9. Számitsuk ki a következő határértékeket!

9.1. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$ 9.2. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ 9.3. $\lim\limits_{\substack{x\to 1 \\ y\to 0}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Differenciálszámitás

10. Határozzuk meg az alábbi függvények elsőrendü parciális deriváltjait!

10.1. $z = 2x^3-5x^2y+3xy^2-8y^2+7xy+6x$

10.2. $z = \ln x^y$

10.3. $z = y \cos x + x \cos y$

10.4. $z = xe^y + y.e^x$

10.5. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

10.6. $z = 2xy + ye^{\sqrt{3-x}}$

10.7. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

10.8. $z = x^{y^2}$

10.9. $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$

10.10. $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$

11. Példa: Határozzuk meg a $z = x^2+2y^2$ függvény által meghatározott felület érintősikjának egyenletét az $x_o=2$, $y_o=1$ helyhez tartozó pontban.

Megoldás:

A $z = f(x,y)$ felület $(x_o;y_o)$ helyhez tartozó érintősikjának egyenlete:

$$z-z_o = f'_x(x_o,y_o)(x-x_o) + f'_y(x_o,y_o)(y-y_o)$$

$x_o=2$, $y_o=1$, igy $z_o=f(2,1) = 6$

A függvény parciális deriváltjai:

$$f'_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \qquad f'_y(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y} = 4y$$

Igy: $f'_x(2,1) = 4$, $f'_y(2,1) = 4$

Tehát az érintősik egyenlete:

$$z-6 = 4(x-2) + 4(y-1)$$

azaz:

$$4x+4y-z = 6$$

Megjegyzés: A parciális deriváltak geometriai jelentését felhasználva, kiszámithatjuk az adott pontbeli érintősik normálvektorát.

$$\underline{n} = \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 ,$$

ahol $\underline{e}_1$ jelenti az adott ponton átmenő (y,z) sikkal párhuzamos érintő irányvektorát, $\underline{e}_2$ pedig az adott ponton átmenő (x,z) sikkal párhuzamos érintő irányvektorát jelenti.

$\underline{e}_1 = (0;1;f'_y(x_o,y_o))$

$\underline{e}_2 = (1;0;f'_x(x_o,y_o))$

$\underline{n} = (f'_x(x_o,y_o) ; f'_y(x_o,y_o) ; -1)$

Tehát $\underline{n} = (4; 4; -1)$, a sik egyenlete pedig

$$4(x-2) + 4(y-1) - (z-6) = 0 ,$$

azaz

$$4x + 4y - z = 6$$

12. Határozzuk meg az alábbi felületek adott $(x_o;y_o)$ helyhez tartozó pontjában az (x,z), illetve (y,z) koordinátasikokkal párhuzamos metszetgörbék érintőinek iránytangensét!

12.1. $z = x^2y$ $x_o=1$ $y_o=2$

12.2. $z = \sin^2x-y^2$ $x_o = \frac{\pi}{3}$ $y_o=1$

12.3. $x^2+y^2+z^2 = 4$ $x_o=0,5$ $y_o=1$

12.4. $z = \sqrt{4x^2+8y^2}$ $x_o=1$ $y_o=2$

12.5. $z = \cos(x+\sqrt{3}\,y)$ $x_o = \frac{\pi}{4}$ $y_o=0$

13. Határozzuk meg az alábbi felületek érintősikjának egyenletét a megadott helyhez tartozó pontban!

13.1. $z = \cos(x-2y)$ $x_o = \frac{\pi}{2}$ $y_o = \frac{\pi}{4}$

13.2. $z = xy$ $x_o=2$ $y_o=6$

13.3. $z = \sin^2x-y^2$ $x_o = \frac{\pi}{6}$ $y_o = 2$

13.4. $z = \sqrt{x^2-2y^2}$ $x_o = 3$ $y_o = 2$