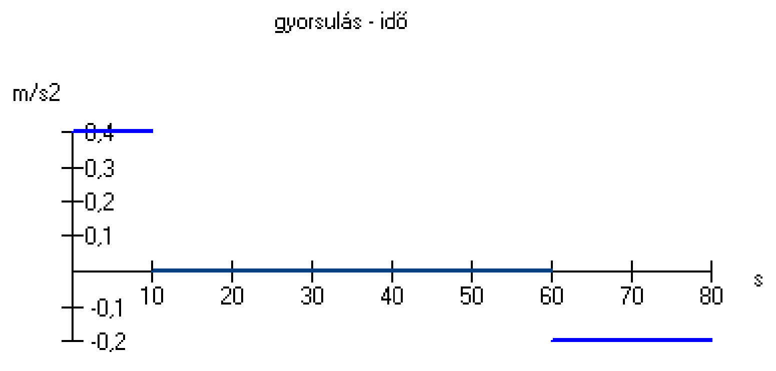
Newton II. törvénye értelmében F = m * a, ebből a fékező erő $\mathbf{F_3} = m * a_3$ = -10 N

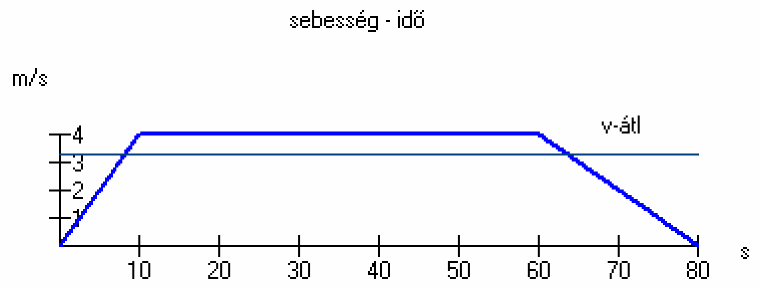
A végsebesség $v_v = v_0 + a * t = 4 + (-0.2) * t_3 = 0$. Innen $\mathbf{t_3} = \frac{v}{a_3} = \frac{-4}{-0.2}$ = 20 s.

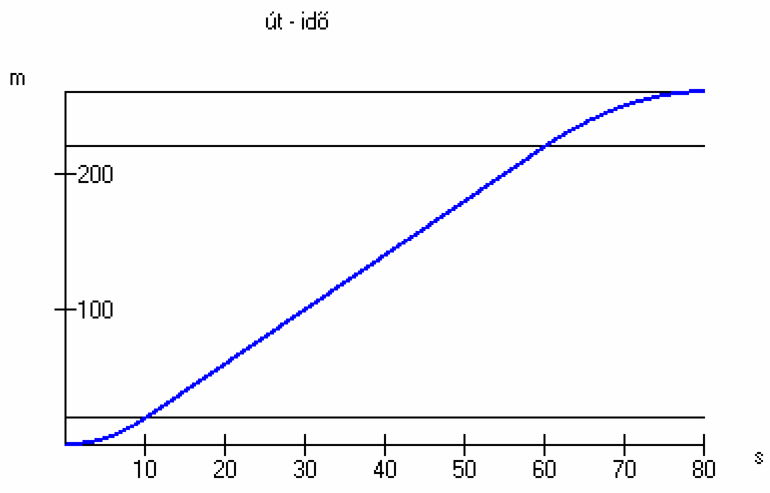
A megtett út $\mathbf{s_3} = v_0 * t + \frac{a * t^2}{2} = 4 * 20 + \frac{(-0.2) * 20^2}{2}$ = 40 m.

Az átlagsebesség az összes út és a teljes menetidő hányadosa,

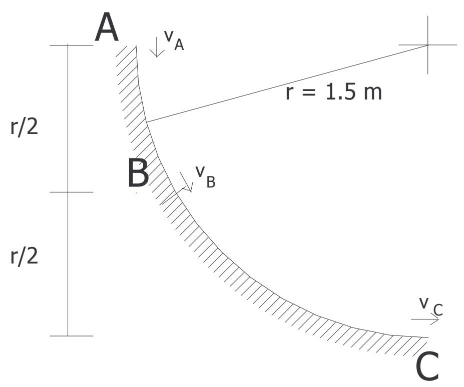
$$\mathbf{v_{átl}} = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{20 + 200 + 40}{10 + 50 + 20} = \frac{260}{80} = 3.25 \text{ m/s.}$$


gyorsulás - idő
m/s2
0,4
0,3
0,2
0,1
-0,1
-0,2
10
20
30
40
50
60
70
80
s


sebesség - idő
m/s
4
3
2
1
v-átl
10
20
30
40
50
60
70
80
s


út - idő
m
200
100
10
20
30
40
50
60
70
80
s

2.1.2 Körpálya, helyzeti, mozgási energia



Negyedkör alakú, r = 1.5 m sugarú pályán súrlódásmentesen mozog egy anyagi pont.
A pálya alsó, C pontjában a sebesség most akkora, hogy a pályanyomás (K_C) az eredeti súly többszöröse (α), esetünkben éppen az 5-szöröse.

Mekkora a C pontbeli $\mathbf{v_C}$, a negyedkör középpontjának a magasságában lévő a pontbeli $\mathbf{v_A}$ és a magasság felében lévő B pontbeli $\mathbf{v_B}$ sebesség?
(Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy az anyagi pont tömege 1 kg.)

A feladatot a mozgási és a helyzeti energiák összegének állandósága, az energiák veszteségmentes átválthatósága feltételezésével oldjuk meg.

A C pontbeli pályanyomás (vagy a felfüggesztő kötélben ébredő erő) értékének az ismeretében a C pontbeli mozgási adatokat kifejezhetjük.

$K_C = G + C_p = m * g + m * a_{cp} = m * (g + a_{cp}) = G * \alpha = G * 5 = m * g * \alpha = m * g * 5$

Innen $(g + a_{cp}) = g * \alpha = g * 5$, ebből pedig $a_{cp} = g * (\alpha - 1) = g * (5 - 1) = g * 4$.

A centripetális gyorsulás $a_{cp} = \dfrac{v_C^2}{r} = g * 4$.

Innen $\mathbf{v_C} = \sqrt{(\alpha - 1) * g * r} = \sqrt{4 * g * r} =$ **7.746** m/s.

Az A illetve a C pontbeli helyzeti és mozgási energiák összegének egyezősége alapján

$\frac{1}{2} * m * v_C^2 - \frac{1}{2} * m * v_A^2 = m * g * r$ és innen $\mathbf{v_A} = \sqrt{v_C^2 - 2 * g * r} = \sqrt{60 - 2 * 10 * 1.5} =$ **5.477** m/s.

Az A és a B pontbeli helyzeti és mozgási energiák egyezősége alapján

$\frac{1}{2} * m * v_B^2 - \frac{1}{2} * m * v_A^2 = m * g * r * \frac{1}{2}$ és $\mathbf{v_B} = \sqrt{v_A^2 + 2 * g * r * \frac{1}{2}} = \sqrt{30 + 10 * 1.5} =$ **6.708** m/s.

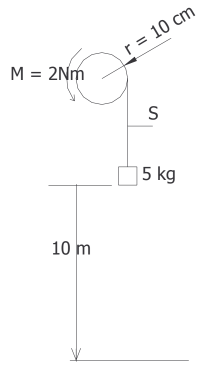
(A B és a C pontbeli helyzeti és mozgási energiák egyezősége alapján ellenőrzésképpen!

$\frac{1}{2} * m * v_C^2 - \frac{1}{2} * m * v_B^2 = m * g * r * \frac{1}{2}$ és $\mathbf{v_B} = \sqrt{v_C^2 - 2 * g * r * \frac{1}{2}} = \sqrt{60 - 10 * 1.5} =$ 6.708 m/s,

$\mathbf{v_B}$ természetesen megegyezik az előző számítás eredményével.)

2.2 Anyagi pontrendszer

2.2.1 Anyagi pont és merev test változó sebességű, egyenesvonalú és forgó mozgása



Egy 5 kg tömegű test álló helyzetből 10 m magasból 4 s alatt ér le a földre. Mekkora a test gyorsulása (**a**)? Mekkora erő ébred a kötélben (**S**)? A hengerre $M_{fék}$ = 2 Nm lassító, fékező nyomaték működik. Mekkora a henger tehetetlenségi nyomatéka (**I**) és a tengely körüli forgó mozgás szöggyorsulása (**β**)?

A példa két egymással összefüggő részfeladatból áll: a fonalra függesztett test egyenletesen gyorsuló mozgást végez, ezt a mozgást „követi" a tengely körül forgó test, a kapcsolatot a fonal biztosítja
($s = \alpha * r$, $v = \omega * r$, $a = \beta * r$).

A fonalon függő test mozgása: $s = v_0 * t + \frac{a * t^2}{2}$, esetünkben $v_0 = 0$.

Innen **a** = $\frac{2*s}{t^2} = \frac{2*10}{4^2}$ = 1.25 m/s^2

Az *m* tömegű test mozgása 2 erő hatására jön létre: a G súlyerő és a kötélben lévő lassító, fékező S erő. Newton II. törvénye szerint R = (G – S) = m * a = (m * g – S) , innen pedig

$$S = m * (g - a) = 5 * (10 - 1.25) = 43.75 \text{ N.}$$

(A nyugalomban lévő 5 kg tömegű testet G = m * g = 5 * 10 = 50 N = S kötélerő tartaná meg.)

A tengely körül forgó test mozgása:

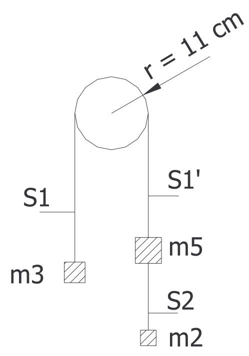
A perdületre vonatkozó összefüggés (Newton II. törvénye a forgó mozgásra) szerint
M = I * β (R = m * a).

Esetünkben: $M = S * r - M_{fék} = I * \beta$, a szöggyorsulás **β** = $\frac{a}{r} = \frac{1.25}{0.1} = 12.5 \frac{1}{s^2}$,

innen pedig

$$\mathbf{I} = (S * r - M_{fék}) / \beta = (43.75 * 0.1 - 2) / 12.5 = 0.19 \text{ kgm}^2$$

2.2.2 Anyagi pontok változó sebességű egyenesvonalú mozgása



A súrlódásmentes és elhanyagolható tömegű csigán átvetett fonal egyik végén az m_3 = 3 kg, a másik ágán az m_5 = 5 kg, alatta pedig az m_2 = 2 kg tömeg függ.

Milyen mozgás jön létre, ha a rendszert elengedjük?

Mekkorák a fonalban ébredő erők?

Álló helyzetből (v_0 = 0) létrejövő mozgás esetén mennyi idő alatt tesz meg a rendszer 10 m utat?

A rendszer nincs statikus egyensúlyban, az egyik ágon G3 = m3 * g = 3 * 10 = 30 N,
a másik oldalon G5 = m5 * g = 5 * 10 = 50 N és további G2 = m2 * g = 2 * 10 = 20 N, összesen 70 N erő működik.
Az összes mozgató erő R = 50 + 20 – 30 = 40 N, a rendszer a nagyobb súlyú oldalon egyenletesen gyorsulva lefelé, a másik oldalon felfelé mozdulva elindul.
Az összes megmozgatott tömeg m = 3 + 5 + 2 = 10 kg.
Newton II. törvénye R = m * a, az egyes tagok értelme pedig:

Mi mozgat? **R**
Mit mozgat? **m**
Hogyan mozgat? **a**

R = 40 N = m * a = 10 kg * a m/s^2 , innen a gyorsulás

a = R / m = 40 N / 10 kg = 4 m/s^2, a nehézségi gyorsulás (g = 10 m/s^2) 40 %-a.

Egyenletesen változó mozgás esetén a megtett út s = v_0 * t + a * t^2 / 2.
Álló helyzetből induló mozgásnál v_0 = 0, ezért s = a * t^2 / 2.
Innen a 10 m út megtételéhez szükséges idő:

$$t = \sqrt{\frac{2*s}{a}} = \sqrt{\frac{2*10}{4}} = 2.24 \text{ s.}$$

A súrlódásmentes csiga két oldalán lévő kötélágban egyforma nagyságú S1 értékű erő ébred, a csiga csak a kötélerő irányát változtatja meg.

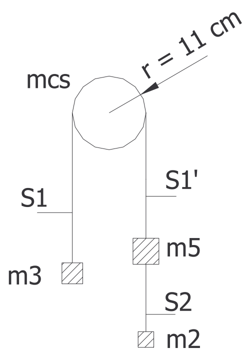
Az m3 tömegű test egyensúlya: lefelé működik a G3 = m3 * g = 30 N súlyerő és felfelé hat az S1 kötélerő.
R = S1 –G3 erő mozgat (felfelé), m3 = 3 kg tömeget mozgat (felfelé) a = 4 m/s2 gyorsulással
R = m3 * a = S1 – G3 = S1 – 30 = 3 * 4 = 12 N.
Innen S1 = 30 + 12 = 42 N, ez nagyobb, mint a G3 = 30 N súlyerő. Az S1 erő a 3 kg tömegű testet a nehézségi erő ellenében gyorsítja.

A másik oldali kötélág alsó részén függ az m2 = 2 kg tömegű test.
Ennek egyensúlya: lefelé működik a G2 = m2 * g = 20 N súlyerő és felfelé hat az S2 kötélerő.
R = G3 – S2 erő mozgat (lefelé), m2 = 2 kg tömeget mozgat (lefelé) a = 4 m/s^2 gyorsulással
R = m2 * a = G2 – S2 = 20 – S2 = 2 * 4 = 8 N.
Innen S2 = 20 – 8 = 12 N, ez kisebb, mint a G3 = 20 N súlyerő. Az S2 erő a 2 kg tömegű testet a nehézségi erő hatását lerontva fékezi.

Ugyanezen kötélágon függ az m5 = 5 kg tömegű test.
Ennek egyensúlya: felfelé működik az S1 kötélerő, lefelé felé hat a G5 = m5 * g = 50 N súlyerő és az S2 kötélerő,
R = G5 + S2 – S1 erő mozgat (lefelé), m_5 = 5 kg tömeget mozgat (lefelé) a = 4 m/s2 gyorsulással
R = m5 * a = G5 + S2 – S1 = 5 * 4 = 20 N.
Az erők eredőjét kiszámítva ellenőrizhetjük, R = G5 + S2 – S1 vajon 20 N értékű-e?

R = 50 + 12 – 42 = 20 N valóban, az egyensúly tehát fennáll.

2.2.3 Anyagi pontok és merev test változó sebességű egyenesvonalú és forgó mozgása



Egészítsük ki az előző feladatot úgy, hogy a csiga tömege m_{cs} = 1.5 kg, nem hanyagolható el.

A rendszer továbbra sincs statikus egyensúlyban. A mozgás hasonló jellegű lesz, mint korábban, de a megmozgatott tömegek száma a tehetetlen csiga miatt eggyel megnő.
A csiga tengely körüli forgási tehetetlensége I_{cs} =
$\frac{m_{cs} * r^2}{2} = \frac{1.5 * 0.11^2}{2}$ = 0.009075 kgm^2 .
Ismeretlenek: az a gyorsulás, az S1, az S1' és az S2 kötélerők, összesen 4 db.

Vizsgáljuk meg a 4 mozgó tömeget egyenként:
(4 db dinamikai egyensúlyi feltétel a 4 ismeretlenhez)

Newton II. törvénye R = m * a: az egyes tagok értelmezése pedig:

	erő	nyomaték (perdület-tétel)
Mi mozgat?	**R**	**M**
Mit mozgat?	**m**	**I**
Hogyan mozgat?	**a**	**β**

m3: S1 – G3 = m3 * a

m5: G5 + S2 – S1' = m5 * a

m2: G2 –S2 = m2 * a

mcs: S1'* r –S1 * r = (S1'–S1) * r = Ics * β = $\frac{m_{cs} * r^2}{2} * \frac{a}{r}$ átrendezés és egyszerűsítés után

S1' – S1 = $\frac{m_{cs} * a}{2}$

A 4 egyenlet összeadása után: R = G5 + G2 –G3 = (m3 + m5 + m3 + m_{cs} /2) * a.= m * a

A mozgató erő megegyezik az előző feladat adatával R = 40 N.
A mozgó tömeg kicsivel (m_{cs} / 2) nagyobb, mint korábban.
A rendszer mozgása hasonló jellegű, az R = m * a egyenletből kiszámíthatóan: 40 = 10.75 * a

a = R / m = 40 N / 10.75 kg = 3.721 m/s^2, a nehézségi gyorsulás (g = 10 m/s^2) 37.21 %-a.

Fentiek ismeretében a kötélerők és a csigára működő nyomaték:

S1 = 41.15 N (42 N csiga nélkül), kisebb
S1' = 43.96 N (42 N csiga nélkül), nagyobb
S2 = 12.56 N (12 N csiga nélkül), nagyobb
M_{csiga} = (S1' – S1) * r = (43.96 – 41.15) * 0.11 = 0.307 Nm

$M_{csiga} = \beta * I_{cs} = \frac{a}{r} * \frac{m_{cs} * r^2}{2} = \frac{3.721}{0.11} * \frac{1.5 * 0.11^2}{2}$ = 0.307 Nm

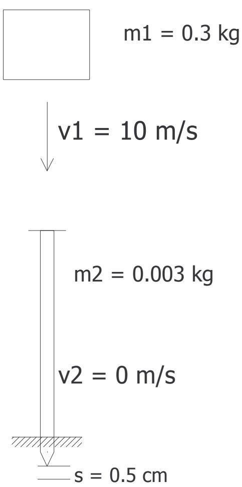
2.3 Merev test

3. Ütközések

3.1 Mozgó test ütközése álló testtel

3.2 Mozgó test ütközése mozgó testtel

3.2 1 Kalapács – szög



Puhafába G1 = m1 * g = 3 N súlyú kalapáccsal „60”-as szöget verünk be.
A kalapács feje v1 = 10 m-s sebességgel éri el a szöget. Az ütközés képlékeny, e = 0.
Az ütésre a szög s = 0.5 cm-re hatol be a fába. A szög súlya G2 = m2 *g = 0.03 N.
Mekkora a fa ellenállása, P = ? Mekkora a dinamikus hatás υ = ?

A kalapács mozgási energiája: $E_1 = \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 = \frac{1}{2} * 0.3 * 10^2$ Nm = 15 Nm

Az ütközés miatti energiaveszteség:

$$\Delta E = (1-e^2) * \frac{1}{2} * \frac{m_1 * m_2}{m_1 + m_2} * (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} * \frac{0.3 * 0.003}{0.3 + 0.003} * (10-0)^2 =$$

0.15 kNm ≈ 0.01 * E1

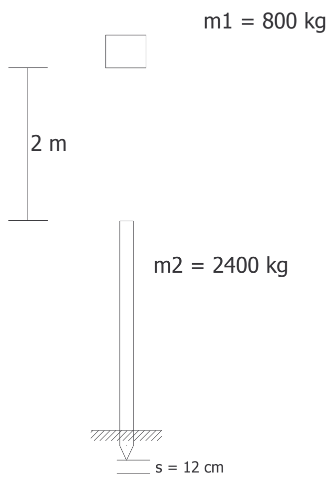
A megmaradó mozgási energia: $E_2 = E_1 - \Delta E = 15 - 0.15 = 14.85$ Nm, a szög beverésére, a fa ellenállásának a legyőzésére fordítódik.

$0 - E_2 = 0 - 14.85 = - P * s$

$E_2 = P * s$, innen az ellenállás: $\mathbf{P} = \frac{E_2}{s} = \frac{14.85}{0.005} = 2970$ N

A dinamikus hatás: $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{2970 \text{ N}}{3 \text{ N}} \simeq 990$

3.2.2 Cölöpverés



A 800 kg tömegű cölöpverő kos 2 m magasról szabadeséssel ütközik a 2400 kg tömegű cölöppel. Az ütközés képlékeny, e = 0. Az ütésre a cölöp s = 12 cm-re hatol be a talajba. Mekkora a talaj ellenállása, P = ? Mekkora a dinamikus hatás υ = ?

A leeső cölöpverő kos $E_H = m_1 * g * h$ helyzeti energiája $E_M = \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2$ mozgási energiává alakul. Ebből a becsapódási sebesség

$$v1 = \sqrt{2 * h * g} = 6.325 \text{ m/s}^2$$

A cölöpverő kos mozgási energiája: $E_1 = \frac{1}{2} * m_1 * v_1^2 = \frac{1}{2} * 800 * 6.325^2$ Nm = 16000 Nm

Az ütközés miatti energiaveszteség:

$$\Delta E = (1 - e^2) * \frac{1}{2} * \frac{m_1 * m_2}{m_1 + m_2} * (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{2} * \frac{800 * 2400}{800 + 2400} * (6.325 - 0)^2 = 12000 \text{ kNm}$$

A megmaradó mozgási energia: $E_2 = E_1 - \Delta E =$ 16000 – 12000 = 4000 Nm, a cölöp beverésére, a talaj ellenállásának a legyőzésére fordítódik.

$0 - E_2 = 0 - 4000 = - P * s$

$E_2 = P * s$, innen az ellenállás: $\mathbf{P} = \frac{E_2}{s} = \frac{4000}{0.12} = 33333$ N = 33.33 kN

A dinamikus hatás: $\boldsymbol{\upsilon} = \frac{33.33 \text{ kN}}{8 \text{ kN}} \simeq 4.167$

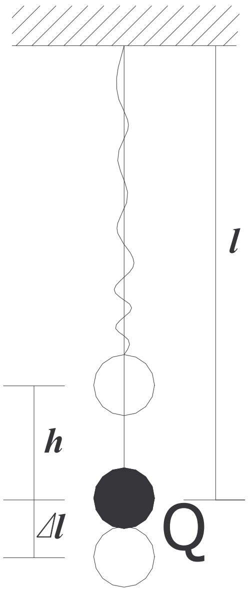
Az E_2 mozgási energia megváltozása, felemésztése az m1 és m2 tömegű testek *s* úton való behatolására és a P ellenállás *s* úton való legyőzésére fordítódik:
$0 - E2 = (m1 + m2) * g * s - P * s$.

Innen a P ellenálló erőt kifejezve $P = \frac{E2 + (m1 + m2) * g * s}{s} = \frac{E_2}{s} + (m_1 + m_2) * g$.

Utóbbi tag a biztonság javára tett közelítéssel elhagyható, így az anyag ellenállása $P = \frac{E_2}{s}$.

3.3 Mozgó test ütközése elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testtel

3.2.3 Kötélre leeső test hatása



Elhanyagolható tömegű ***l*** hosszúságú fonalon ***Q*** súly függ.
A ***Q*** súlyt függőlegesen *h* magasságba felemeljük, majd leejtjük.
A fonal rugalmassági modulusa ***E***, keresztmetszeti területe ***A***.

Mekkora lesz az ***S*** kötélerő maximuma?

Mekkora az ***S*** kötélerő ***h*** = 0 esési magasság esetén?

Mekkora lesz az ***S*** értéke, ha ***Q*** = 10 N, ***h*** = 0.1 m, ***l*** = 2 m, ***E*** = 21000 kN/cm^2, ***A*** = 1 mm^2?

A feladatot a külső és a belső munkák egyenlősége alapján oldjuk meg.

A külső munka: $Wk = Q * (h + \Delta l)$

A rugalmas megnyúlás: $\Delta l = \dfrac{S * l}{E * A}$

A belső munka $Wb = \dfrac{1}{2} * S * \Delta l = \dfrac{1}{2} * \dfrac{S^2 * l}{E * A}$

(mert a kötélerő fokozatosan nő fel 0-ról S-ig, saját munka)

$$Q * \left(h + \frac{S * l}{E * A} \right) = \frac{1}{2} * S * \Delta l = \frac{1}{2} * \frac{S^2 * l}{E * A}$$

Innen pedig

$$S = Q * \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 * \frac{E * A}{Q} * \frac{h}{l}} \right\}$$

Ha $h = 0$, akkor $S = Q * \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 * \dfrac{E * A}{Q} * \dfrac{0}{l}} \right\} = Q * 2$

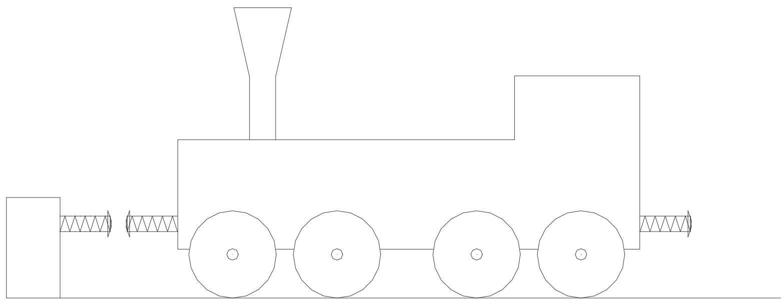
Ha Q = 10 N (= 0.01 kN), h = 0.1 m, l = 2 m, E = 21000 kN/cm^2, A = 1 mm^2, akkor

$$S = Q * \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 * \frac{E * A}{Q} * \frac{0}{l}} \right\} = 0.01 * \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 * \frac{21000 * 0.01}{0.01} * \frac{0.1}{2}} \right\} = 0.468 \text{ kN}$$

$$(S = 10 * \left\{ 1 + \sqrt{1 + 2 * \frac{21000000 * 0.01}{10} * \frac{0.1}{2}} \right\} = 468 \text{ N})$$

A dinamikus hatás: $\upsilon = S / Q = 468 / 10 = 46.8$

3.2.4 Ütközés – mozdony és ütközőbak



A mozdony v = 3.6 km/ó sebességgel nekimegy az állomási ütközőbaknak.

A bak egy rugója 1000 kN erő hatására 1 cm-t, a mozdony egy ütközője 1.5 cm-t nyomódik össze.

A mozdony tömege 20 t.

A jármű a számításban súlyos anyagi pontnak vehető. Az ütközőbak végtelen merevnek tekinthető.
Az ütközés tökéletesen rugalmas.

Mennyi ideig tart az ütközés? Mekkora a legnagyobb összenyomódás? Mekkora a legnagyobb rugóerő?
Mekkora erő ébred az ütköző tartószerkezetében?

Az ütközésben résztvevő eredő rugóállandó az egyik oldali két ütköző (mozdony és ütközőbak) adataiból számítható.

F = 1000 kN erő hatására az összenyomódás x = 1 + 1.5 = 2.5 cm.

A rugóállandó k = F / x = 1000 kN / 2.5 cm = 400 kN/cm = 40000 kN/m.

A mozdony mozgási energiája az ütköző-párokban alakváltozási energiává alakul:

$E_{Mv} - E_{Mk} = 2 * (- k*e) * e$

(a mozgási energia elvész, felemésztődik), (az eltolódás és rugóerő ellentétes irányú)

$$0 - \frac{1}{2} * m * v^2 = - 2 * \frac{k * e^2}{2}$$

$$\frac{1}{2} * 20 * 1^2 = 2 * \frac{40000 * e^2}{2} \qquad e^2 = 0.00025$$

Innen e = 0.0158 m = 1.58 cm.

A legnagyobb rugóerő F_{max} = e * k = 0.0158 * 40000 = 632 kN.

A mozdonyt az ütköző-párokban ébredő 2 db F_{max} erő állítja meg.

Az összenyomódó rugók az eltolódással arányos, vele ellentétes irányú erőt kifejtve az egyensúlyi helyzet felé mozdítják az ütköző tömeget, a mozgás tehát harmonikus rezgés addig, amíg az m tömeg visszatér az egyensúlyi helyzetbe.
Az ütközők, a mozdony és az ütközőbak között csak nyomóerő keletkezhet, húzóerő nem jöhet létre.
Az egyensúlyi helyzethez visszatérve az ütközők között a kapcsolat megszűnik, a mozdony az ütközés előtti sebességgel visszafelé mozog a pályán.

A rugó összenyomódás időtartama a 2 db párhuzamos elrendezésű **k** rugótényezőjű rugó és **m** tömegű rendszer „lengésidejének” negyed része (T/4, negyed szinusz hullám):

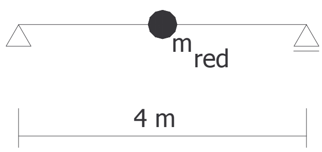
$$\omega = \sqrt{\frac{k_r}{m}} = \sqrt{\frac{k*2}{m}} = \sqrt{\frac{40000*2}{20}} = 63.246 \text{ 1/s}$$

$T = 2 * \pi / \omega = 0.0993$ s

$t = T / 4 = 0.025$ s

A következő t = 0.025 s időtartam alatt a rugók visszanyerik eredeti alakjukat, a mozdony eltávolodik az ütközőtől és az ütközés előtti sebességgel visszafelé indul a pályán.

3.2.5 Leeső test hatása elmozdulni képes, rugalmasan megtámasztott testtel (védőtető)



Pallóból készült kéttámaszú védőtetőre h = 20 m magasból leesik egy m_1 = 5 kg tömegű test.
Az ütközés képlékeny, e = 0.

A pallók támaszköze L = 4.0 m, szélességük a = 20 cm, vastagságuk b = 5 cm, a testsűrűség ρ = 600 kg/m³.
(Inercia $I = \frac{a*b^3}{12} = \frac{20*5^3}{12}$ cm^4 = 2.083 * 10^{-6} m^4.)
A fenyőfa pallók határfeszültsége σ_h = 1.63 kN/cm², alakváltozási jellemzője, rugalmassági modulusa E = 12 * 10^6 kN/m².

Kibírja-e a palló a leeső test hatását?

A h = 20 m magasból leeső test sebessége a helyzeti és a mozgási energiája egyenlősége alapján

$$E_H = m_1 * g * h = E_M = \frac{1}{2} * m_1 * v_0^2 \qquad v_1 = \sqrt{2*g*h} = \sqrt{2*10*20} = 20 \text{ m/s}$$

A becsapódáskor képlékeny ütközés játszódik le.
A leeső testnek és a pallónak a leeső testtel együtt mozgó részének a közös v_1 sebesség a mozgásmennyiségek egyenlősége alapján számítható:

$$v_1 * m_1 = v_k * (m_1 + m_{red}),$$

ahol m_{red} a palló redukált tömege, az a tömegrész, ami a leeső testtel együtt mozog.

A súlytalan, tömegtelen, csak rugalmassággal rendelkező tartón lévő redukált tömeg mozgási energiája megegyezik a folytonos tömegeloszlású tartó mozgási energiájával. Ebből a feltételből az $m_{red} = \frac{17}{35} * m_{palló} \approx \frac{1}{2}\, m_{palló}$ összefüggést kapjuk.

$m_{palló}$ = 4.0 * 0.2 * 0.05 * 600 = 24 kg, $\qquad m_{red} = \frac{17}{35} * 24 \approx \frac{1}{2} * 24 = 12$ kg

$$v_k = \frac{v_1 * m_1}{m_1 + m_{red}} = \frac{20*5}{5+12} = 5.88 \text{ m/s}$$

A leeső test és a palló elmozdul lefelé, a palló addig mozog, alakváltozik, amíg a v_1 sebességgel jellemzett mozgási energia rugalmas alakváltozási energiává alakul át.

$$E_M = \frac{1}{2} * (m_1 + m_{red}) * v_k^2 = E_R = \frac{1}{2} * P * y(P)$$

ahol P az alakváltozást létrehozó helyettesítő erő és y(P) az általa létrehozott lehajlás.

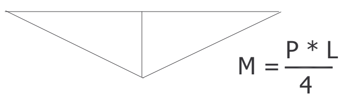
Kéttámaszú gerenda középpontjának a lehajlása az ugyanott működő erő hatására:

$$y(P) = \frac{P * L^3}{48 * E * I}$$

Behelyettesítve:

$$\frac{1}{2} * (5 + 12) * 5.88^2 = P * \frac{P * 4^3}{48 * 12 * 10^9 * 2.083 * 10^{-6}}$$

$$P = \sqrt{\frac{(5 + 12) * 5.88^2 * 48 * 12 * 10^9 * 2.083 * 10^{-6}}{4^3}} = 3319 \text{ N} = 3.319 \text{ kN}$$



A P helyettesítő erő hatására a kéttámaszú tartón a legnagyobb nyomaték

$$M = \frac{P * L}{4} = \frac{3.319 * 4}{4} = 3.319 \text{ kNm.}$$

A palló 20 cm széles és 5 cm magas keresztmetszetének a hajlításból keletkező σ húzó – nyomó feszültség kiszámításához szüksége keresztmetszeti tényező (modulus):

$$K = \frac{I}{b/2} = \frac{20 * 5^3}{12} * \frac{1}{5.0/2} = 83.3 \text{ cm}^3$$

A keletkező húzó – nyomó feszültség:

$$\sigma_m = \frac{M}{K} = \frac{331.9\,[\text{kNcm}]}{83.3\,[\text{cm}^3]} = 3.98 \text{ kN/cm}^2 > \sigma_h = 1.63 \text{ kN/cm}^2$$ NEM FELEL MEG!

(Javaslat: több pallót össze kell kapcsolni és az együttdolgozás biztosításával a számítást meg kell ismételni!

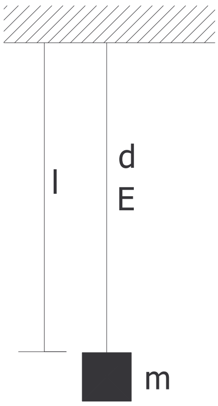
3 palló együttdolgozása esetén:

$v_k = 2.44$ m/s, P = 3672 N, $\sigma_m = 1.47$ kN/cm2 < $\sigma_h = 1.63$ kN/cm^2 MEGFELEL!)

4. Rezgések, egy szabadságfokú szerkezet

4.1 Csillapítatlan szabad rezgés

4.1.1 Szabad rezgés adatai



Az m tömeget egy függőleges rúd végéhez erősítették.

A rúd átmérője $d = 0.4$ cm

területe $A = \dfrac{d^2 * \pi}{4} = 0.1256\ \text{cm}^2$

hossza $l = 0.5$ m

E 20000 kN/cm^2

Az m tömeg 12.56 kg

A rúd megnyúlása F = 1 kN erő hatására: $\Delta l = \dfrac{F * l}{E * A}$

A k rugótényező $\dfrac{F}{\Delta l} = \dfrac{E * A}{l} = 5024$ kN/m

A sajátkörfrekvencia $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{5024000}{12.56}} = 632.46$ 1/s

A rezgésszám $n = \dfrac{\omega}{2 * \pi} \cong 100.66$ 1/s

Közelítő rezgésszám

$$n = \frac{5}{\sqrt{\Delta l_{G,cm}}} = \frac{5}{\sqrt{0.025}} = 100\ 1/s$$

$$\Delta l = \frac{(m * g) * l}{E * A} = \frac{(0.01256 * 10) * 50}{20000 * 0.1256} = 0.0025\ \text{cm}$$

4.1.2 A rezgés közelítő és pontos adatai

L = 1 m hosszú, elhanyagolható tömegű vízszintes konzol végén m = 10 kg tömeg függőleges rezgést végez. A konzol anyagának rugalmassági modulusa E = 21000 kN/cm^2, a konzol keresztmetszete I = 10 cm^4.

A konzol végének lehajlása az ugyanott működő statikus erő hatására: $y_{st} = \dfrac{P*L^3}{3*E*I}$.

(Kéttámaszú gerenda középpontja lehajlása az ugyanott működő erő hatására: $y_{st} = \dfrac{P*L^3}{48*E*I}$.)

A közelítő rezgésszámot az $n_k = \dfrac{5}{\sqrt{y_{st}\left[cm\right]}}$ összefüggéssel határozzuk meg.

A konzol végén lévő tömeg súlyának a hatására a konzol végének a lehajlása cm-ben

$y_{st,cm} = \dfrac{P*L^3}{3*E*I} = \dfrac{0.1*100^3}{3*21000*10}$ = 0.159 cm.

A közelítő rezgésszám értéke: $\mathbf{n_k} = \dfrac{5}{\sqrt{0.159\left[cm\right]}} = 12.54\ \dfrac{1}{s}$

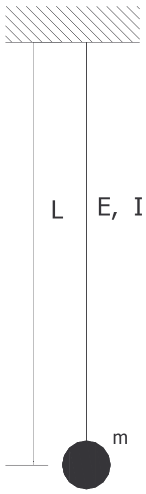
A körfrekvencia közelítő értéke: $\boldsymbol{\omega_k} = n_k * 2 * \pi = 78.79\ \dfrac{1}{s}$.

A körfrekvencia pontos értéke: $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{G}{y_{st}} * \dfrac{1}{m}} = \sqrt{\dfrac{100}{0.00159} * \dfrac{1}{10}} = 79.31\ \dfrac{1}{s}$.

(ahol $k = \dfrac{G\left[N\right]}{y_{st}\left[m\right]} = \dfrac{100\left[N\right]}{0.00159\left[m\right]}$ =63000 N/m és m = 10 kg)

A pontos rezgésszám $\mathbf{n} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2*\pi} = 12.632\ \dfrac{1}{s}$.

4.1.3 Rezgés jellemzői. A mozgás függvényei adott kezdeti feltételek esetén



L = 5 m hosszú, elhanyagolható tömegű függőleges konzol végén m = 10 kg tömeg a tengelyre merőleges irányú rezgést végez. A konzol anyagának rugalmassági modulusa E = 21000 kN/cm^2, a konzol keresztmetszete I = 1000 cm^4.

A rezgő mozgás adatai:

A legnagyobb kitérés x_{max} = 10 cm = 0.1 m

a.) eset t = 0 időpontban $x(0) = x_0 = x_{max}$ és $v(0) = v_0 = 0$

b.) eset t = 0 időpontban $x(0) = x_0 = 0$ és $v(0) = v_0 = v_{max}$

A konzol végének lehajlása az ugyanott működő statikus erő hatására: $y_{st} = \dfrac{P*L^3}{3*E*I}$.

(Kéttámaszú gerenda középpontja lehajlása az ugyanott működő erő hatására: $y_{st} = \dfrac{P*L^3}{48*E*I}$.)

A konzol végén lévő tömeg súlyának a hatására a konzol végének a tengelyre merőleges „lehajlása”:

$$y_{st} = \frac{G*L^3}{3*E*I} = \frac{0.1*500^3}{3*21000*1000} = 0.1984 \text{ cm.}$$

$$k = \frac{P}{y_{st}} = \frac{G}{y_{st}} = \frac{0.1[kN]}{0.1984[cm]} = 0.504\frac{kN}{cm} = 50400\frac{N}{m}$$

A körfrekvencia pontos értéke: $\boldsymbol{\omega_0} = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{50400}{10}} = 71\ \dfrac{1}{s}$.

A pontos rezgésszám és rezgésidő: $\mathbf{n} = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2*\pi} = 11.30\ \dfrac{1}{s}$ és $\mathbf{T} = \dfrac{2*\pi}{\omega_0} = 0.0885$ s.

A mozgás harmonikus rezgő mozgás, mert a kitéréssel arányos (k * x) visszatérítő erő működik a rezgő mozgást végző tömegre.

A harmonikus rezgő mozgás általános megoldása:

kitérés $x(t) = A * \cos(\omega_0*t) + B * \sin(\omega_0*t)$

sebesség $\dot{x}(t) = -\omega_0 * A * \sin(\omega_0*t) + \omega_0 * B * \cos(\omega_0*t)$

gyorsulás $\ddot{x}(t) = -\omega_0^2 * A * \cos(\omega_0*t) - \omega_0^2 * B * \sin(\omega_0*t)$

Az általános megoldás A és B paramétereinek a meghatározása a t = 0 időpontbeli kezdeti feltételeknek megfelelően:

$t = 0$ $\quad x(0) = x_0 \quad x_0 = A * 1 + B * 0 \quad A = x_0$

$\quad v(0) = v_0 \quad v_0 = - \omega * A * 0 + \omega * B * 1 \quad B = \dfrac{v_0}{\omega_0}$

a.) eset $\quad$ t = 0 időpontban $x(0) = x_0 = x_{max}$ és $v(0) = v_0 = 0$

$A = x_0 = 0.1$ m $\quad B = \dfrac{v_0}{\omega_0} = 0$

$x(t) = A * \cos(\omega_0 * t) = 0.1 * \cos(71 * t) \quad [m]$

$\dot{x}(t) = -A * \omega_0 * \sin(\omega_0 * t) = -0.1 * 71 * \sin(71 * t) = -7.1 * \sin(71 * t) \quad \left[\dfrac{m}{s}\right]$

$\ddot{x}(t) = -A * \omega_0^2 * \cos(\omega_0 * t) = -0.1 * 71^2 * \cos(71 * t) = -504 * \cos(71 * t) \quad \left[\dfrac{m}{s^2}\right]$

b.) eset $\quad$ t = 0 időpontban $x(0) = x_0 = 0$ és $v(0) = v_0 = v_{max}$

$v_0 = v_{max} = x_{max} * \omega_0 = 0.1 * 71 = 7.1$ m/s

$A = x_0 = 0 \quad B = \dfrac{v_0}{\omega_0} = \dfrac{7.1}{71} = 0.1$ m

$x(t) = B * \sin(\omega_0 * t) = 0.1 * \sin(71 * t) \quad [m]$

$\dot{x}(t) = -B * \omega_0 * \cos(\omega_0 * t) = -0.1 * 71 * \cos(71 * t) = -7.1 * \cos(71 * t) \quad \left[\dfrac{m}{s}\right]$

$\ddot{x}(t) = -B * \omega_0^2 * \sin(\omega_0 * t) = -0.1 * 71^2 * \sin(71 * t) = -504 * \sin(71 * t) \quad \left[\dfrac{m}{s^2}\right]$

A legnagyobb rugóerő értéke:

$F_{max,k} = -x_{max} * k = -0.1 \text{ m} * 50400 \text{ N/m} = -5040 \text{ N}$

$F_{max,\omega} = \ddot{x}_{max} * m = (-504 \text{ m/s}^2) * 10 \text{ kg} = -5040 \text{ N}$

4.2 Csillapított szabad rezgés

4.2.1 Csillapítás, csillapított rezgő mozgás

Az olyan rezgő mozgást, melynél a kitérés a rezgések során csökken, csillapított rezgő mozgásnak nevezik.

A jelenséget gyakran a sebességgel arányos csillapító erő okozza. Ilyen csillapított rezgő mozgást végez egy folyadékban – nem túl nagy sebességgel rezgő – test.

A rendszer teljes mechanikai energiája folyamatosan csökken a közegellenállási erő hatására. Ha a sebesség nem túl nagy, a közegellenállási erő a sebesség első hatványával arányos
$F_k = C*v$. A közegellenállási erő által kicsiny Δt idő alatt végzett munka $-C*v*\Delta s = -C*v^2*\Delta t$

Ezt a pillanatnyi mozgási energiával elosztva $\dfrac{-C*v^2*\Delta t}{\frac{1}{2}*m*v^2} = -\dfrac{2*C*\Delta t}{m}$ állandó.

A rendszer az egymás utáni egyenlő időközökben mozgási energiájának mindig ugyanannyiad részét veszíti el, a megmaradó rész mértani sor szerint csökken, a közegellenállási erő miatti mozgási energia csökkenés az idő exponenciális függvénye.

(Csillapítatlan rezgő mozgást úgy állíthatunk elő, hogy a felemésztett, eltűnt mechanikai energiát folyamatosan pótoljuk.)

A G = 100 N súlyú test a k = 2 N/cm rugóállandójú rugóval lengő rendszert alkot.
A csillapítás jellemzője c = 0.1 N/(cm/s).
A tömeget 5 cm-re kitérítjük a nyugalmi helyzetéből és elengedjük.
Hány teljes lengés után csökken a kitérés 1 mm alá?
Mennyi idő telik el eddig?

a.) A csillapítatlan rezgő mozgás adataival számolunk

k = 2 N/cm = 200 N/m m = G / g = 100 / 10 = 10 kg

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{200}{10}} = 4.47$ 1/s

$T_0 = 2*\pi / \omega_0 = 1.405$ s $n_0 = 1 / T_0 = 0.712$ 1/s

Az egymást követő, azonos oldali kitérések csökkenésének arányszáma

$\dfrac{A_1}{A_{2+1}} = e^{\rho*T_0} = e^{\frac{c}{2*m}*T_0} = e^{\frac{10}{2*10}*1.405} = e^{0.7025} = 2.01879 = q$ (a mértani sor hányadosa)

$\dfrac{A_1}{A_{2*i+1}} = \dfrac{5}{0.1} = 50 = q^i$ ahol i a teljes lengések száma

Az i becsült értéke: $q^5 = 2.01879^5 \approx 33.53$ $q^6 = 2.01879^6 \approx 67.69$ $i \sim 5.5 - 5.6$

A két oldal természetes alapú logaritmusát véve: $\ln(50) = \ln(q)^i = \ln(2.01879) * i$

$i = \dfrac{\ln(50)}{\ln(2.01879)} = 5.56873$

azaz az 5. periódus után, a 6. periódusban csökken a kitérés 1 mm alá

Az eddig eltelt idő $T = T_0 * 5.56873 = 7.824$ s.

b.) A csillapított rezgő mozgás adataival számolunk

A szerkezet csillapítási jellemzője c = 0.1 N/(cm/s) = 10 kg/s

$c_{kr} = 2 * \sqrt{k*m} = 2 * \sqrt{200*10} = 89.44$ kg/s

c = 10 kg/s << c_{kr} = 89.44 kg/s

$$\omega_0^* = \omega_0 * \sqrt{1-\left(\frac{c}{c_{kr}}\right)^2} = 4.47 * \sqrt{1-0{,}1118^2} = 4.47 * 0.99373 = 4.442 \text{ 1/s}$$

$T_0^* = 2*\pi / \omega_0^* = 1.4145$ s $\qquad n_0^* = 1 / T_0^* = 0.70696$ 1/s

Az egymást követő, azonos oldali kitérések csökkenésének arányszáma

$$\frac{A_1}{A_{2+1}} = e^{\rho*T_0^*} = e^{\frac{c}{2*m}*T_0^*} = e^{\frac{10}{2*10}*1.4145} = e^{0.70725} = 2.02841 = q \qquad \text{(a mértani sor hányadosa)}$$

$$\frac{A_1}{A_{2*i+1}} = \frac{5}{0.1} = 50 = q^i$$ ahol i a teljes lengések száma

Az i becsült értéke: $q^5 = 2.02841^5 \approx 34.338$ $\qquad q^6 = 2.02841^6 \approx 69.652$ $\qquad i \sim 5.5 - 5.6$

A két oldal természetes alapú logaritmusát véve

$\ln(50) = \ln(q)^i = \ln(2.02841) * i$

$$i = \frac{\ln(50)}{\ln(2.02841)} = 5.5313$$

azaz az 5. periódus után, a 6. periódusban csökken a kitérés 1 mm alá

Az eddig eltelt idő $T^* = T_0^* * 5.5313 = 7.824$ s.

A c << c_{kr} , ezért a csillapítatlan rezgő mozgás adataival kiszámolt eredmények alig térnek el a csillapított rezgés adatait alkalmazó számítástól.

4.3 Csillapítatlan gerjesztett rezgés

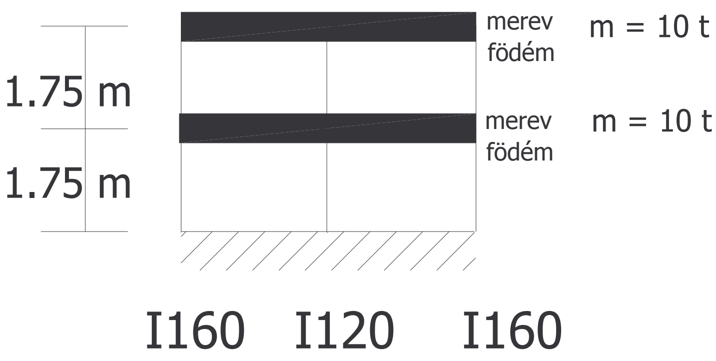
4.4 Csillapított gerjesztett rezgés

5. Rezgések, több szabadságfokú szerkezet

5.1 Csillapítatlan szabad rezgések

5.1.1 Két szabadságfokú lengő rendszer

A vizsgált szerkezet két szintes, hajlékony acél **I** szelvényű oszlopokból és végtelen merevnek tekinthető, lényegében elfordulás-mentes födémekből áll.
A födémek tömegéhez képest az oszlopok tömege elhanyagolható.
Az alapozásba és a födémekbe befogott oszlopok vízszintes elmozdulása az úgynevezett „nyírási lengés”.
Az oszlopok alsó és felső vége a csatlakozó szerkezeti elemekbe befogottak, az oszlopok végpontjánál az érintőjük függőleges. Az oszlopok tengelyre merőleges eltolódásai az eltolási merevségek értékétől függenek.



A kétszintes szerkezetben a szintmagasság 1.75 m.

Két tömeg (m_1 és m_2) mindegyike 10 – 10 t.

Az oszlopok szintenként 2 **I**160 + 1 **I**120, $\Sigma I = 2 * 935 + 1 * 328 = 1098\ cm^4$.

Egy szint eltolási merevsége: $\dfrac{12*E*I}{l^3} = \dfrac{12*20600*2198}{1.75^3} = 100\ \dfrac{kN}{cm} = 10000\ \dfrac{kN}{m}$.

Alkalmazzuk az egyes tömegekre Newton II. törvényét, R = m * a, illetve m * a – R = 0.

1: m_1 $10 * \ddot{x}_1 + 10000 * x_1 + 10000 * (x_1 - x_2) = 0$

2: m_2 $10 * \ddot{x}_2 + \qquad + 10000 * (x_2 - x_1) = 0$

1: $\ddot{x}_1 + 2000 * x_1 - 1000 * x_2 = 0$

2: $\ddot{x}_2 - 1000 * x_1 + 1000 * x_2 = 0$

Vizsgálatainkat a harmonikus rezgésekre korlátozzuk, szorzat alakú megoldást keresünk.
A számítást „gyalogosan”, számológéppel készítettük.

A kitérések

$x_1(t) = x_1 * \sin(\omega_0 * t + \varphi)$
$x_2(t) = x_2 * \sin(\omega_0 * t + \varphi)$

ahol $x_1$és x_2 az amplitúdó (m) és az időtől való függést a szinusz függvény írja le

A gyorsulások, a kitérést leíró függvények idő szerinti 2. deriváltjai

$\ddot{x}_1(t) = - \omega_0^2 * x_1 * \sin(\omega_0 * t + \varphi)$

$\ddot{x}_2(t) = - \omega_0^2 * x_2 * \sin(\omega_0 * t + \varphi)$

Behelyettesítve és $\sin(\omega_0 * t + \varphi) \not\equiv 0$ miatt egyszerűsítve a frekvencia - egyenletet kapjuk.

$$(2000 - \omega_0^2) * x_1 – 1000 * x_2 = 0$$

$$-1000 * x_1 + (1000 - \omega_0^2) * x_2 = 0$$

A homogén egyenletrendszernek triviálistól ($x_1 = 0$ és $x_2 = 0$, azaz nincs elmozdulás, nem jön létre rezgés) különböző megoldása akkor van, ha az együtthatóiból képezett determináns értéke 0.

$\mathrm{Det}(\quad) = (2000 - \omega_0^2) * (1000 - \omega_0^2) – (-1000) * (-1000) = 0$

A Det (   ) értéke az ω_0^2 illetve ω_0 értékétől függ.

A kifejtett determináns

$2000000 – 3000 * \omega_0^2 + \omega_0^4 – 1000000 = 0$

Az alábbi, másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenlet, a feladat karakterisztikus egyenlete ω_0^2–re két értéket ad.

$\omega_0^4 – 3000 * \omega_0^2 + 1000000 = 0$

$$\omega_{0,12}^2 = \frac{3000 \pm \sqrt{3000^2 4 * 1000000}}{2} = \frac{3000 \pm 2236.07}{2}$$

A két érték közül a kisebbet (több szabadságfok esetén a legkisebbet) nevezzük ω_{01}-nek, a többit a nagyság szerinti növekvő sorrendben indexeljük.

$\omega_{0,1}^2 = 381.97\ 1/s^2$ $\omega_{0,1}= 19.54\ 1/s$ T1 = 0.3215 s

$\omega_{0,2}^2 = 2618\ 1/s^2$ $\omega_{0,1}= 51.17\ 1/s$ T1 = 0.1228 s

Az $\omega_{0,i}$ értékek a feladat sajátértékei (a determináns értékét 0-vá teszik), az x_1 és az x_2 az $\omega_{0,i}$ sajátértékekhez tartozó vektorok.

A homogén egyenletrendszerből az x_1 és x_2 amplitúdók értéke nem határozható meg egyértelműen, csupán az elemek értékének egymáshoz viszonyított aránya számítható ki.

Bebizonyítható, hogy a sajátértékekhez tartozó vektorok merőlegesek egymásra, azaz ortogonális rendszert alkotnak. Az ilyen vektorokból esetenként kedvező tulajdonságú koordinátarendszert hozhatunk létre. A létrehozandó koordinátarendszer szempontjából célszerű lenne, ha az egymásra merőleges vektorok egyúttal egységvektorok is lennének.

Határozzuk meg először a komponensek arányát, utána pedig végezzük el az x1 – x2 koordináta - pár normálását.

Az $\omega_{0,1}$ – hez tartozó megoldás:

Helyettesítsük be az $\omega_{0,1}$ = 19.54 1/s –ot az m_1-re vonatkozó frekvenciaegyenletbe

$(2000 - 381.97) * x_{1,1} - 1000 * x_{2,1} = 0$

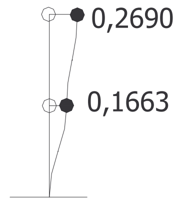
Legyen (válasszuk) $x_{1,1} = 1$ és innen $x_{2,1} = 1.618$

Normáljuk az $\omega_{0,1}$ – hez tartozó $\underline{\mathbf{x}}_1$ segédvektort az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével (az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül):

$$\underline{x}_1^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}1;1.618\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10;0 \\ 0;10\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 \\ 1.618\end{bmatrix} = 36.179$$

Ez egy szám, egy skalár mennyiség, a vektor abszolút értékének (a vektor „hosszának”, a merőleges komponensek átfogójának) a négyzete.
Ennek a négyzetgyöke a vektor „hossza”. A vektor komponenseit a vektor „hosszával” elosztva az egységnyi hosszúságú vektor komponenseit kapjuk eredményül - az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével.

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{36.179}} * \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}0.1663 \\ 0.2690\end{bmatrix}$$



$\underline{v1}$ rezgésalak
(sajátvektor)

Az $\omega_{0,2}$ – hez tartozó megoldás:

Az $\omega_{0,2}$ = 51.17 1/s –ot ismét az m_1-re vonatkozó frekvenciaegyenletbe helyettesítsük be

$(2000 - 2618) * x_{1,2} - 1000 * x_{2,2} = 0$

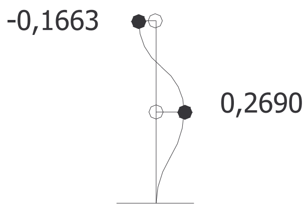
Legyen (válasszuk) $x_{1,2} = 1$ és innen $x_{2,2} = -0.618$

Normáljuk az $\omega_{0,2}$ – hez tartozó segédvektort az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével (az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül)

$$\underline{x}_2^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{x}_2 = \begin{bmatrix}1;-0.618\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}10;0 \\ 0;10\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1 \\ -0.618\end{bmatrix} = 13.8192$$

Ennek a skalár mennyiségnek a négyzetgyöke a vektor „hossza”. A vektor komponenseit a vektor „hosszával” elosztva az egységnyi hosszúságú vektor komponenseit kapjuk eredményül az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül.

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{13.8192}} * \underline{x}_2 = \begin{bmatrix}0.2690 \\ -0.1663\end{bmatrix}$$



$\underline{v2}$ rezgésalak
(sajátvektor)

A $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ sajátvektorokat (oszlopvektorokat) egymás mellé rendezve a $\underline{\mathbf{V}}$ módosító (modál) mátrixot kapjuk, a $\underline{v}_1^T$ és $\underline{v}_2^T$ sajátvektorokat (sorvektorokat) egymás alá rendezve a $\underline{\mathbf{V}^T}$ módosító (modál) mátrix transzponáltját kapjuk.

$\underline{\mathbf{V}}$ = ⟦ $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$ ⟧ = $\begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix}$, $\underline{\mathbf{V}}^T$ = ⟦ $\underline{v}_1^T$, $\underline{v}_2^T$ ⟧ = $\begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix}$

Elvégezve az alábbi hármas mátrix szorzást

$$\underline{\mathbf{V}}^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 10,0 \\ 0,10 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}}_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

látható, hogy a sajátvektorok az **M** tömegmátrix közvetítésével
- merőlegesek egymásra (ortogonálisak) és
- normáltak (egységnyi hosszúságúak).

Elvégezve továbbá az alábbi hármas mátrix szorzást

$$\underline{\mathbf{V}}^T * \underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 20000, -10000 \\ -10000, 10000 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.1663; 0.2690 \\ 0.2690; -0.1663 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{\Omega}} \simeq \begin{bmatrix} 382 \ \ ,0 \\ 0, \ \ 2618 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2, & 0 \\ 0, & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix}$$

látható, hogy
- a sajátvektorok a **K** merevségi mátrix közvetítésével merőlegesek egymásra (ortogonálisak) és
- az **Ω** diagonálmátrix főátlójában $\omega_{0,1}^2$ és $\omega_{0,2}^2$ a sajátkörfrekvenciák négyzete szerepel.

5.1.2 Két szabadságfokú egy tömegű lengő rendszer

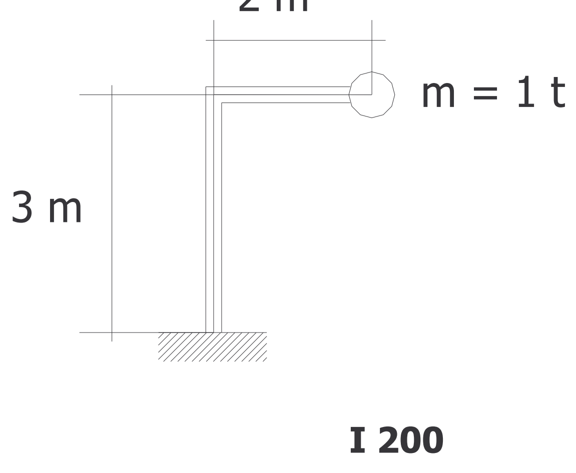
A vizsgált szerkezet az alapba befogott 3 m magas oszlopból és a hozzá nyomatékbíróan kapcsolt, 2 m hosszú, vízszintes gerendából álló törtvonalú konzoltartó.

Anyaga **I**200-as acél szelvény.

A konzol végén 10 kN súlyú, 1 tonna tömeg helyezkedik el.

A rendszer egy tömegű és két elmozdulási szabadságfokú rendszer, hiszen a tömeg függőlegesen és vízszintesen is képes eltolódni.

Alkalmazzuk az egyes tömegekre Newton II. törvényét, R = m * a,
A D'Alembert-féle dinamikus egyensúlyt kifejező egyenletrendszer



$$\begin{bmatrix} m, 0 \\ 0, m \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1,1}, k_{1,2} \\ k_{2,1}, k_{2,2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vizsgálatainkat a harmonikus rezgésekre korlátozzuk, szorzat alakú megoldást keresünk.
A számítást „gyalogosan", számológéppel készítettük.

A kitérések

$x_1(t) = x_1 * \sin(\omega_0 * t)$
$x_2(t) = x_2 * \sin(\omega_0 * t)$

ahol $x_1$és x_2 az amplitúdó (m) és az időtől való függést a szinusz függvény írja le

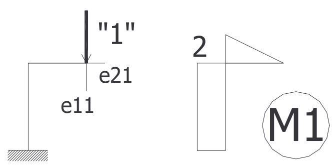
A gyorsulások, a kitérést leíró függvények idő szerinti 2. deriváltjai

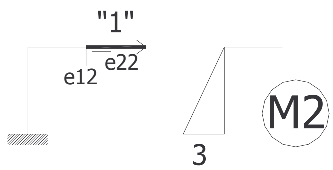
$\ddot{x}_1(t) = -\omega_0^2 * x_1 * \sin(\omega_0 * t)$
$\ddot{x}_2(t) = -\omega_0^2 * x_2 * \sin(\omega_0 * t)$

Behelyettesítve és $\sin(\omega_0 * t) \neq 0$ miatt egyszerűsítve a frekvencia - egyenletet kapjuk.

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} - m * \omega^2 ; k_{1,2} \\ k_{2,1} ; k_{2,2} - m * \omega^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A $k_{i,j}$ adatok meghatározása





$$e_{11} = \int M_1 * M_1 * \frac{1}{E*I} dx =$$

$$\frac{1}{E*I} * \left(\frac{2*2}{2} * 2 * \frac{2}{3} + 2*3*2 \right) = \frac{1}{E*I} * 14.666$$

$$e_{12} = e_{21} = \int M_1 * M_2 * \frac{1}{E*I} dx = \frac{1}{E*I} * \frac{3*2}{2} * 2 = \frac{1}{E*I} * 9$$

$$e_{22} = \int M_2 * M_2 * \frac{1}{E*I} dx = \frac{1}{E*I} * \left(\frac{3*3}{2} * 3 * \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{E*I} * 9$$

$$\underline{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} e_{1,1}, e_{1,2} \\ e_{2,1}, e_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{E*I} * \begin{bmatrix} 14.666; 9.000 \\ 9.000; 9.000 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{F}}^{-1} = \begin{bmatrix} k_{1,1}, k_{1,2} \\ k_{2,1}, k_{2,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{e_{1,1} * e_{2,2} - e_{1,2} * e_{2,1}} * \begin{bmatrix} e_{2,2}, -e_{1,2} \\ -e_{2,1}, e_{1,1} \end{bmatrix}$$ (invertálás 2 * 2 –es mátrixnál)

$$\underline{\mathbf{K}} = \left(\frac{1}{E*I} \begin{bmatrix} 14.666; 9.000 \\ 9.000, 9.000 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \frac{E*I}{14.666*9.0 - 9.0*9.0} * \begin{bmatrix} 9.0; -9.0 \\ -9.0; 14.666 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{4494}{132-81} * \begin{bmatrix} 9.0; -9.0 \\ -9.0; 14.666 \end{bmatrix} = 88.118 * \begin{bmatrix} 9.0; -9.0 \\ -9.0; 14.666 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 793.06; -793.06 \\ -793.06; 1292.39 \end{bmatrix}$$

A frekvenciaegyenlet

$$\begin{bmatrix} 793.06 - \omega_0^2; -793.06 \\ -793.06; 1292.39 - \omega_0^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A szorzat eredménye 0, ha $x_1 = 0$ és $x_2 = 0$ lenne, ez a triviális megoldás.

Azonban $x_1 \neq 0$ és $x_2 \neq 0$, mert van lengés, kitérés, ezért a homogén egyenletrendszernek az együtthatóiból képezett determináns értéke 0.

Det (…) = $(k_{11} - m_1 * \omega_0^2) * (k_{22} - m_2 * \omega_0^2) - k_{12} * k_{21} = 0$

(0-tól különböző tömegadatok, rugalmasságtól függő adatok)

A Det (…) értéke az ω_0^2 illetve ω_0 értékétől függ.

Az alábbi, másodfokúra visszavezethető negyedfokú egyenlet, a feladat karakterisztikus egyenlete ω_0 –ra két értéket ad.

Det (…) = $(793.06 - \omega_0^2) * (1292.39 - \omega_0^2) - (-793.06) * (-793.06) = 0$

A kifejtett determináns

$\omega_0^4 - 2086.45 * \omega_0^2 + 395998.6 = 0$

$$\omega_{0,12}^2 = \frac{2086.45 \pm \sqrt{2086.45^2 - 4*1*1395998.6}}{2} = \frac{2086.45 \pm 1664.115}{2}$$

A két érték közül a kisebbet (több szabadságfok esetén a legkisebbet) nevezzük ω_{01}-nek, a többit a nagyság szerinti növekvő sorrendben indexeljük.

$\omega_{0,1}^2 = 211.1675\ 1/s^2$ $\omega_{0,1} = 14.5316\ 1/s$ T1 = 0.43238 s

$\omega_{0,2}^2 = 1875.28\ 1/s^2$ $\omega_{0,1} = 43.305\ 1/s$ T1 = 0.14509 s

Az $\omega_{0,i}$ értékek a feladat sajátértékei (a determináns értékét 0-vá teszik), az x_1 és az x_2 az $\omega_{0,i}$ sajátértékekhez tartozó vektor koordináták.

A homogén egyenletrendszerből az x_1 és x_2 amplitúdók értéke nem határozható meg egyértelműen, csupán az elemek értékének egymáshoz viszonyított aránya számítható ki.

Bebizonyítható, hogy a sajátértékekhez tartozó vektorok merőlegesek egymásra, azaz ortogonális rendszert alkotnak. Az ilyen vektorokból esetenként kedvező tulajdonságú koordinátarendszert hozhatunk létre. A létrehozandó koordinátarendszer szempontjából célszerű lenne, ha az egymásra merőleges vektorok egyúttal egységvektorok is lennének.

Határozzuk meg először a komponensek arányát, utána pedig végezzük el az $x_1 - x_2$ koordináta - pár normálását.

Az $\omega_{0,1}$ – hez tartozó megoldás:

Helyettesítsük be az $\omega_{0,1} = 14.5316$ 1/s –ot az m_1-re vonatkozó frekvenciaegyenletbe

$(793.06 - 211.1675) * x_{1,1} - 793.06 * x_{2,1} = 0$
Legyen (válasszuk) $x_{1,1} = 1$ és innen $x_{2,1} = 0.73373$

Normáljuk az $\omega_{0,1}$ – hez tartozó $\underline{\mathbf{x}}_1$ segédvektort az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével (az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül):

$$\underline{x}_1^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}1; 0.73373\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1,0\\0,1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\0.73373\end{bmatrix} = 1.53836$$

Ez egy szám, egy skalár mennyiség, a vektor abszolút értékének (a vektor „hosszának", a merőleges komponensek átfogójának) a négyzete.
Ennek a négyzetgyöke a vektor „hossza". A vektor komponenseit a vektor „hosszával" elosztva az egységnyi hosszúságú vektor komponenseit kapjuk eredményül - az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével.

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{1.53836}} * \underline{x}_1 = \begin{bmatrix}0.80625\\0.59157\end{bmatrix}$$

Az $\omega_{0,2}$ – hez tartozó megoldás:

Az $\omega_{0,2} = 43.305$ 1/s –ot ismét az m_1-re vonatkozó frekvenciaegyenletbe helyettesítsük be

$(793.06 - 1875.28) * x_{1,2} - 793.06 * x_{2,2} = 0$
Legyen (válasszuk) $x_{1,2} = 1$ és innen $x_{2,2} = -1.36466$

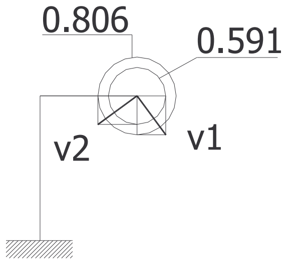
Normáljuk az $\omega_{0,2}$ – hez tartozó segédvektort az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrix közvetítésével (az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül)

$$\underline{x}_2^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{x}_2 = \begin{bmatrix}1; -1.36466\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1,0\\0,1\end{bmatrix} * \begin{bmatrix}1\\-1.36466\end{bmatrix} = 2.862297$$

Ennek a skalár mennyiségnek a négyzetgyöke a vektor „hossza". A vektor komponenseit a vektor „hosszával" elosztva az egységnyi hosszúságú vektor komponenseit kapjuk eredményül az $\underline{\mathbf{M}}$ tömegmátrixon keresztül.

$$\underline{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2.862297}} * \underline{x}_2 = \begin{bmatrix}0.59108\\-0.80662\end{bmatrix}$$

A $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ sajátvektorokat (oszlopvektorokat) egymás mellé rendezve a $\underline{\mathbf{V}}$ módosító (modál) mátrixot kapjuk, a $\underline{v}_1^T$ és $\underline{v}_2^T$ sajátvektorokat (sorvektorokat) egymás alá rendezve a $\underline{\mathbf{V}}^{\mathbf{T}}$ módosító (modál) mátrix transzponáltját kapjuk.



$$\underline{\mathbf{V}} = [\![\underline{v}_1 , \underline{v}_2]\!] = \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59108 \\ 0.59157; -0.80662 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{V}}^T = [\![\underline{v}_1^T , \underline{v}_2^T]\!] = \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59157 \\ 0.59108; -0.80662 \end{bmatrix}$$

Elvégezve az alábbi hármas mátrix szorzást

$$\underline{\mathbf{V}}^T * \underline{\mathbf{M}} * \underline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59157 \\ 0.59108; -0.80662 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1;0 \\ 0;1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59108 \\ 0.59157; -0.80662 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}}_2 = \begin{bmatrix} 1,0 \\ 0,1 \end{bmatrix}$$

látható, hogy a sajátvektorok az **M** tömegmátrix közvetítésével
- merőlegesek egymásra (ortogonálisak) és
- normáltak (egységnyi hosszúságúak).

Elvégezve továbbá az alábbi hármas mátrix szorzást

$$\underline{\mathbf{V}}^T * \underline{\mathbf{K}} * \underline{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59157 \\ 0.59108; -0.80662 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 793.06; -793.06 \\ -793.06; 1292.39 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.80625; 0.59108 \\ 0.59157; -0.80662 \end{bmatrix} =$$

$$= \underline{\mathbf{\Omega}} \simeq \begin{bmatrix} 211 & 0 \\ 0, & 1875 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2, & 0 \\ 0, & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix}$$

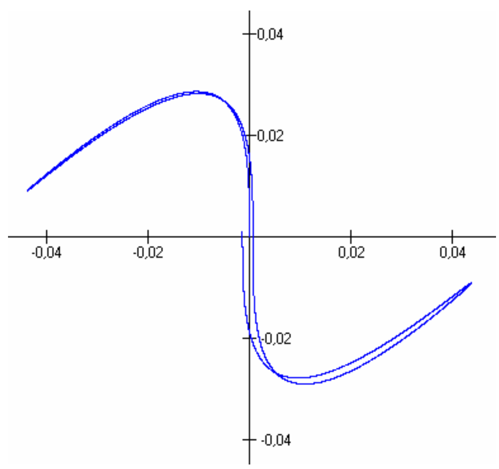
látható, hogy
- a sajátvektorok a **K** merevségi mátrix közvetítésével merőlegesek egymásra (ortogonálisak) és
- az **Ω** diagonálmátrix főátlójában $\omega_{0,1}^2$ és $\omega_{0,2}^2$ a sajátkörfrekvenciák négyzete szerepel.

A mellékelt ábrán a t = 0 időponthoz tartozó

$$\underline{x}(0) = \underline{x}_0 = \underline{0} \text{ és}$$

$$v(0) = \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} v_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kezdeti feltételekhez tartozó elmozdulásrendszer egy periódusa látható.



5.2 Csillapított szabad rezgések

5.3 Csillapítatlan gerjesztett rezgések

5.4 Csillapított gerjesztett rezgések