# Az integrál geometriai jelentése, a határozatlan integrál fogalma

## Az integrál geometriai jelentése

**Definíció**

Legyen f az (a,b) intervallumon elõjelet nem váltó, korlátos és legfeljebb véges számú ponttól eltekintve folytonos valós függvény(az $a = -\infty$ és a $b = \infty$ esetet is megengedve).
A síkbeli derékszögû koordináta-rendszerben

az $y = f(x)$ egyenletű görbe
az (a,b) intervallum, valamint
az x = a és az x = b egyenletû egyenes

által határolt síkidomot az f függvény és az (a,b) intervallum által meghatározott görbevonalú trapéznak nevezzük. Ha $a = -\infty$ ,akkor a nem létezõ x = a egyenes, ha pedig $b = \infty$, akkor a nem létezõ x = b egyenletû egyenes figyelmen kívül hagyandó.
(A definíciónak az elõjelre vonatkozó követelménye úgy is megfogalmazható, hogy az (a,b) intervallumon mindvégig $0 \le f(x)$, vagy mindvégig $f(x) \le 0$ legyen)
Véges (a,b) intervallum esetén a megfelelõ görbevonalú trapéz területére érvényes a következõ:

**Tétel**

Ha az egyváltozós valós f függvény a véges (a,b) intervallummal együtt görbevonalú trapézt határoz meg, akkor ezen a görbevonalú trapéz a területének a számértéke az

$$\int_a^b |f(x)|\, dx$$

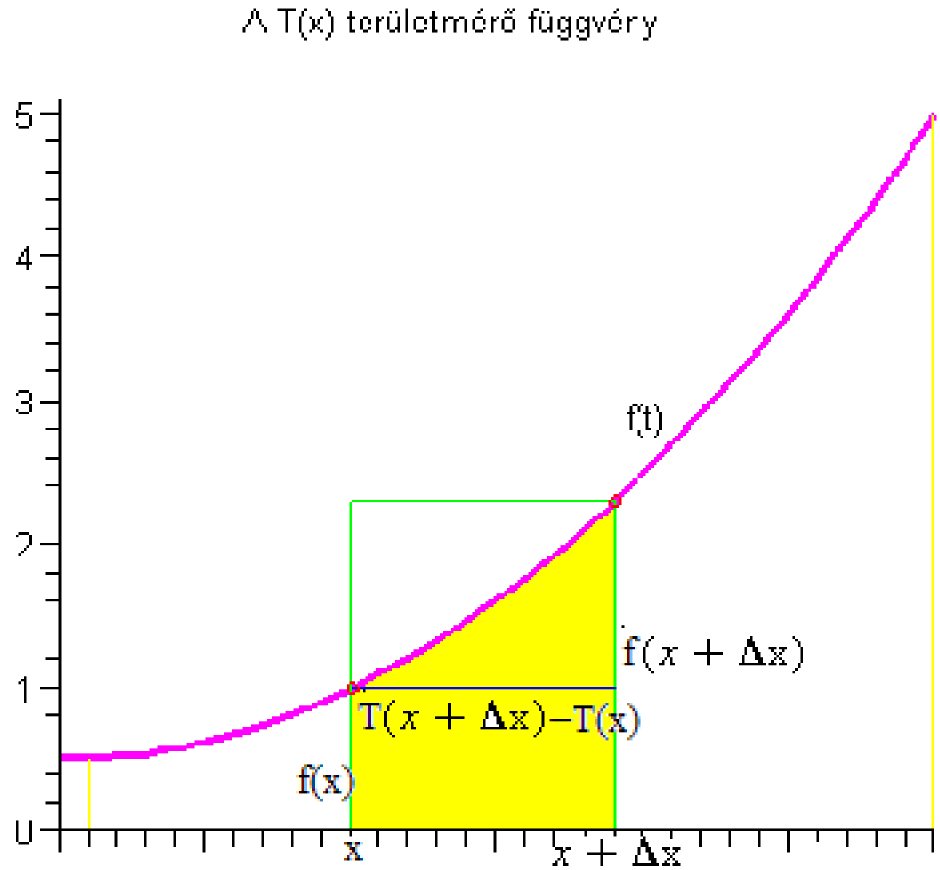
határozott integrállal egyenlõ.

**Megjegyzés**

Ha az f függvény a figyelembe veendõ (a,b) intervallum egyes részintervalumain az $0 \le f(x)$, az (a, b) többi részintervallumán pedig az $f(x) \le 0$ egyenlõtlenségnek tesz eleget, akkor részintervallumonként számítjuk ki a területet, és az ezekre kapott értékeket összeadjuk.

## Primitív függvény, a határozatlan integrál fogalma

Legyen az f függvény most az [a,b] intervallumon pozitív értékû, monoton növekvõ, folytonos függvény! Jelöljük T(x)-szel a görbe alatti terület mérõszámát az [a,x] intervallumon, ahol $a \le x \le b$ .




T(x) jelenti a görbe alatti terület mérõszámát az [a,x] intervallumon, $T(x+\Delta x)$ pedig az $[a, x+\Delta x]$ intervallumon, s így
$T(x+\delta(x)) - T(x)$ az $[x, x+\Delta x]$ számközön.
Az f függvény monoton növekedése miatt

$$f(x)\cdot\Delta x \le T(x+\Delta x) - T(x) \le f(x+\Delta x)\cdot\Delta x$$

Osszuk el az egyenlõtlenséget Δx-szel:

$$f(x) \le \frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x} \le f(x+\Delta x)$$

Az f függvény folytonossága miatt $\lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) = f(x)$,
másrészt

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{T(x+\Delta x) - T(x)}{\Delta x}\right)$$

a T függvény x helyhez tartozó különbségi hányadosának az x helyen vett határértéke.
A rendõrtétel miatt ez létezik, és

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{(T(x+\Delta x) - T(x))}{\Delta x}\right) = f(x)$$

Azt kaptuk tehát, hogy az f függvény görbe alatti területét -tehát f pozitív értékûsége miatt határozott integrálját - megadó **T** függvény **deriváltja** az x helyen épp **f(x)**! Érdemes tehát feltennünk a kérdést: Hogyan tudjuk az f függvényhez meghatározni azt (azokat) a függvényeket,amelyek deriváltja az f függvény.

**Definíció**

Azt mondjuk, hogy az egyváltozós valós f függvénynek a H halmazon primitív függvénye az F függvény, ha a H halmazon f és F értelmezve van, továbbá F differenciálható a H halmazon és

**F '(x) =f(x)**, minden H-ból vett x-re.

Felmerül a kérdés, hogy egy függvény primitív függvényeinek halmaza milyen szerkezetű, azaz miben különbözhetnek egymástól a primitív függvények?

**Tétel**

Ha a f függvénynek valamely H halmazon primitív függvénye F, akkor primitív függvénye bármely

$$G(x) = F(x) + C \quad (\forall\ C \in \mathbb{R})$$

alakú függvény is.

**Bizonyítás**

A bizonyítás egyszerû, hiszen összeadandó állandó deriváltja 0, s így

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) = \frac{d}{dx} (F(x) + C) = f(x) + 0 = f(x).$$

Ezek után az a kérdés, hogy van e más alakú primitív függvény is? A válasz tagadó,igaz ugyanis a következő tétel.

**Tétel**

Ha Az f függvénynek valamely I intervallumon primitív függvénye F és G, akkor van olyan $C$ valós szám, hogy az I intervallum minden $x$ elemére $G(x) = F(x) + C$, azaz **a primitív függvények egymástól csak összeadandó állandóban különbözhetnek**.

**Bizonyítás**

Legyen $G(x) - F(x) = H(x)$. Az I intervallum minden elemére $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (G(x) - H(x)) =$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(x) = f(x) - f(x) = 0$

Lagrange tétele értelmében létezik az I intervallum bármely belső $[a, x]$ részintervallumában olyan $\xi$, amelyre

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H(x)\right|_{x=\xi} = \frac{(H(x) - H(a))}{(x - a)},$$

s innen

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{H}(\mathrm{x})\right|_{\mathrm{x}=\xi} \cdot (x - a) = H(x) - H(a) = 0$$

minden x-re. Ez azt jelenti, hogy $H(x) = H(a)$, vagyis a H függvény állandó, tehát

$G(x) - F(x) = H(x)$ miatt

$$G(x) - F(x) = C$$

**Definíció**

Az egyváltozós valós f függvény primitív függvényeinek összességét az f ***határozatlan integrál***jának nevezzük, és a következőképpen jelöljük:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

(így olvassuk: "integrál ef iksz dé iksz")
Az integrál jelében a dx azt fejezi ki, hogy az integrálás az x változóra vonatkozik. Ennek akkor van jelentősége, ha az integrálandó függvényben (integrandus) más változó vagy paraméter is szerepel.

# Alapintegrálok

Az elemi függvények deriválási szabályának minden esetben megfelel egy integrálási szabály. Ezeket a szabályokat alapintegráloknak szokás nevezni.
A fontosabb alapintegrálokat tartalmazza az alábbi táblázat. Ezek a képletek- amelyekben c tetszőleges valós állandó- olyan intervallumokon érvényesek, amelyek minden pontjában a jobb oldalon álló függvény értelmezve van és differenciálható, ha egy ponthalmaz több ilyen, páronként közös pont nélküli intervallumból áll, akkor a c integrációs állandó intervallumonként más értéket vehet fel.

$$\int 0\,\mathrm{d}x = c; \qquad \int 1\,\mathrm{d}x = x + c;$$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{(n+1)}}{n+1} + c, \text{ ha } n \neq -1;$$

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(|x|) + c;$$

$$\int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c; \qquad \int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln(a)} + c;$$

$$\int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + c; \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + c;$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x = \tan(x); \qquad \int \frac{1}{\sin(x)^2}\,\mathrm{d}x = -\cot(x);$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c; \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \operatorname{arcsinh}(x) + c; \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccosh}(x) + c;$$

# Alapvető műveleti szabályok

**Alapvetõ mûveleti szabályok:**

Az összegfüggvény, illetve a konstanssal szorzott függvény differenciálási szabályából következik, hogy

**1)**

$$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

**2)**

$$\int c\,f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

**Példák:**

```
> Int(x^2+1/x,x)=Int(x^2,x)+Int(1/x,x);
```

$$\int x^2 + \frac{1}{x}\,dx = \int x^2\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx \tag{4.1}$$

```
> Int(x^2+1/x,x)=int(x^2+1/x,x);
```

$$\int x^2 + \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \ln(x) \tag{4.2}$$

A két szabály együttes alkalmazásából adódik:

**3)**

$$\int c_1 f(x) + c_2 g(x)\,dx = c_1\int f(x)\,dx + c_2\int g(x)\,dx$$

**Példa**

```
> Int((x^(3/2)-2*x^(2/3)+5)*sqrt(x),x)=Int(expand((x^(3/2)-2*x^
(2/3)+5)*sqrt(x)),x);
```

$$\int \left(x^{(3/2)} - 2\,x^{(2/3)} + 5\right)\sqrt{x}\,dx = \int x^2 - 2\,x^{(7/6)} + 5\sqrt{x}\,dx \tag{4.3}$$

```
> rhs(%)=int(expand((x^(3/2)-2*x^(2/3)+5)*sqrt(x)),x);
```

$$\int x^2 - 2\,x^{(7/6)} + 5\sqrt{x}\;dx = \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{12}{13}\,x^{(13/6)} + \frac{10}{3}\,x^{(3/2)} \tag{4.4}$$

Figyeljük a következõ integrálokat:

```
> Int(cos(3*x+Pi/4),x)=int(cos(3*x+Pi/4),x);
```

$$\int \cos\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right) dx = \frac{1}{3}\,\sin\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right) \tag{4.5}$$

```
> Int(exp(3*x+Pi/4),x)=int(exp(3*x+Pi/4),x);
```

$$\int e^{\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right)} dx = \frac{1}{3}\,e^{\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right)} \tag{4.6}$$

```
> e:=sin(3*x+Pi/4)/cos(3*x+Pi/4)=tan(3*x+Pi/4);
```

$$e := \frac{\sin\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right)}{\cos\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right)} = \tan\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right) \tag{4.7}$$

```
> Int(1/cos(3*x+Pi/4)^2,x)=subs(e,(int(1/cos(3*x+Pi/4)^2,x)));
```

$$\int \frac{1}{\cos\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right)^2}\,dx = \frac{1}{3}\,\tan\left(3\,x + \frac{1}{4}\,\pi\right) \tag{4.8}$$

**4)** Észrevehetjük a következõ *szabályt*:
Ha fennáll:

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

$$\int f(a\,x + b)\,dx = \frac{F(a\,x + b)}{a}$$

Most figyeljük a következõ integrálokat:

```
> Int(sin(x)^2*cos(x),x)=int(sin(x)^2*cos(x),x);
```

$$\int \sin(x)^2 \cos(x)\,dx = \frac{1}{3}\,\sin(x)^3 \tag{4.9}$$

```
> Int(ln(x)^4/x,x)=int(ln(x)^4/x,x);
```

$$\int \frac{\ln(x)^4}{x}\,dx = \frac{1}{5}\,\ln(x)^5 \tag{4.10}$$

```
> Int(arctan(x)^(1/3)/(x^2+1),x)=int(arctan(x)^(1/3)/(x^2+1),x);
```

(4.11)

$$\int \frac{\arctan(x)^{(1/3)}}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{4}\arctan(x)^{(4/3)} \tag{4.11}$$

Észrevehetjük a következõ szabályt:

(5)

$$\int f(x)^{\alpha}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) dx = \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \textbf{ ahol } \alpha \neq -1.$$

Tehát az integrálandó függvény két tényezõs szorzat; az egyik tényezõ olyan összetett függvény, amelynek külsõ függvénye hatványfüggvény, a másik tényezõ pedig a hatványalap (tehát a belsõ függvény) deriváltja. Ekkor a hatvány integrálási szabályát alkalmazzuk f(x)-re.

Most figyeljük a következõ integrálokat:

```
> Int(cos(x)/sin(x),x)=int(cos(x)/sin(x),x);
```

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \ln(\sin(x)) \tag{4.12}$$

```
> Int((2*x+3)/(x^2+3*x+4),x)=int((2*x+3)/(x^2+3*x+4),x);
```

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+4}\,dx = \ln\left(x^2+3x+4\right) \tag{4.13}$$

```
> Int((exp(x)+1)/(exp(x)+x),x)=int((exp(x)+1)/(exp(x)+x),x);
```

$$\int \frac{e^x+1}{e^x+x}\,dx = \ln\left(e^x+x\right) \tag{4.14}$$

Valamennyi esetben a nevezõben levõ függvény deriváltja a számláló, a szabály:

**6)**

$$\int \frac{\frac{d}{dx} f(x)}{f(x)}\,dx = ln|f(x) + C|$$

# Parciális integrálás

**Tétel**

Legyenek az $\boldsymbol{f}$ és a $g$ *differenciálható* függvények és *létezzék* az $\int f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)dx$ vagy az $\int g(x)\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx$ integrál. Ekkor

$$\int\left(\frac{d}{d\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\int\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\left(\frac{d}{d\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\right)d\boldsymbol{x}.$$

**Bizonyítás**

Deriváljuk az f(x)g(x) szorzatot!

```
> 'diff(f(x)*g(x),x)'=diff(f(x)*g(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,g(x)\right)=\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x)+f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right) \tag{5.1}$$

Rendezve, és minndkét oldalt integrálva (felhasználva az integrálhatóságra tett feltételt, s az integrál additív tulajdonságát) adódik a tétel állítása:

```
> int(op(2,rhs(%)),x)=f(x)*g(x)-int(op(1,rhs(%)),x);
```

$$\int f(x)\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)dx=f(x)\,g(x)-\int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)g(x)\,dx \tag{5.2}$$

```
>
```