Ha a fenti eljárást végrehajtjuk a *g* görbe által határolt teljes felületen, és a rot **v** normálvektor irányú vetületeit összegezzük a teljes felületre, kapjuk:

Tétel **Stokes-tétele**. Legyen **v**=**v**(**r**) és parciális deriváltjai az F irányított felületdarabon és annak ***g*** zárt görbével megadott határán folytonosak. Ekkor

$$\iint_F \mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\overline{F} = \oint_g \mathbf{v}\,d\mathbf{r}$$

F irányítottsága olyan, hogy g irányítottsága és minden d**F** felületelem **n** normálvektora jobbrendszert alkot.

A tétel egy speciális esete, ha $\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}$, valamint az F felület az xy sík egy zárt T tartománya, g ennek határoló görbéje.

Tétel **Green-formula**:

$$\oint_g v_1 dx + v_2 dy = \iint_T \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Ekkor ugyanis a sík normálvektora **k**, és a rot **v** vektor **k** irányú vetülete

$$\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} .$$

3. Végtelen sorok

3.1. Számsorok

3.1. 1. A végtelen sor fogalma, a geometriai sor

Definíció Az $a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ egy sorozat tagjainak összegét, az

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

végetelen összeget **végtelen sor**nak nevezzük.

Jelölés: $$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Az a_n értéket a sor n-edik tagjának, az $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ értéket pedig a sor n-edik **részletösszeg**ének nevezzük.

Definíció Ha a részletösszegek $\{s_n\}$ sorozata a **konvergens** és határértéke S, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor az S számértékhez tart, vagy más szavakkal a **sor összege** S.

Tehát $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ vagy $a_1+ a_2+\ldots+ a_n+\ldots=S$

Ha a részletösszegek sorozatának nincs véges határértéke, azaz, ha $\{s_n\}$ divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **divergens**nek mondjuk.

Definíció Az $a+aq+aq^2+ aq^3+\ldots+ aq^{n-1}+\ldots$ alakú sort **geometriai** vagy mértani **sor**nak nevezzük. A q-t a geometriai sor hányadosa vagy kvóciense.

Tétel **A geometriai sor tétele** Ha $|q| < 1$, akkor az $a+aq+aq^2+ aq^3+\ldots+ aq^{n-1}+\ldots$ geometriai sor az $\frac{a}{1-q}$ értékhez konvergál. Ha $|q| \geq 1$, akkor a sor divergens, kivéve az a =0 értéket. Ha a = 0, akkor a sor konvergens és összege 0.

Tétel Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Más szavakkal: a sor kongergenciájának szükséges feltétele, hogy az általános tagja 0-hoz tartson.

3.1.2. Nemnegatív tagú sorok összehasonlító konvergencia-kritériumai

Legyen a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor nemnegatív tagú. (azaz $a_n \geq 0$ minden n-re)

Majoráns kritérium Ha $a_n \leq b_n$ teljesül (legfeljebb véges sok elempár kivételével) és a $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is **konvergens.**

Minoráns kritérium Ha a nemnegatív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ sor divergens és $d_n \leq a_n$ teljesül (legfeljebb véges sok elempár kivételével), akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **divergens.**

Gyökkritérium Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan n_0 index, hogy $n_0 < n$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q < 1$, akkor a sor konvergens.

Következmény Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$ határérték, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens.

Ha q = 1, akkor ezen az úton nem dönthetünk a konvergenciáról, ha $q > 1$, akkor a sor divergens.

Hányadoskritérium Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorhoz van olyan n_0 index, hogy $n_0 < n$ esetén $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$, akkor a sor konvergens.

Következmény: Ha létezik a $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$ határérték, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens. Ha q = 1, akkor ezen az úton nem dönthetünk a konvergenciáról, ha $q > 1$, akkor a sor divergens.

Integrálkritérium Legyen az f(x) függvény pozitív értékű, folytonos és monoton csökkenő, ha $1 \le x$. Legyen $f(n)=a_n$.

Ekkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor (másképp írva $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$) és az $\int_1^{\infty} f(x)dx$ impoprius integrál egyszerre konvergens, vagy divergens.

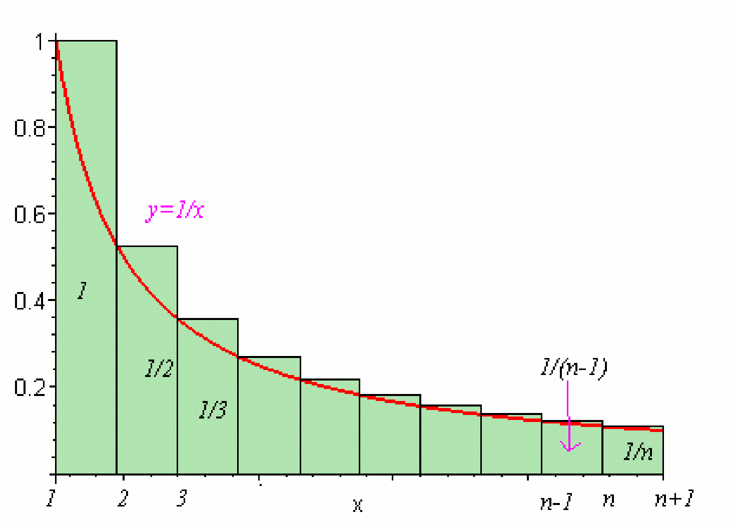
3.1.3.A harmonikus és a hiperharmonikus sor

Tétel A **harmonikus sor**, azaz a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \ldots$$

sor **divergens**.

Bizonyítás: A harmonikus sor tagjainak geometriai reprezentációját nem nehéz megadni: olyan téglalapok területének számértékével egyenlők, amelyeknek alapja 1, magassága pedig rendre$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ A sor első n tagjának összege, vagyis a sor n-edik részletösszege olyan n db téglalappal repezentálható, amelyek mindegyikének területe nagyobb, mint az $\frac{1}{x}$ függvény megfelelő intervallumra eső görbe alatti területe:



16. ábra A harmonikus sor

Tehát $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx < s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$. Mivel az $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$, így a sor sem lehet konvergens.

Tétel A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, különben divergens.

3.1.4. Leibniz tipusú sorok, abszolút- és feltételes konvergencia

A nemnegatív sorokra kifejlesztett, a konvergencia eldöntését szolgáló eljárásokat most kiterjesztjük negatív és pozitív tagokat egyaránt tartalmazó sorokra.

Definíció Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **abszolút konvergens**nek mondjuk.

Tétel Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor is konvergens.

Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor tagjai között negatívak és pozitívak is vannak, akkor a sor konvergenciáját vizsgálhatjuk a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor segítségével. Ha az abszolút értékekből álló sor konvergens, akkor a vizsgálandó sor is konvergens. Ha azonban az abszolút értékekből álló sor divergens, akkor a vegyes előjelű sor lehet konvergens is és divergens is.

Definíció Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor konvergens, de a $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor divergens, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sort **feltételesen konvergens**nek mondjuk.

Tétel **Leibniz tétele** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor teljesíti az alábbi három feltételt, akkor konvergens:
1. Minden n-re: $0 < a_n$;
2. $a_{n31} \le a_n$ minden n-re
3. $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Tétel **Az alternáló sor összegének becslésére vonatkozó tétel** Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sor kielégíti a Leibniz tétel feltételeit, akkor az $s_n = a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n$ részletösszeg az a_{n+1} abszolút értékénél kisebb hibával közelíti meg a sor összegét, azaz az elkövetett hiba kisebb az első elhagyott tag abszolút értékénél. Ezen túlmenően a $S - s_n$ kifejezés előjele megegyezik az első elhagyott tagéval.

3. 2. Függvénysorok

Definíció Ha egy végtelen sor tagjai valamilyen változó (többnyire az x) függvényei, akkor függvénysorról beszélünk.

Megjegyzés: Természetesen a tagok értelmezési tartományának metszetét kell vennümk, ami nem lehet üres halmaz.

Általános alak:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots.$$

Ha az x helyére konkrét értéket helyettesítünk, akkor numerikus sort kapunk.

Definíció Ha az $x=x_0$ értékre az

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) + \ldots + f_n(x_0) + \ldots.$$

numerikus sor konvergens, akkor x_0-t a függvénysor **konvergencia-pont**jának nevezzük.

Definíció A függvénysor konvergenciapontjainak halmazát a sor **konvergencia-tartomány**ának nevezzük.
Ha a konvergenciatartomány intervallum, akkor **konvergencia-intervallum**ról beszélünk.

Definíció Azt a függvényt, amely azokban az x pontokban van értelmezve, amelyekben a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor konvergens és értéke egy-egy pontban a sor összege, a sor **összegfüggvény**ének nevezzük.

Definíció A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$

függvénysort, amelyben az a_i együtthatók és az x_0 állandók, az x_0 körüli **hatványsor**nak nevezzük.
Speciálisan, ha $x_0=0$, akkor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Tétel A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor vagy minden x mellett konvergens, vagy csak x=0 mellett konvergens, vagy van olyan pozitív r szám, hogy $|x| < r$ esetén konvergens, $|x| > r$ esetén divergens. Az r számot a hatványsor **konvergenciasugará**nak nevezzük.

Tétel A hatványsor a konvergenciaintervallum belsejében differenciálható és a hatványsor **differenciálás**át szabad tagonként elvégezni.

Tétel A konvergenciaintervallum bármely belső részintervallumában a hatványsor tagonként integrálható és a hatványsor **integrálás**át szabad tagonként elvégezni.

Ha a tagonkénti deriválással illetve integrálással kapott sornak létezik az összege, ebből az eredeti sor össege az összeg integrálásával illetve deriválásával meghatározható.

3. 2. 1. A Taylor-sor

Célunk most előzőek fordítottja, a vizsgálandó függvényt hatványfüggvények összegeként akarjuk előállítani, és ennek segítségével függvényértékeket közelíteni. Tegyük fel, hogy a függvény az $x_0=0$ helyen differenciálható és felírható hatványfüggvények összegeként, azaz

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

alakban. Célunk az ismeretlen a_0, a_1, …, a_n,… együtthatók meghatározása. Tudjuk, hogy a függvény deriváltja az előző hatványfüggvények deriváljával egyezik meg:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

Ez a hatványsor ugyanabban az intervallumban konvergens, mint az f(x) hatványsora. Az eljárást ismételten alkalmazva:

$$f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + \ldots + n\cdot(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

.

.

.

A hatványsor együtthatóit meghatározhatjuk a függvénynek és deriváltjainak az x=0 helyen vett értékeivel.

$$f(0) = a_0 \qquad f'(0) = a_1 \qquad f''(0) = 2a_2 \quad f'''(0) = 3\cdot 2a_3 \quad \ldots \quad f^{(n)}(0) = n!\,a_n$$

Definíció Ha f(x) az x=0 helyen akárhányszor diffrenciálható, akkor az

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \ldots$$

sort a függvény **Taylor sor**ának, a

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$$

polinomot az f(x) n-edik **Taylor polinom**jának nevezzük.

Az f(x) függvény a Taylor sor összege, ha $n \to \infty$ esetén $R_n(x) = f(x) - T_n(x) \to 0$. Az Rn(x)-et a Raylor sor maradéktagjának nevezzük.

Tétel Legyen f(x) n+1-szer differenciálható az x_o=0 helyen és valamely környezetében. Ekkor minden ebbe a környezetbe eső *x* helyen érvényes, hogy

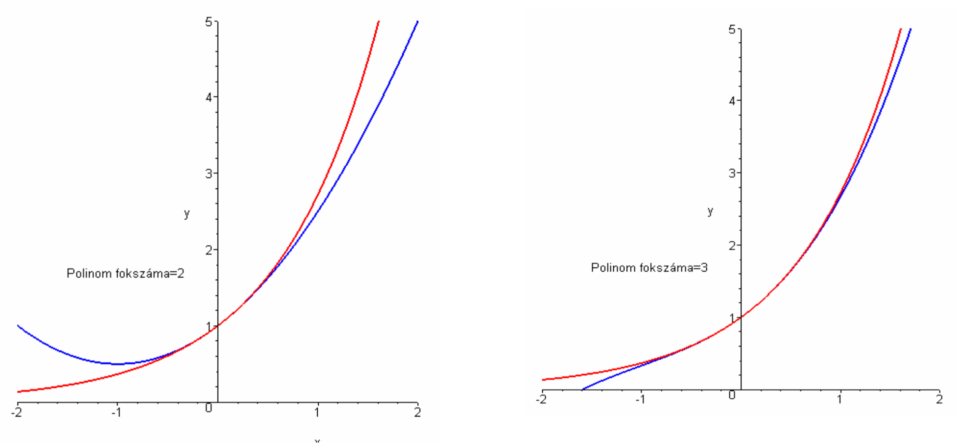
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ahol ξ a 0 és x közötti hely.

A függvény ilyen előállítását **Taylor-formulá**nak, (McLaurin-formulának), az $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ kifejezést Lagrange-féle maradéktagnak nevezzük.

Néhány függvény Taylor sora:

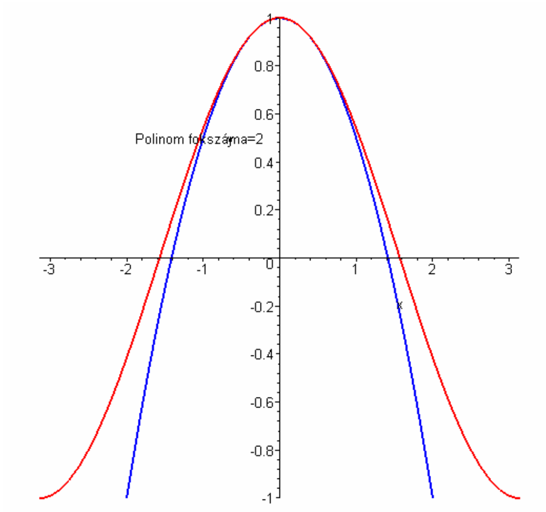
$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad x \in R$$

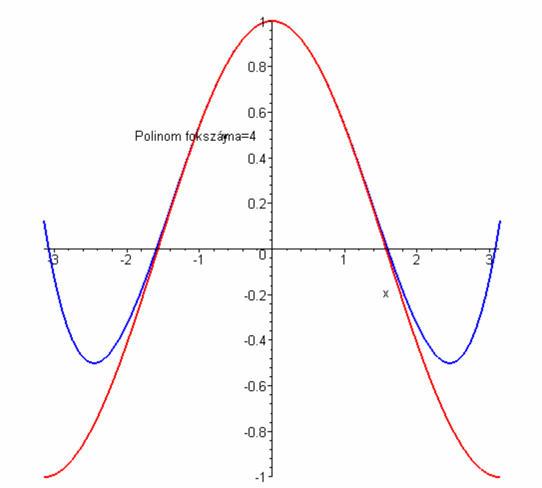


17. ábra Az e^x függvény valamint másod- illetve harmadfokú Taylor polinomja

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in R$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in R$$





18. ábra Az cosx függvény valamint másod- illetve negyedfokú Taylor polinomja.

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad -1 < x \le 1$$

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad -1 < x < 1$$

3. 2. 2. Integrálás sorfejtéssel

A határozatlan integrálnál említettük, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek nincs primitív függvénye. Ilyenkor a határozott integrált az integrandusz Taylor sorba fejtésével adjuk meg.

Például:

$si\, x = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ $\left(\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1\right)$ az úgynevezett integrál-szinusz függvény

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^x 1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \ldots dt = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \ldots$$

$$\int e^{-x^2} dx = \int 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \ldots dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^9}{9 \cdot 4!} -$$

3.2.3 A Fourier sor

Periodikus, nem mindenütt differenciálható függvényeket szeretnénk mindenütt differenciálható trigonometrikus függvények sorával előállítani, a következő alakban:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + ... + a_n \cos nx + b_n \sin nx + ... \qquad (1)$$

Célunk a_0, a_1, b_1, a_2, b_2,....együtthatók meghatározása. Ehhez felhasználjuk a következő határozott integrálokat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad m \neq n \end{cases} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} \pi & \text{ha} \quad m = n \neq 0 \\ 0 & \text{ha} \quad m \neq n \end{cases}$$

Ezeket felhasználva, a függvényt és a sorát $[-\pi, \pi]$ zárt intervallumon integrálva a jobb oldalon az első tagot kivéva mindenütt 0-t kapunk. Így

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 2\pi$$

Ha az (1) egyenlet mindkét oldalát cosmx-szel szorozzuk, és így végezzük el az integrálást, az előzőleg megadott határozott integrálok felhasználásával kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi$$

Ha az (1) egyenletet sinmx-szel szorozzuk, adódik, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx = b_m \pi$$

Ezek segítségével mostmár megadhatjuk a Fourier sor definícióját: