12.2. Példa: Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ $/ \alpha > 0,\ \alpha \in V/$ sor konvergen

Megoldás:

A sort a 4.4. feladatban szereplő - konvergens -

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right] \quad / \alpha > 0,\ \alpha \in V/$$ sorral hasonlitjuk

össze.

Alkalmazzuk az $\frac{1}{x^{\alpha}}$ függvényre az $[n-1,\ n]$ intervallumor a Lagrange-féle középértéktételt:

$$\frac{1}{n^{\alpha}} - \frac{1}{(n-1)^{\alpha}} = -\frac{\alpha}{\xi^{1+\alpha}} \quad /n-1 < \xi < n/$$

azaz

$$\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}} = \frac{\alpha}{\xi^{1+\alpha}}$$

Igy $n \geq 2$ esetén:

$$\frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right] = \frac{1}{\xi^{1+\alpha}} > \frac{1}{n^{1+\alpha}} > 0$$

Tehát a sor tagjai $n \geq 2$ esetén kisebbek a $\sum_{n=2} \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right]$ sor tagjainál, az utóbbi sor konvergens, hiszen tagjai a $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(n-1)^{\alpha}} - \frac{1}{n^{\alpha}}\right]$ sor tagjainak $\frac{1}{\alpha}$-szeresei.

Igy a tekintett sor is konvergens. /majoránskritérium/

13. Ismert sorokkal összehasonlitva vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját:

13.1. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}} + \dots$

13.2. $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{4} + \dots + \sin\frac{\pi}{2^n} + \dots$

13.3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots$

13.4. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \dots + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n} + \dots$

7.5. $0,2 - 0,02 + 0,002 - \dots$

7.6. $\frac{1}{3.4} \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3.4} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3,4} \cdot \frac{1}{3^6} + \dots$

8. Milyen "a"-ra konvergensek az alábbi sorok?

8.1. $\frac{3}{a} - \frac{3^4}{a^2} + \frac{3^7}{a^3} - \frac{3^{10}}{a^4} + - \dots$

8.2. $2 + 8a + 32\,a^2 + \dots$

8.3. $\frac{1+a}{1-a} + \frac{1-a}{1+a} + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^{2n-3} + \dots$

9. A φ mely értékei esetén létezik az

9.1. $S_1 = \sin\varphi + \sin^2\varphi + \dots + \sin^n\varphi + \dots$
összeg? Határozzuk meg az összeget, mint φ függvényét!

9.2. Határozzuk meg az S_2 összeget, ha

$$S_2 = S_1 + S_1^2 + \dots + S_1^n + \dots$$

10. Irjuk fel a következő szakaszos végtelen tizedestört alakban megadott racionális számokat két egész szám hányadosaként.

10.1. $0,\dot{2}$	10.4. $0,2\dot{3}$
10.2. $0,\dot{1}\dot{9}$	10.5. $0,2\dot{3}\dot{4}$
10.3. $0,\dot{3}4\dot{2}$	10.6. $7,\dot{1}\dot{9}$

/Pl.: $0,\dot{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{10^2} + \dots + \frac{5}{10^n} + \dots$/

Konvergenciakritériumok alkalmazása

11. Példa: Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ sor konvergens!