Megoldás:

A hányadoskritériumot alkalmazva:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n\cdot x^n}{n^2}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\cdot 3|x|\right] = 3|x| < 1$$

A sor tehát $|x| < \frac{1}{3}$ esetén abszolut konvergens. A konvergenciasugár $r = \frac{1}{3}$. A sor az $x = -\frac{1}{3}$ és az $x = \frac{1}{3}$ pontokban is konvergens, mert az $x = \frac{1}{3}$ helyen az

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

az $x = -\frac{1}{3}$ esetén pedig a

$$-1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \dots$$

ismert konvergens numerikus sorokat kapjuk.
A konvergenciaintervallum tehát a $\left[-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{3}\right]$ zárt intervallum.

25. Határozzuk meg az alábbi sorok konvergenciatartományát!

25.1. $1 + x + \dots + x^n + \dots$

25.2. $\ln x + \ln^2 x + \dots + \ln^n x + \dots$

25.3. $\ln x + \ln x^2 + \dots + \ln x^n + \dots$

25.4. $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n-1}} + \dots$

25.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3^{n+1}}\, x^n$

25.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

25.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

25.8. $\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\, 3^{n-1}\cdot x^{n-1}$

25.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{x}{2^n}$

25.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$

25.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$

25.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n|x|}}{n}$

26. Példa: Határozzuk meg a $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$ hatványsor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

Megoldás:

Hányadoskritériummal azonnal látható, hogy a sor konvergenciatartománya a $(-1, 1)$ intervallum. A sor a +1 és a -1 helyen divergens.
Könnyen észrevehető, hogy a

/1/ $$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}$$

hatványsort a

/2/ $$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

hatványsor tagonkénti deriválásával kaphatjuk meg. A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható, és deriváltja a tagonkénti deriválással kapott sor összege. A /2/ sor összegfüggvénye a $(-1, 1)$-ben $\frac{1}{1-x}$, igy ennek deriváltja az /1/ sor összege, tehát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad |x| < 1$$

27. Példa: Igazoljuk, hogy $|x| < 1$ esetén:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$

Megoldás:

Azt kell igazolnunk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^2}{n}$ sor összegfüggvénye a $(-1, 1)$ intervallumban $\ln(1+x)$.
A sor a

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = 1 - x + x^2 + \dots$$

hatványsor tagonkénti integrálásával adódik.
/A konvergenciaintervallum bármely belső részintervallumában a hatványsor tagonként integrálható./

Mivel $|x| < 1$ esetén:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} = 1-x+x^2+\dots = \frac{1}{1+x}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x)$$

28. Számitsuk ki - tagonkénti integrálás vagy deriválás segitségével - az alábbi hatványsorok összegét:

28.1. $4x^3+8x^7+12x^{11}+\dots$

28.2. $-x + \frac{4}{2^2}x^3 - \frac{6}{2^3}x^5 - \frac{8}{2^4}x^7 - + \dots + (-1)^n \frac{2n.x^{2n-1}}{2^n} + \dots$

28.3. $x+2x^2+3x^3+\dots+n.x^n+\dots$

/Hogy adódik a sor a 26. példában szereplő sorból?/

28.4. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$

28.5. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

28.6. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + - \dots$

Taylor-sor, MacLaurin sor

29. Példa:

29.1. Irjuk fel az $f(x) = \cos x$ $x_o=0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát /MacLaurin sorát/!

29.2. Adjuk meg az $f(x) = \sin^2 x$ függvény hatványsorát!

Megoldás:

29.1. Az $f(x) = \cos x$ függvény minden pontban akárhányszor differenciálható, igy bármely pont körüli Taylor-sora felirható, s igazolható, hogy a felirt sor valóban előállitja a cos x függvényt. Az egyszerüség kedvéért választottuk az $x_o=0$ helyet.

A MacLaurin sor általános alakja:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots$$

Képezzük a cos x függvény differenciálhányadosait az $x_o=0$ helyen:

$$\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0 \\
f^{IV}(x) = \cos x & f^{IV}(0) = 1 \\
\dots & \dots
\end{array}$$

Mielőtt a sort felirnánk, vizsgáljuk meg a maradéktag Lagrange-féle alakjának segitségével, hogy mely x-ekre érvényes a sorfejtés.
A cos x függvény deriváltjai $\pm\sin x$ ill. $\pm\cos x$, ezért

$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| = 1$, s igy a maradéktag

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f(\xi)^{(n+1)}\right|}{(n+1)!}\left|x\right|^{n+1} \le \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \forall x \in V$$

Tehát a sorfejtés $\forall x \in V$ esetén előállitja a cosx függvényt:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

29.2. Tudjuk, hogy:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

Az y=cosx függvény sorának ismeretében azonnal felirhatjuk a cos 2x MacLaurin sorát:

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} + \dots =$$

$$= 1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \dots,$$

a sorfejtés konvergenciatartománya: V

Tehát:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{4x^2}{2!} + \frac{16x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) =$$

$$= \frac{2x^2}{2!} - \frac{8x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{2^{n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \qquad \forall x \in V$$

30. Irjuk fel a következő függvények $x_0=0$-hoz tartozó Taylor-sorát /MacLaurin sorát/! Állapitsuk meg minden esetben azt is, hogy a kapott sor mely x értékekre állitja elő a kérdéses függvényt, azaz mely x-ekre érvényes a sorfejtés.

30.1. $y = e^x$

30.2. $y = \text{sh } x$

30.3. $y = \text{ch } x$

30.4. $y = \sin x$

30.5. $y = (1+x)^m \quad (m \in T)$

30.6. $y = \ln(1+x)$

30.7. $y = \text{arctg } x$

31. Fejtsük hatványsorba az $x_0=0$ hely környezetében az alábbi függvényeket. Használjuk fel a 30. feladat megfelelő sorfejtését!

31.1. $y = e^{-x}$

31.2. $y = e^{x^2}$

31.3. $y = x.e^{-x^2}$

31.4. $y = \sin 2x$

31.5. $y = \sin x \cos x$

31.6. $y = \frac{1+\cos 2x}{2}$

31.7. $y = \cos^2 x$

31.8. $y = \ln(1-x)$

31.9. $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

A hatványsorok alkalmazásai

32. Taylor-sorba fejtés segitségével rendezzük

32.1. az $f(x) = x^4-x+1$ polinomot $x-1$ hatványai szerint,

32.2. az $f(x) = x^3-5x^2-2$ polinomot $x+3$ hatványai szerint!

33. Példa: Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha a sinx függvényt a $[0, 1]$ intervallumban az

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Taylor-polinommal közelitjük?

Megoldás:

A sin x függvényre alkalmazott $x_0=0$ ponthoz tartozó Taylor-formula /MacLaurin-formula/ a maradéktaggal n=6-ra:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{(\sin x)^{(7)}_{x=\xi}}{7!} x^7 \qquad (0 < \xi < x)$$

A maradéktagot becsüljük felülről a $0 \leq x \leq 1$ feltételnek megfelelően. Ha figyelembe vesszük, hogy

$$-1 \leq \sin x^{(7)}_{x=\xi} \leq 1$$

akkor

$$|R_6| = \left| \frac{(\sin x)^{(7)}_{x=\xi}}{7!} x^7 \right| \leq \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < 2.10^{-4}$$

Az elkövetett hiba tehát kisebb mint 2.10^{-4}.
A sinx függvény a felirt ötödfokú Taylor-polinommal három tizedesjegy ponotsséggal számitható ki a $[0, 1]$ intervallum bármely pontjában.

34. Megfelelő sorfejtések alkalmazásával számitsuk ki az alábbi függvényértékeket a megadott pontossággal:

34.1. $\sin 18^\circ$ $\quad 10^{-5}$ pontossággal

34.2. $\cos 1^\circ$ $\quad 10^{-6}$ pontossággal

34.3. e $\quad 10^{-3}$ pontossággal

34.4. ln 1,2 $\quad 10^{-4}$ pontossággal

*34.5. ln 3 $\quad 10^{-3}$ pontossággal

35. Példa: Határozzuk meg 10^{-4} pontossággal az

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$ integrál értékét!

Megoldás:

Az $\int_0^x e^{-t^2} dt$ nem elemi függvény. Először állitsuk elő az e^{-x^2} sorát. Ez az e^x sorából nyerhető, ha x helyébe $-x^2$-et irunk:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

A kapott sor minden x-re konvergens. Mivel hatványsor, tagonként in-

36.3. $y(x) = \int_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$

36.4. $y(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t}\,dt$ /az arctg x sorát ld. 30.7./

37. Határozzuk meg 0,001 pontossággal az alábbi integrálok értékét:

37.1. $\int_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$

37.2. $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x}\,dx$

37.3. $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$

37.4. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$