16. Vizsgáljuk az alábbi sorok konvergenciáját a Cauchy-féle gyökkritérium segítségével:

16.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$

16.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$

16.3. $\sum_{n=1}^{\infty} n.\left(\frac{3}{4}\right)^n$

16.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

16.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$

16.6. $\sum_{n=1}^{\infty} n^{100}.e^{-2n}$

16.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$

16.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$

17. Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját a hányadoskritérium segítségével:

17.1. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \dots + \frac{n^2}{3^n} + \dots$

17.2. $\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots$

17.3. $\frac{1000}{1!} + \frac{1000^2}{2!} + \dots + \frac{1000^n}{n!} + \dots$

17.4. $1 + \frac{4}{1.2} + \dots + \frac{n^2}{n!} + \dots$

17.5. $\frac{(1!)^2}{2!} + \frac{(2!)^2}{4!} + \dots + \frac{(n!)^2}{(2n)!} + \dots$

17.6. $\frac{2.1!}{1} + \frac{2^2.2!}{2^2} + \frac{2^3.3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n.n!}{n^n} + \dots$

17.7. $\frac{3.1!}{1} + \frac{3^2.2!}{2^2} + \frac{3^3.3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n.n!}{n^n} + \dots$

17.8. $\frac{2}{2} + \frac{2.3}{2.4} + \dots + \frac{(n+1)!}{2^n.n!} + \dots$

17.9. $\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{4} + \dots + n^2\sin\frac{\pi}{2^n} + \dots$

18. Példa: Igazoljuk, hogy a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{1+\alpha} n}$ sor $\alpha = 0$ esetén divergens, $\alpha > 0$ esetén konvergens.

Megoldás:

Mivel az $f(x) = \frac{1}{x\ln^{1+\alpha} x}$ függvény $x > 1$ esetén folytonos, pozitív és monoton csökkenő, alkalmazható az integrálkritérium:

1. $\alpha = 0$ $\quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x.\ln x}\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_2^{B} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{B\to\infty} \left[\ln\ln x\right]_2^B = \infty,$

tehát a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ sor divergens.

2. $\alpha > 0$ $\quad \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^{1+\alpha} x}\,dx = \lim_{B\to\infty} \int_2^{B} \frac{1}{x\ln^{1+\alpha} x}\,dx = \lim_{B\to\infty} \left[-\frac{1}{\alpha\ln^{\alpha} x}\right]_2^B = \frac{1}{\alpha.\ln^{\alpha} 2},$

/konstans!/

tehát a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^{1+\alpha} n}$ / $\alpha > 0$/ sor konvergens.

Megjegyzés: Példánkban az integrálás alsó határa 2, de ha a sor n=1-től értelmezett, akkor természetesen 1 az alsó határ!

19. Vizsgáljuk a következő sorok konvergenciáját az integrál-kritérium segítségével:

19.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

19.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

19.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $/\alpha \in V/$

19.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$

19.5. $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$

19.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

19.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}$

20. Vizsgáljuk meg, hogy konvergensek-e az alábbi sorok:

20.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n.2^n}$

20.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$