$\frac{df}{de}$ maximális, ha $\underline{e}$ és $\operatorname{grad} f(x,y)|_{P_0}$ párhuzamosak, tehát a P_0 helyen a $\operatorname{grad} f(x,y)|_{P_0}$ vektor jelöli ki az (x,y) síkon az $f(x,y)$ függvény leggyorsabban történő változásának irányát.

Az adott függvény gradiense a megadott P_0 helyen:

$$\operatorname{grad} f(x,y)|_{(1;2)} = 2\underline{i} + 6\underline{j}$$

23. Határozzuk meg az alábbi függvények iránymenti deriváltját az adott helyen, a megadott irányban.

23.1. $z = x^2+3y^2$	$P_0(-2;1)$	$\alpha = 30^\circ$
23.2. $z = x^y$	$P_0(2;3)$	$\alpha = \frac{\pi}{4}$
23.3. $z = xy - \frac{3}{xy}$	$P_0(4;-2)$	$\alpha = 120^\circ$
23.4. $z = \sqrt{x^2+y^2}$	$P_0(3;4)$	$= \frac{7\pi}{6}$
23.5. $z = x^2-y^2$	$P_0(1;1)$	$\alpha = 60^\circ$, $\alpha = 240^\circ$

24. Határozzuk meg az alábbi függvények gradiensét a megadott pontban!

24.1. $z = 6xy$	$P_0(3;5)$
24.2. $z = 4x^2+3y^2$	$P_0(1;7)$
24.3. $z = \sin x \cos y$	$P_0(0;\frac{\pi}{3})$
24.4. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$	$P_0(1;1)$

25. A $z = e^x + \frac{y^2}{2}$ függvény a $P_0(0;\sqrt{3})$ helyen milyen irányban változik a leggyorsabban, és ebben az irányban mekkora a változási sebesség értéke?

26. Határozzuk meg a $z = x^2-y^2$ függvény $A(C;0)$ és $B(0;C)$ helyeihez tartozó gradienseinek hajlásszögét!

Integrálszámítás

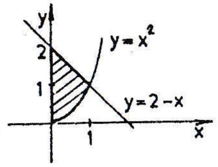
27. Példa: Szemléltessük a következő tartományt:

$$T = \{(x;y) \mid x \geq 0\} \cap \{(x;y) \mid x^2 \leq y \leq 2-x\}$$

Számítsuk ki az $\iint\limits_T xy\,dy\,dx$ integrál értékét, majd cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és ismét határozzuk meg az integrál értékét!

Megoldás:

Az integrációs tartomány



Tx

Ha először y szerint integrálunk és azután x szerint, akkor

$$x^2 \leq y \leq 2-x$$
$$0 \leq x \leq 1,$$

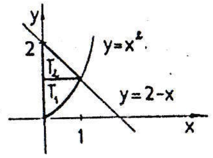
és így:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{2-x} xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{2-x} dx = \int_0^1 \left(x\frac{(2-x)^2}{2} - x\frac{x^4}{2}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} - 2x^2+2x - \frac{x^5}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{2}{3}x^3 + x^2 - \frac{x^6}{12}\right]_0^1 = \frac{3}{8}$$

Ha az integrálás sorrendjét felcseréljük, akkor az alaptartományt két részre kell osztanunk:

$$T_1 = \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{y} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Ty

$$T_2 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2-y \\ 1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Így:

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} xy\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^{\sqrt{y}} dy +$$

$$+ \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_0^{2-y} dy = \int_0^1 \frac{y^2}{2}dy + \int_1^2 \left(2y-2y^2+\frac{y^3}{2}\right)dy =$$

$$= \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^1 + \left[y^2 - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^4}{8}\right]_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{5}{24} = \frac{3}{8}$$