Matematika A/3-2 előadások

Építőmérnök BSc szak
PMKMANB004

1. Téma

A kétváltozós függvények differenciál-és integrálszámítása

PTE PMMIK Mérnöki Matematika Tanszék Perjésiné dr. Hámori Ildikó

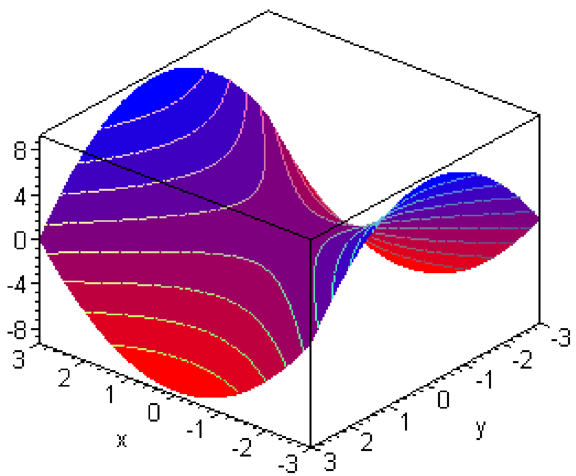
A kétváltozós függvények

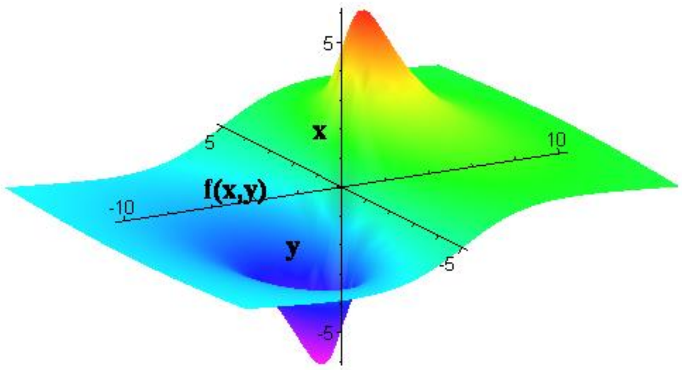
Definíció: Az olyan hozzárendelést, amely rendezett számpárhoz valós számot rendel, kétváltozós valós függvénynek nevezzük.

Jelölés: $z=f(x,y)$, vagy $(x,y)\rightarrow z$

Az értelmezési tartomány a derékszögű koordináta rendszerben az xy sík egy részhalmaza.

A kétváltozós függvény képe felület.





A kétváltozós függvények

Az egyváltozós függvényeknél megismert fogalmakat kell kiterjeszteni kétváltozós esetre.

Pontsorozat határértéke

analógia: *egyváltozós: Tetszőleges* $x_n \to x_0$, *de* $x_n \neq x_0$ *változósorozat*

kétváltozós: Tetszőleges $P_n(x_n, y_n) \to P_0(x_0, y_0)$ *pontsorozat*

Definíció: $P_n(x_n, y_n)$ pontsorozat tart P_o-hoz, ha tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz megadható olyan $n_0(\varepsilon)$ küszöbszám hogy ha $n > n_0(\varepsilon)$, akkor

$$\overline{P_n P_o} < \varepsilon$$

(A pontsorozat majdnem minden eleme beleesik a P_o *középpontú,* ε *sugarú körbe, vagyis* P_o ε *sugarú környezetébe.)*

A kétváltozós függvények

Adott pontban vett véges határérték

analógia: *egyváltozós: Tetszőleges* $x_n \to x_0$ *, de* $x_n \neq x_0$ *változósorozat esetén* $f(x_n) \to A$.

Definíció: *kétváltozós:* Tetszőleges $P_n(x_n, y_n) \to P_0(x_0, y_0)$, $P_n \neq P_0$ pontsorozat esetén $f(P_n) \to A$

Jelekkel: $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x,y) = A$

Pontbeli folytonosság

Definíció: Az *f(x,y)* kétváltozós függvény folytonos P_o pontban, ha

1 ; *f(x,y) értelmezett* P_o pontban, és annak bizonyos környezetében

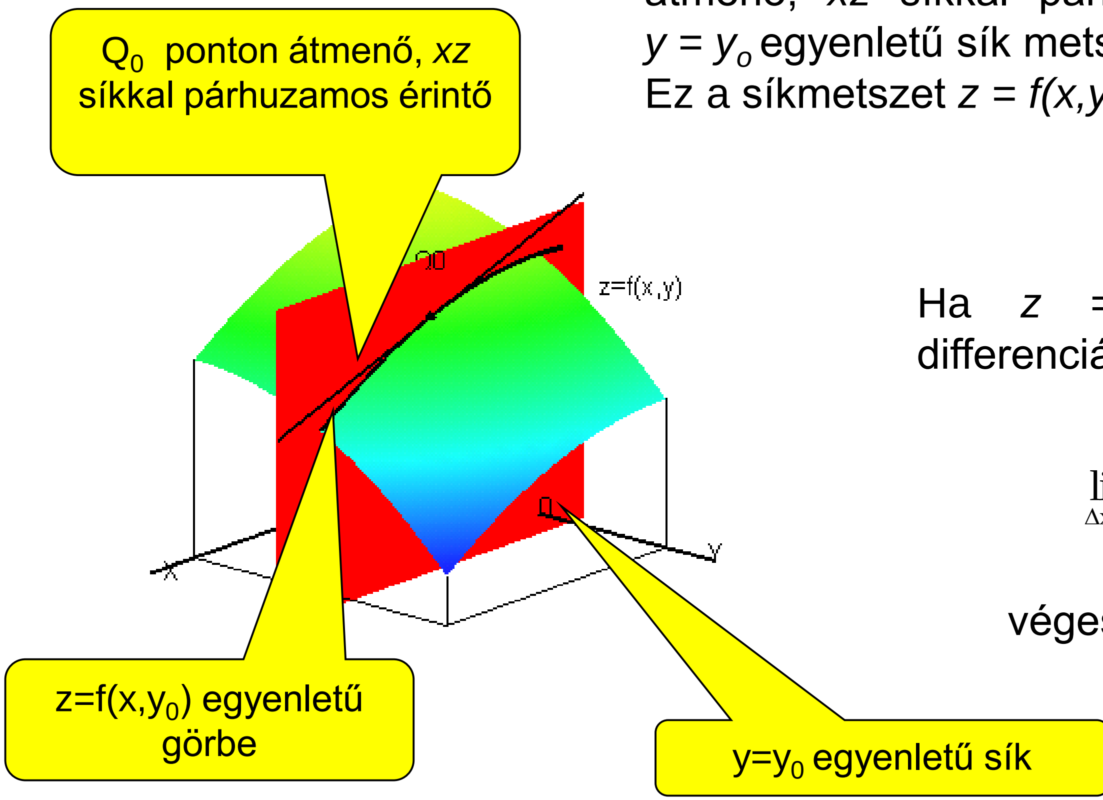
2; létezik $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x,y)$ véges határérték, és

3; $\lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

A kétváltozós függvények differenciálszámítása

x-szerinti parciális differenciálhányados

Tekintsük az $z = f(x,y)$ által adott felület és a Q_0 ponton átmenő, xz síkkal párhuzamos (y tengelyre merőleges) $y = y_o$ egyenletű sík metszetgörbéjét.
Ez a síkmetszet $z = f(x,y_o)$ egyváltozós függvény képe.:



Ha $z = f(x,y_o)$ egyváltozós függvény differenciálható x_0-ban, akkor létezik a

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_o + \Delta x, y_o) - f(x_o, y_o)}{\Delta x}$$

véges határérték.

A kétváltozós függvények differenciálszámítása

x-szerinti parciális differenciálhányados

Definíció: Ha a $z = f(x,y)$ függvény a P_0 pontban és környezetében értelmezett és az y rögzítésével kapott ($y=y_o$) $f(x,y_o)$ függvény x_o pontban differenciálható, akkor az $f(x,y_o)$ függvény x_o pontbeli differenciálhányadosát a $z = f(x,y)$ kétváltozós függvény P_0 ponthoz tartozó **x-szerinti parciális differenciál-hányados**ának nevezzük.

Jelölés: $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right/_{\substack{x=x_o \\ y=y_o}}$ $\quad f'_x(x_o, y_o)$

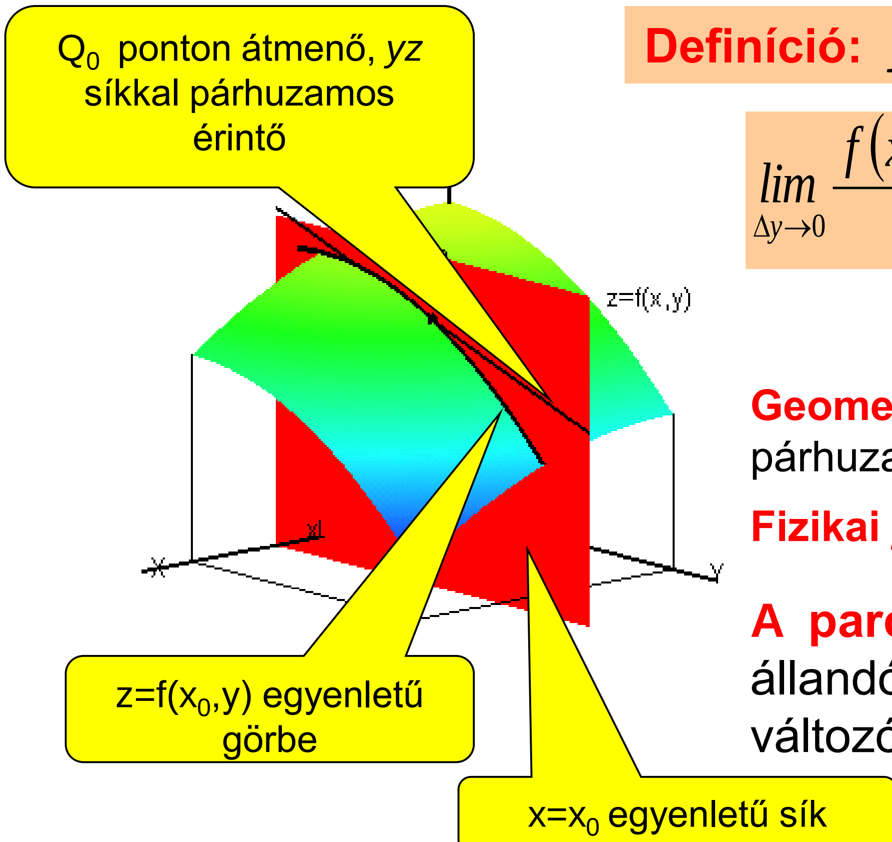
Geometriai jelentés: Q_0 ponton átmenő, xz síkkal párhuzamos metszetgörbe meredeksége.

Fizikai jelentés: x irányú változási sebesség

Definíció: x szerinti parciális derivált: az a kétváltozós függvény, melynek értelmezési tartománya azon pontok halmaza, amelyekben a kétváltozós függvény x-szerint parciálisan differenciálható, és értékei az ezen pontokban vett parciális differenciálhányadosok értékei.

A kétváltozós függvények differenciálszámítása

y-szerinti parciális differenciálhányados



Definíció: *y*-szerinti parciális differenciálhányados:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_o, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o)}{\Delta y} = \frac{\partial f}{\partial y} /_{\substack{x=x_o \\ y=y_o}} = f'_y(x_o, y_o)$$

Geometriai jelentés: Q_0 ponton átmenő, *yz* síkkal párhuzamos metszetgörbe meredeksége

Fizikai jelentés: *y* irányú változási sebesség

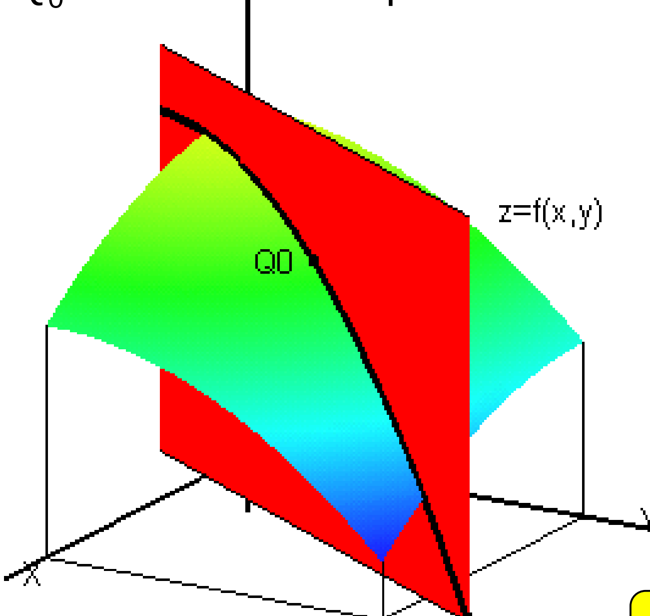
A parciális derivált képzése: y-t ill. x-et állandónak tekintve deriválunk az x ill. y változó szerint.

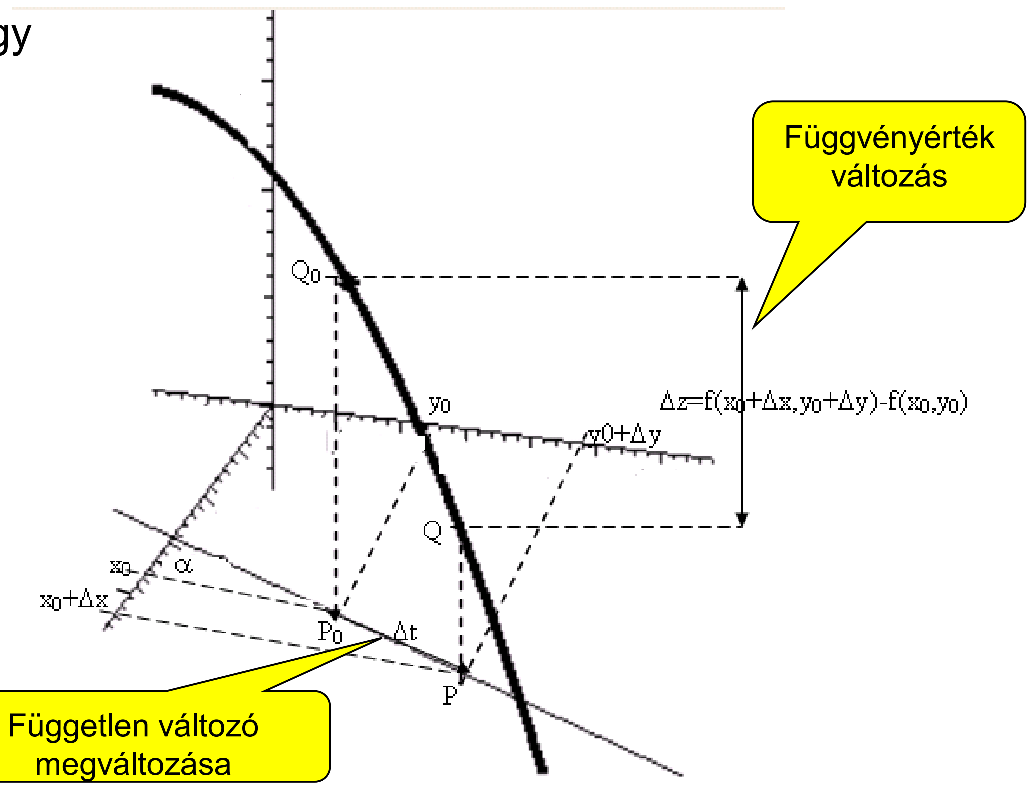
Iránymenti derivált

A parciális deriváltak x ill. y irányban mérik a függvény változási sebességét.
Határozzuk meg az x tengellyel α szöget bezáró irányban a változás sebességét!

Tekintsük az $z = f(x,y)$ által adott felület és a Q_0 ponton átmenő, x tengellyel α szöget bezáró sík metszetgörbéjét.

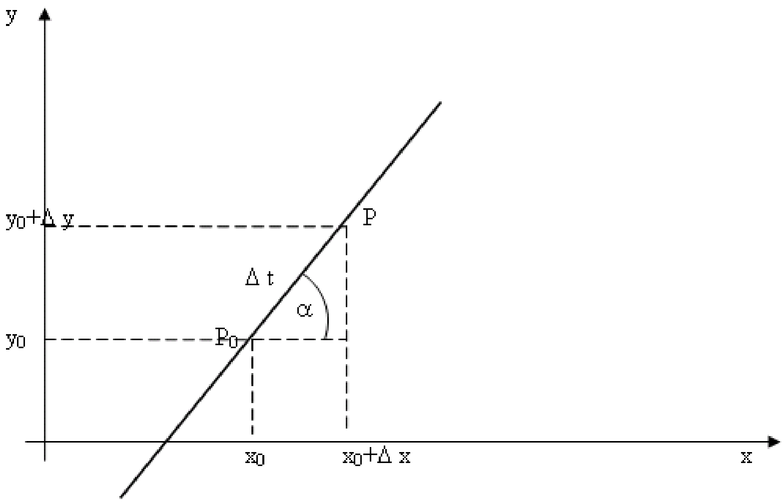
Ezen a metszetgörbén tekintsünk egy Q_0-tól különböző Q pontot!

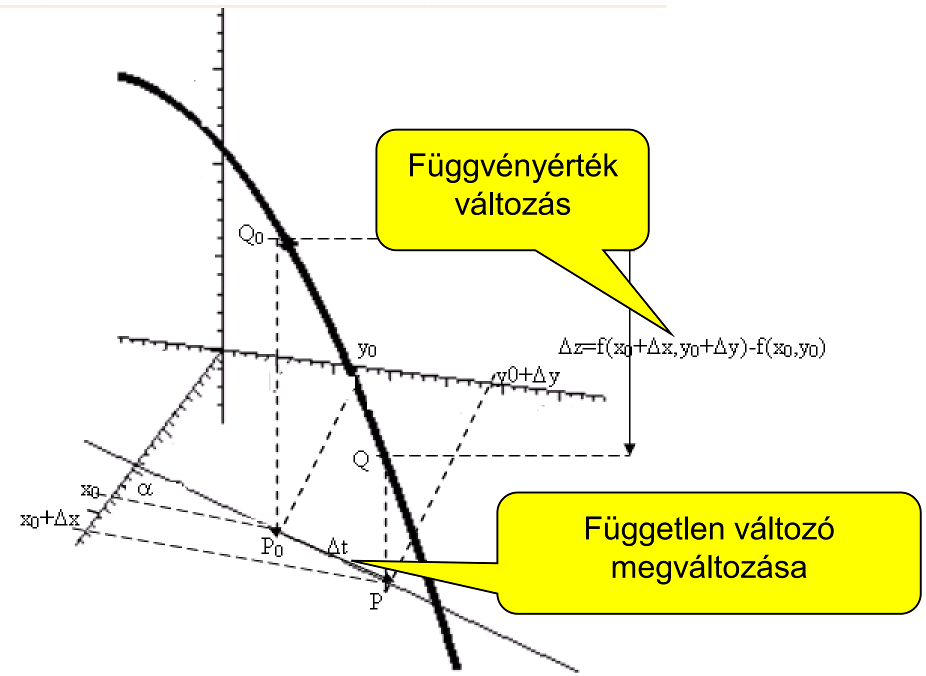




Iránymenti derivált

Ábrázoljuk az *xy* sík-beli vetületet:





$$\frac{\Delta z}{\Delta t}/_{P_o} = \frac{f(x_o+\Delta x, y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)}{\Delta t} = \frac{f(x_o+\Delta t\cos\alpha, y_o+\Delta t\sin\alpha)-f(x_o,y_o)}{\Delta t}$$

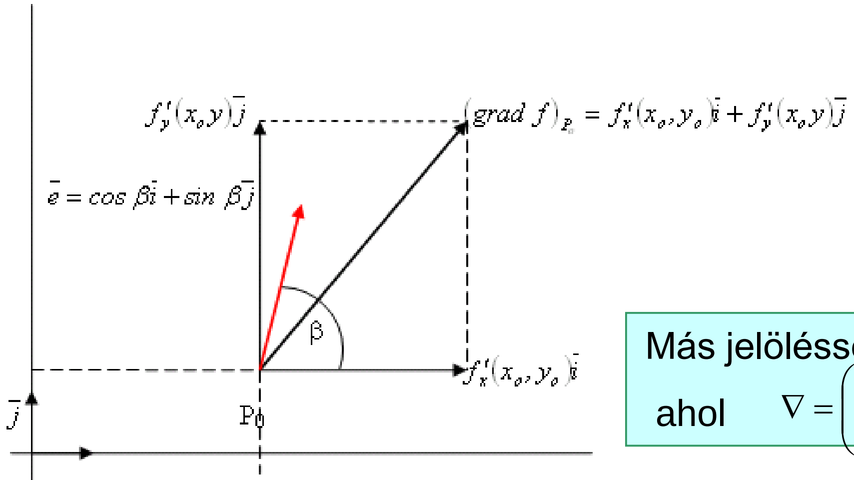
Definíció.: Ha a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}/_{P_o}$ határérték létezik és véges, azt az *f(x,y)* P_o pontbeli, α _**iránymenti derivált**jának nevezzük.

Jelölés: $f'_\alpha(x_o,y_o)$ $\quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}/_{P_o}$ **Kiszámítás:** $\frac{\partial z}{\partial \alpha}/_{P_o} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\sin\alpha$

A gradiens vektor

Melyik az az irány, amely mentén a leggyorsabban változik a kétváltozós függvény az adott pontban?

Tekintsük a következő, *xy* síkbeli vektort!



Definíció:

A $(grad\ f)_{P_o} = f'_x(x_o, y_o)\bar{i} + f'_y(x_o y)\bar{j}$ vektort az *f(x,y)* kétváltozós függvény P_o-beli **gradiens**ének nevezzük.

(A gradiensvektor az xy síkban van.)

Más jelöléssel: $grad\ f = \nabla f$ (nabla differenciáloperátor)

ahol $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$

Tekintsünk egy, az *xy* síkban, az *x* tengellyel β szöget bezáró egységvektort!

$$\bar{e}_\beta = cos\ \beta \cdot \bar{i} + sin\ \beta\ \bar{j}$$

Az egységvektor és a gradiensvektor skaláris szorzata:

$$\bar{e}_\beta \cdot (grad\ f)_{P_o} = f'_x(x_o, y_o) \cdot cos\ \beta + f'_y(x_o, y_o) sin\ \beta = \frac{\partial f}{\partial \beta} /_{P_o}$$

Ez pedig a β irányú iránymenti derivált értéke

Két vektor skaláris szorzata akkor maximális, ha a két vektor párhuzamos.

Tehát a **gradiensvektor** megmutatja az adott felület adott pontjában a **maximális változás** irányát.

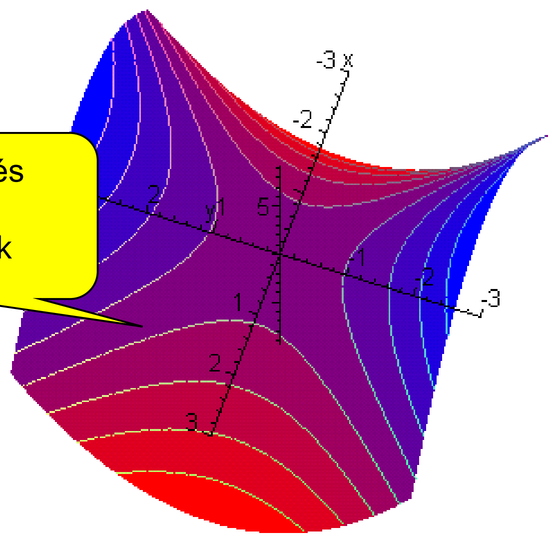
A gradiens vektor

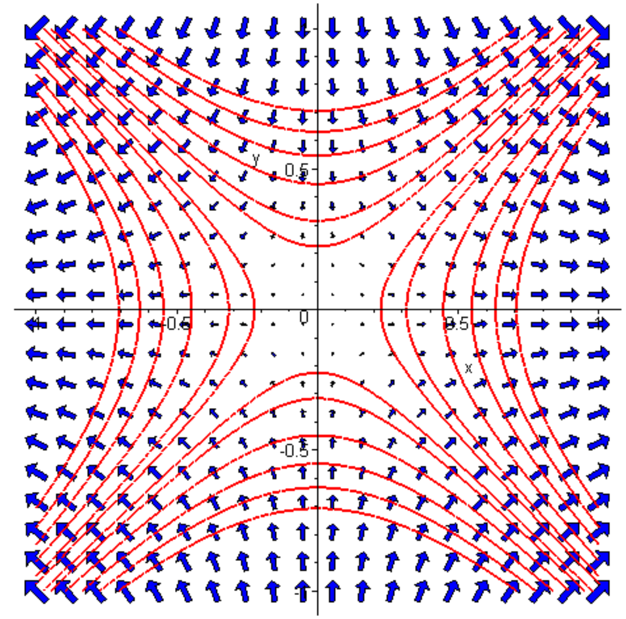
Milyen kapcsolat van a gradiensvektor és a szintvonal között?

A szintvonalak és a gradiensvektorok

Legyen $f(x,y)=x^2-y^2$

A függvény és *z=conts.* szintvonalak





Sejtés: a gradiensvektor merőleges a szintvonalra. Ha *f(x,y)=constans*, tetszőleges irányú deriváltja 0. Így ha az egységvektor a szintfelület érintőjének irányába mutat:

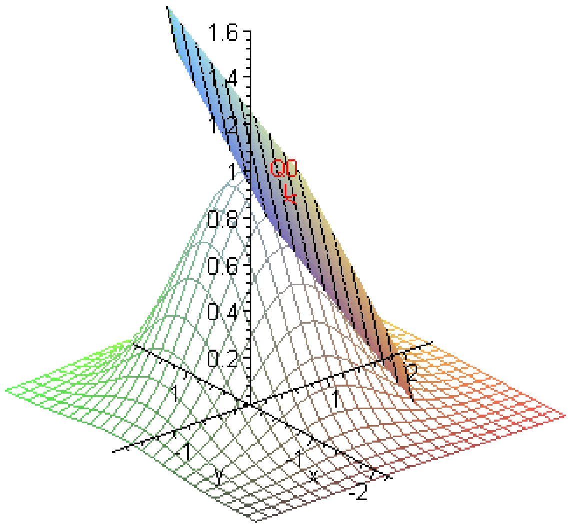
$$\bar{e}_{\beta} \cdot (grad\ f)_{P_o} = \frac{\partial f}{\partial \beta} /_{P_o} = 0$$

Két vektor skaláris szorzata akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra. Tehát a gradiensvektor merőleges a szintvonal adott pontbeli érintőjére.

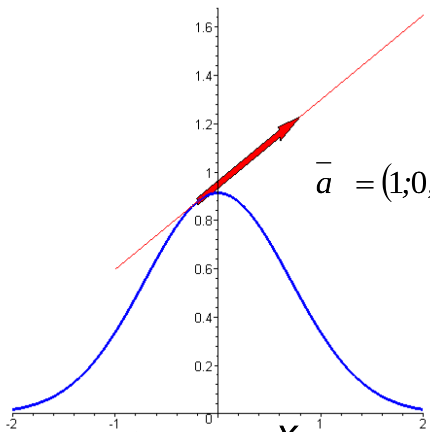
A felület érintősíkja

Legyen $Q_0\ (x_0,y_0,z_0)$ ahol $z_0=f(x_0,y_0)$. Keressük az érintősík normálvektorát.

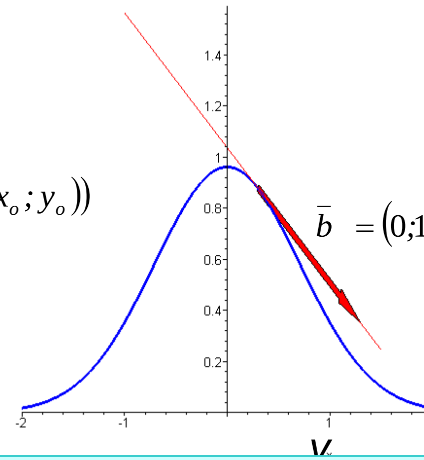
Legyen például $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$, $x_0=-0.3$, $y_0=0.2$



Adjuk meg az érintősík két vektorát! Ehhez adjuk meg az *yz* illetve az *xz* síkkal párhuzamos metszetgörbék érintőjének irányába mutató vektorokat!



$\bar{a} = (1;0;\ f_x'(x_o;y_o))$



$\bar{b} = (0;1;\ f_y'(x_o;y_o))$

A sík normálvektora ***a*** és ***b*** vektorok vektoriális szorzata

$$\bar{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 0 & f_x'(x_o,y_o) \\ 0 & 1 & f_y'(x_o,y_o) \end{vmatrix} = -f_x'(x_o,y_o)\bar{i} - f_y'(x_o,y_o)\bar{j} + \bar{k}$$

Az általános sík egyenlet: $\bar{n}\cdot(\bar{r}-\bar{r}_o)=0$

Tehát a felület $Q_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ pontbeli érintősíkjának egyenlete:

$$z - z_o = f_x'(x_o,y_o)(x-x_o) + f_y'(x_o,y_o)(y-y_o)$$

A függvényérték-változás közelíthető az érintősíkig való megváltozással.

A kétváltozós függvények szélsőértéke

Definíció: Az $f(x, y)$ függvénynek a $P_0(x_0, y_0)$ pontban szigorú lokális minimuma (maximuma) van, ha van P_0 olyan ε>0 sugarú környezete, melybe eső $\forall P \neq P_0$ esetén $f(P) > f(P_0)$ $(f(P) < f(P_0))$.

Tétel: Ha a $z=f(x,y)$ kétváltozós függvény parciálisan deriválható a P_0 pontban, valamint

$f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$

akkor az $f(x,y)$ függvénynek a P_o pontban szélsőértéke **lehet.**

(A szélsőérték létezésének **szükséges feltétele**)

Tétel: Tegyük fel, hogy a $z=f(x,y)$ kétváltozós függvény kétszer parciálisan deriválható a P_0 pontban, valamint $f'_x(x_0, y_0) = 0$ és $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Legyen
$$\begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix} = D$$

a; Ha $D>0$, akkor az $f(x,y)$ függvénynek a P_o pontban szélsőértéke **van.** (A szélsőérték létezésének **elégséges feltétele**) .

Ha $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ akkor minimum, ha $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ akkor maximum.

b; Ha $D<0$, akkor nincs szélsőérték.

c; Ha $D=0$, a szélsőérték fennállása így nem dönthető el.

A tartományon vett integrál

Legyen *T* részhalmaza a *z=0* síknak (*xy* síknak).

Legyen *z* = *f(x,y)* a T-n értelmezett és korlátos függvény.

1. Osszuk fel *T* tartományt tetszőlegesen *n* részre, a részterületek . $\Delta T_1, \Delta T_2, \ldots, \Delta T_i \ldots, \Delta T_n$

2. Mindegyik tartományból válasszunk ki egy tetszőleges $P_i(\xi_i, \eta_i)$ pontot.

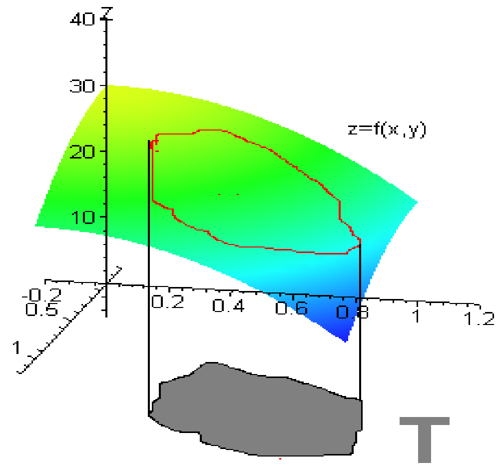
3. Képezzük a $f(P_i) = f(\xi_i, \eta_i)$ függvény érték és a ΔT_i területérték szorzatát. $f(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta T_i$
   Geometriai jelentés: ΔT_i alapú, $|f(\xi_i, \eta_i)|$ magasságú hasáb térfogata.

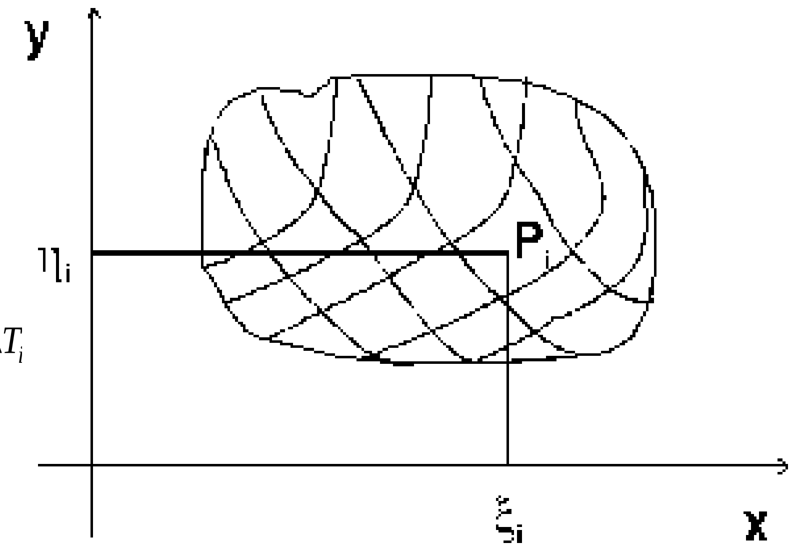
4. Képezzük az

$$S_n = f(\xi_1, \eta_1) \cdot \Delta T_1 + \ldots + f(\xi_i, \eta_i)\Delta T_i + \ldots + f(\xi_n, \eta_n)\Delta T_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta T_i$$

   összeget.

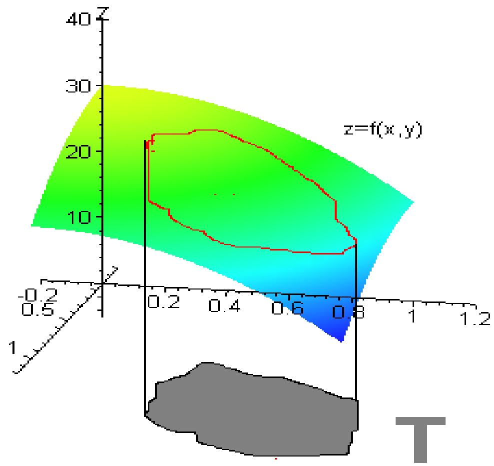
Ez az *f(x,y)* függvény *T* területen vett, egy **integrálközelítő összege**.





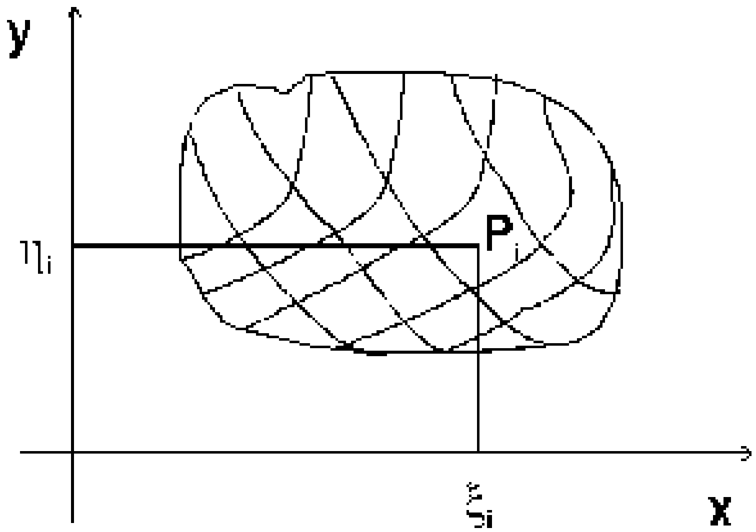
A tartományon vett integrál

5. Finomítsuk a T terület felosztását úgy, hogy
$n \to \infty$ és $max\Delta T_i \to 0$



Definíció: Ha az S_n integrálközelítő összegek sorozatának létezik a határértéke, és az bármely beosztás és $P_i(\xi_i,\eta_i)$ választástól függetlenül ugyanaz a szám, akkor az ***f(x,y)* függvény a T tartományon integrálható.**

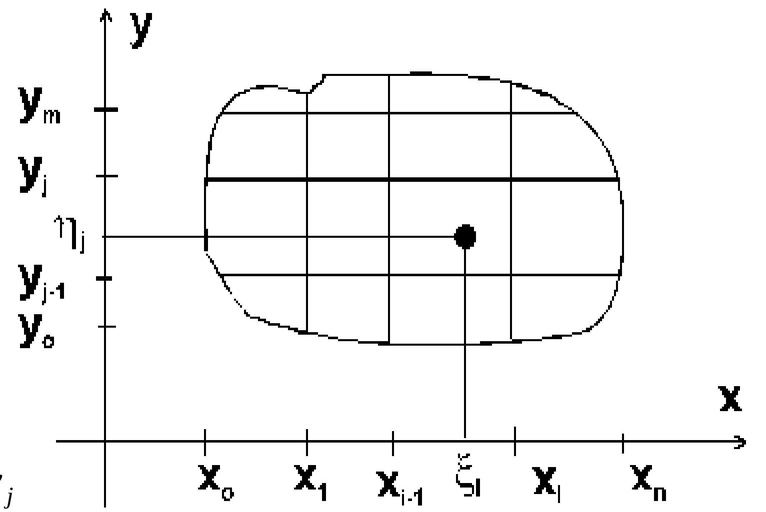
$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ max\Delta T_i\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta T_i = \iint_T f(x,y)\,dT$$



Geometriai jelentés: Ha $f(x,y) \geq 0$ és folytonos *T*-n, akkor az *f(x,y)* felület és az *xy* sík közé eső térrész térfogatának számértéke.

A kettős integrál

Legyen *f(x,y)* korlátos és értelmezett a *T* tartományon
T felosztása:
y tengellyel párhuzamosan *n* részre,
osztáspontok $x_o, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n$
Részintervallumok hossza: Δx_i
x tengellyel párhuzamosan *m* részre
$y_o, y_1, \ldots, y_{j-1}, y_j, \ldots, y_m$
Részintervallumok hossza: Δy_j
Egy kis belső részterület nagysága: $\Delta T_{i,j} = \Delta x_i \cdot \Delta y_j$



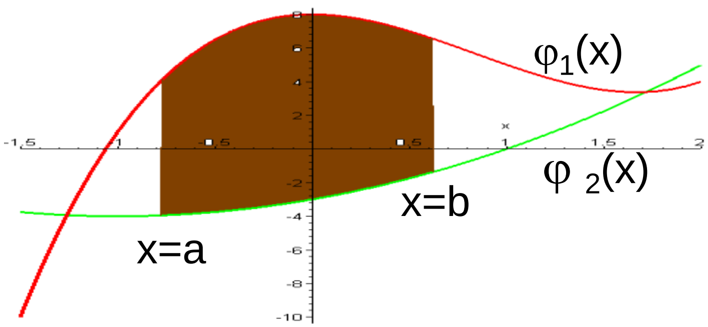
Ebből tetszőleges (ξ_i, η_j) koordinátájú ponthoz $f(\xi_i, \eta_j)$ függvény érték tartozik.
Így az integrálközelítő összeg kettős összegzéssel adódik: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta y_j \Delta x_i$

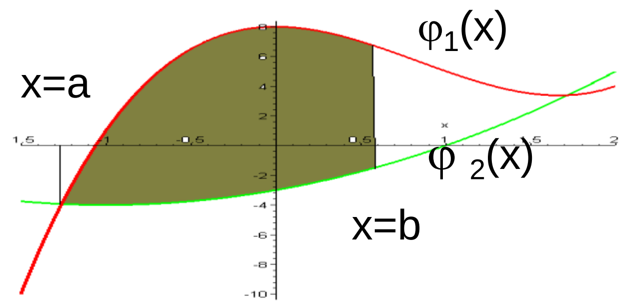
Definíció: Ha az S_n integrálközelítő összegek sorozatának létezik a határértéke, és az bármely beosztás és (ξ_i, η_j) választástól függetlenül ugyanaz a szám, akkor az ***f(x,y) függvénynek létezik a kettős integrálja a T tartományon***

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i, \eta_j) \cdot \Delta y_j \Delta x_i = \iint_T f(x,y)\,dx\,dy$$

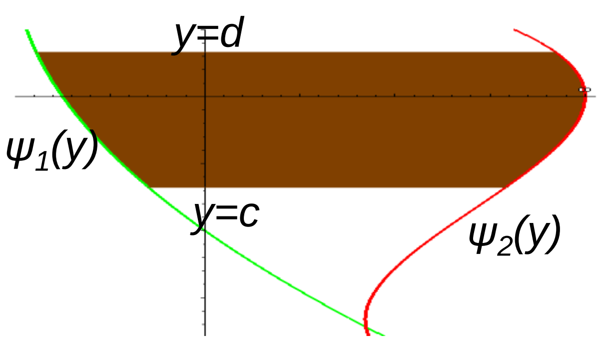
A normáltartomány

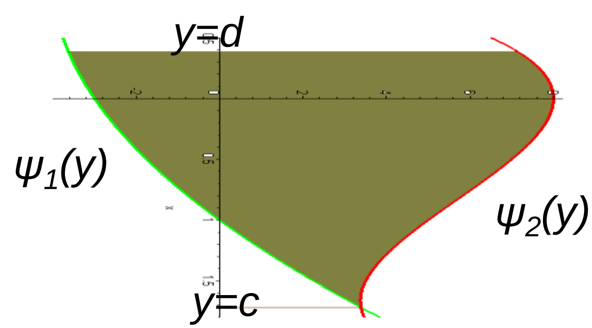
Definíció: Két, folytonos $\varphi_1(x)$ és $\varphi_2(x)$ függvény, $x=a$, $x=b$ $(a\neq b)$ egyenesek által meghatározott tartományt **x tengelyre nézve normáltartomány**nak nevezzük.





Definíció: Két, folytonos $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, függvény, és $y=c$, $y=d$ $(c\neq d)$ egyenesek által meghatározott tartományt **y tengelyre nézve normáltartomány**nak nevezzük.





A kettős integrál kiszámítása

Ha *f(x,y)* egy T_x-ben (**x tengelyre nézve normáltartományban**) integrálható, akkor az ezen tartományra vonatkozó kettős integrált úgy számítjuk ki, hogy először rögzített x érték mellett integrálunk a $y=\varphi_1(x)$ és $y=\varphi_2(x)$ határok között, majd az így kapott, csak x-től függő függvényt az állandó *x*=*a* és x=*b* határok között integráljuk

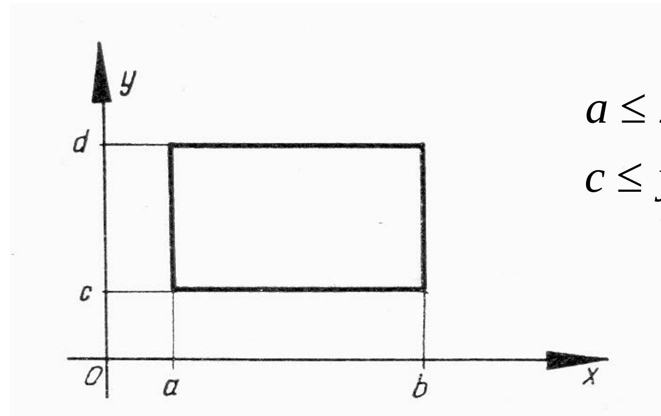
$$\iint\limits_{T_x} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{x=a}^{x=b}\left[\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

Ha *T* az ***y*-tengelyre normáltartomány**:

$$\iint\limits_{T_y} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{y=d}\left[\int\limits_{x=\Psi_1(y)}^{x=\Psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$

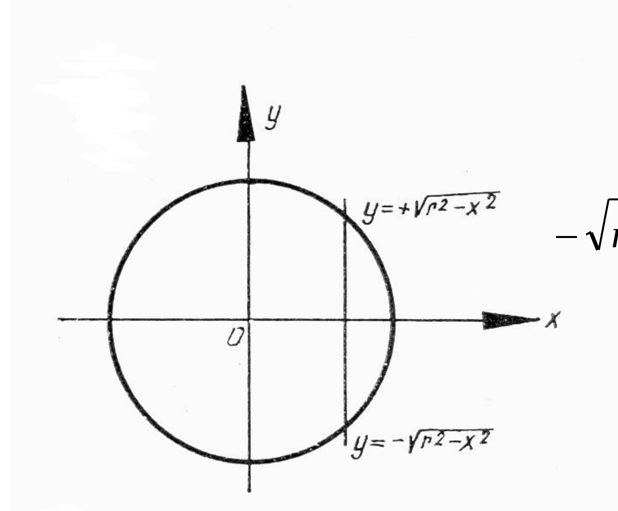
A kettős integrál változóinak transzformációja

Az előzőekben megmutattuk, hogy a kettős integrál kiszámítása akkor a legegyszerűbb, ha a határok állandóak.



$$a \le x \le b$$
$$c \le y \le d$$

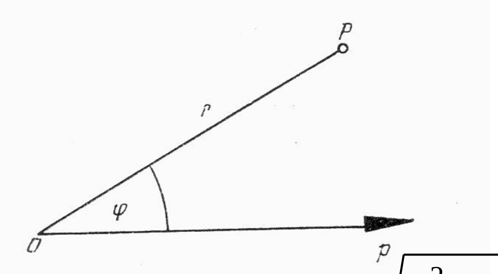
Ha az integrálási tartomány például kör, az integrálási határok irracionális egyenletű görbék. Az integrálok kiszámítása ilyen esetekben új változó bevezetésével könnyebb.



$$-\sqrt{r^2-x^2} \le y \le \sqrt{r^2-x^2}$$
$$-r \le x \le r$$

A kettős integrál változóinak transzformációja

Polárkoordináták: A *P* pont *x* és *y* koordinátája helyett a P pont origótól vett távolsága *r és az x* tengely pozitív felével bezárt szög φ legyen a két változó.



Ha az *x* és *y* változók helyett *r* és φ szerinti integrálásra térünk át, a helyettesítéses integrálásnál megismertek szerint *dxdy*-t is helyettesíteni kell.

$$x = r\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r\sin\varphi \qquad \varphi = arctg\,\frac{y}{x}$$

Definíció: Jacobi determináns

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$$

Polárkoordináták esetén a Jacobi determináns:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

Tétel: Legyen $r_1(\varphi)$ és $r_2(\varphi)$ az $\alpha \le \varphi \le \beta$ intervallumban folytonos, és ott $r_1(\varphi) \le r_2(\varphi)$. Legyen *T* az (*x*,*y*) síkon az a halmaz, amelynek pontjai polárkoodinátákban kelégítik az $\alpha \le \varphi \le \beta$ $r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$ egyenlőtlenségeket. (*T* polárkoordinátákban φ-re nézve normáltartomány.) Ha *f*(*x*,*y*) folytosnos *T*-n:

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T^*} f\left(x(r,\varphi), y(r,\varphi)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)}\right| drd\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,drd\varphi$$