Differenciálegyenletek III., többváltozós függvények

Másodrendű lineáris differenciálegyenletek

Állandó együtthatós homogén egyenletek

Az állandó együtthatós homogén másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$\mathbf{ay'' + by' + cy = 0}\,, \qquad \mathbf{(1)}$$

ahol a, b, c állandók.

Az egyenlet általános megoldásának megadásához elegendő két partikuláris megoldást meghatároznunk. Ezeknek azonban lineárisan független megoldásoknak kell lenniök. Mit jelent a lineáris függetlenség?

DEFINÍCIÓ. Az $y_1(x)$ és az $y_2(x)$ függvények lineárisan függetlenek, ha $c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $c_1 = c_2 = 0$ (c_1 és c_2 állandók)

PÉLDA. Az $y_1 = \mathbf{e}^x$ és az $y_2 = \mathbf{e}^{(5\,x)}$ fügvények lineárisan függetlenek, ui. ,ha

$$c_1\,\mathbf{e}^x + c_2\,\mathbf{e}^{(5\,x)} = 0,$$

és pl. $c_2 \neq 0$ teljesülne, akkor

$$-\frac{c_1}{c_2} = \mathbf{e}^{(4\,x)}$$

következnék, ami ellentmondás, hiszen a baloldal állandó, a jobboldal viszont nyilván nem az.

TÉTEL. Ha $y_1(x)$ és $y_2(x)$ az (1) egyenlet két lineárisan független megoldása, akkor az egyenletnek megoldása az

$$y = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)$$

függvény is (y az $y_1(x)$ és az $y_2(x)$ lineáris kombinációja).

BIZONYÍTÁS. Egyszerű helyettesítéssel történik.

Igazolható, hogy a tételben szereplőtől kükönböző megoldása nincs az (1) egyenletnek.

A tétel szerint elég két független megoldást megkeresnünk.

A megoldás menete:

A partikuláris megoldást $y = \mathbf{e}^{(\lambda\,x)}$ alakban keressük, mert az exponenciális függvény az egyetlen, amely a deriváltjaival arányos:

```
> restart:
> de:=diff(y(x),x)=lambda*y(x);
```

$$de := \frac{d}{dx}\,\mathrm{y}(x) = \lambda\,\mathrm{y}(x)$$

```
> dsolve(de,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}$$

```
>
```

Ha $\mathbf{y(x) = e^{(\lambda\,x)}}$, akkor $\mathbf{y' = \lambda\,e^{(\lambda\,x)}}$ és $\mathbf{y'' = \lambda^2\,e^{(\lambda\,x)}}$.

Ezeket behelyettesítve:

$$a\,\lambda^2\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}+b\,\lambda\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}+c\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}=0,$$

azaz

$$\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}\,(a\,\lambda^2+b\,\lambda+c)=0,$$

és ez csak úgy állhat fenn, ha

$$a\,\lambda^2+b\,\lambda+c=0.$$

Ez a másodfokú egyenlet a differenciálegyenlet ***karakterisztikus egyenlete,*** amelyből λ kiszámítható. A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsától függően három esetet különböztetünk meg:

1.eset: Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa pozitív, akkor két különböző valós gyöke van az egyenletnek (legyenek ezek λ_1 és λ_2), tehát az egyenlet két lineárisan független megoldása felírható

$$y_1=\mathbf{e}^{(\lambda_1\,x)},\quad y_2=\mathbf{e}^{(\lambda_2\,x)}$$

alakban és az általános megoldás

$$\boldsymbol{y=c_1\,\mathbf{e}^{(\lambda_1\,x)}+c_2\,\mathbf{e}^{(\lambda_2\,x)}}.$$

2.eset: A karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa nulla, akkor az egyenletnek egy kétszeres (két egyenlő) valós gyöke van, legyen ez λ, és most csak egy partikuláris megoldás írható fel, mégpedig

$$y_1=\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}.$$

A differenciálegyenletnek egy másik, az y_1-től független megoldása például az állandó variálásával kereshető meg, és

$$y_2=x\,\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}$$

alakú. Az egyenlet általános megoldása így

$$\boldsymbol{y=c_1\,\mathbf{e}^{(\lambda_1\,x)}+c_2\,\mathbf{e}^{(\lambda_2\,x)}=\mathbf{e}^{(\lambda\,x)}\,(c_1+c_2\,x)}$$

alakú.

3.eset: ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa negatív, akkor az egyenletnek két (konjugált) nem valós komplex gyöke van, legyenek ezek $\lambda_1=\alpha+\beta\,I$ és $\lambda_2=\alpha-\beta\,I$.
Ekkor a két lineárisan független partikulárismmegoldás:

$$y_1=\mathbf{e}^{(\alpha\,x)}\cos(\beta\,x)\quad \text{ill.}\quad y_2=\mathbf{e}^{(\alpha\,x)}\sin(\beta\,x),$$

és az általános megoldás:

$$\boldsymbol{y=\mathbf{e}^{(\alpha\,x)}\,(c_1\cos(\beta\,x)+c_2\sin(\beta\,x))}.$$

PÉLDÁK:

Oldjuk meg az alábbi egyenleteket:

1. y''-y'-6y = 0; 2. y''-8y' +16y = 0; 3. 4y'' +4y' +37y = 0.

Ellenőrzésként felhasználhatjuk az alábbi Maple-megoldásokat.

```
> de1:=diff(y(x),x$2)-diff(y(x),x)-6*y(x)=0;
```

$$de1:=\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right)-\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)-6\,\mathrm{y}(x)=0$$

```
> dsolve(de1,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x)=\_C1\,\mathbf{e}^{(3\,x)}+\_C2\,\mathbf{e}^{(-2\,x)}$$

```
> de2:=diff(y(x),x$2)-8*diff(y(x),x)+16*y(x)=0;
```

$$de2 := \left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) - 8\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 16\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> dsolve(de2,y(x));
```

$$\mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{(4\,x)} + \_C2\,\mathbf{e}^{(4\,x)}\,x$$

```
> de3:=4*diff(y(x),x$2)+4*diff(y(x),x)+37*y(x)=0;
```

$$de3 := 4\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + 4\left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right) + 37\,\mathrm{y}(x) = 0$$

```
> factor(dsolve(de3,y(x)));
```

$$\mathrm{y}(x) = \mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{2}\right)}\,(\_C1\,\sin(3\,x) + \cos(3\,x)\,\_C2)$$

PÉLDA. Egy pont akkor végez csillapítatlan rezgőmozgást, ha a gyorsulása arányos az elmozdulásával, de azzal ellentétes irányú. Ilyen mozgást végeznek jó közelítéssel pl. a megpendített hangvilla pontjai. Határozzuk meg az elmozdulást, mint az idő függvényét!

MEGOLDÁS.

A csillapítatlan harmonikus rezgőmozgás differenciálegyenlete

$$\mathbf{y(t)'' = -\omega y(t).}$$

```
> de:=diff(y(t),t$2)=-omega^2*y(t);
```

$$de := \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{y}(t) = -\omega^2\,\mathrm{y}(t)$$

```
> dsolve(de,y(t));
>
```

$$\mathrm{y}(t) = \_C1\,\sin(\omega\,t) + \_C2\,\cos(\omega\,t)$$

Legyen a t = 0 (kezdeti időpontban a pont kitérése y(0) = 0 és a sebessége y'(0) = 0. Adjuk meg a kezdeti feltételeket kielégítő megoldást!

```
> y:='y':
> dsolve({de,y(0)=0,D(y)(0)=v0},y(t));
```

$$\mathrm{y}(t) = \frac{v0\,\sin(\omega\,t)}{\omega}$$

Nézzük meg most mindezt más kezdeti feltételekkel!

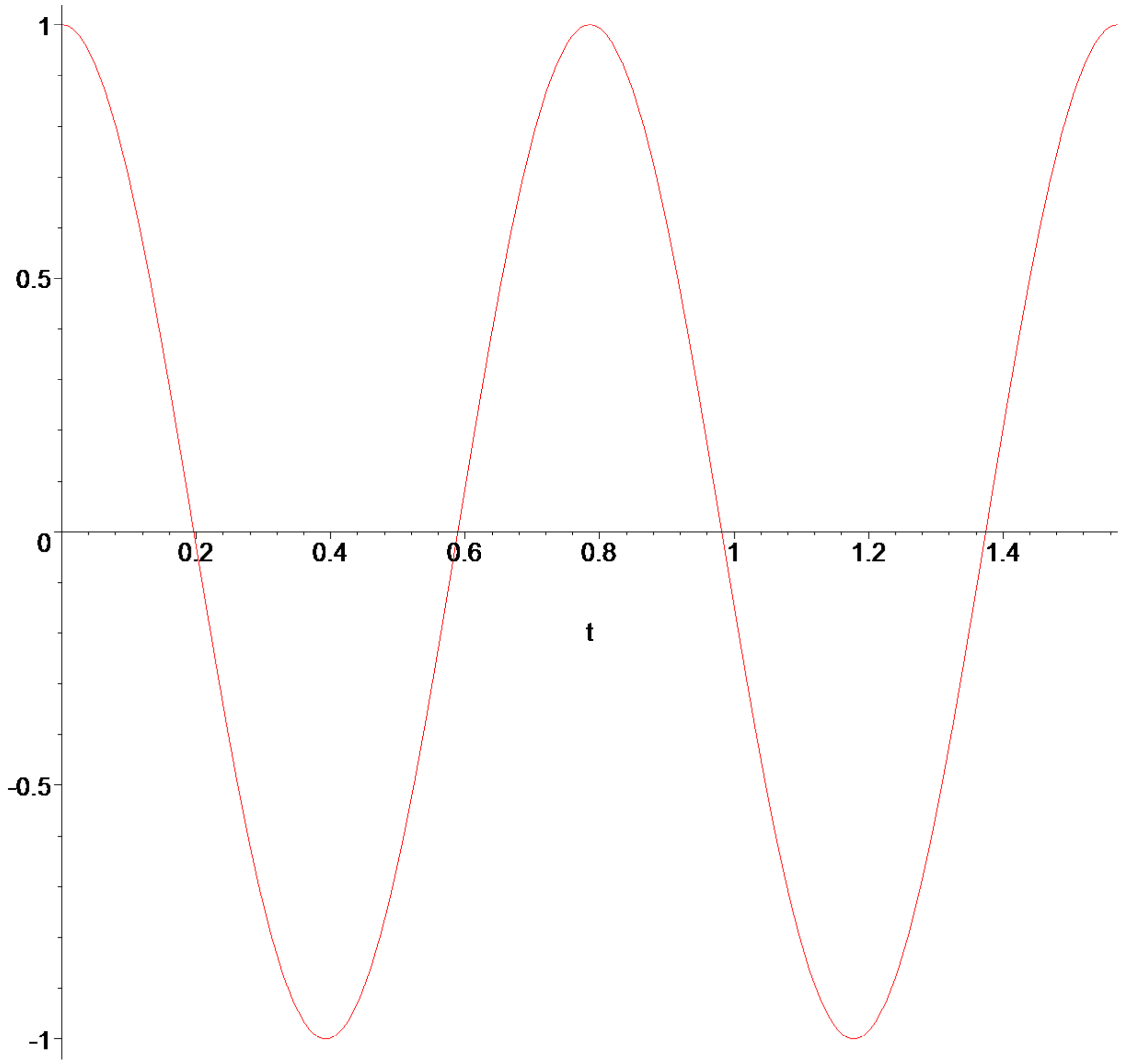
```
> x:='x':
> DE1:=dsolve({diff(x(t),t$2)+64*x(t)=0,x(0)=1,D(x)(0)=0},x(
  t));
>
```

$$DE1 := \mathrm{x}(t) = \cos(8\,t)$$

```
> assign(DE1):
> x(t);
```

$$\cos(8\,t)$$

```
> plot(x(t),t=0..Pi/2);
```



Állandó együtthatós inhomogén egyenletek. (A próbafüggvény módszere)

Az

$$ay'' + by' + cy = f(x)$$

inhomogén differenciálegyenletet a hozzá tartozó

$$aY'' + bY' + cY = 0$$

homogén egyenlet megoldásának felhasználásával adjuk meg. Az inhomogén egyenlet általános megoldását a homogén egyenlet általános megoldásának (Y) és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának (y_0) összegeként kapjuk meg.

A homogén egyenlet megoldásmódját az előzőkben már megismertük, most az inhomogén egyenlet partikuláris megoldásának megkeresését ismertetjük. Ez könnyű akkor, ha az f(x) un. zavaró függvény speciális alakú, mégpedig

- polinom,
- exponenciális függvény,
- $\sin(\alpha x + \beta)$,$\cos(\alpha x + \beta)$ vagy

ezek összege, szorzata, összegének szorzata, szorzatának összege.

Ekkor ui. az inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását ugyanolyan típusú függvénynek tételezzük fel, mint amilyen a zavaró függvény, csak az együtthatókat tekintjük ismeretleneknek.(próbafüggvény). A feltételezett függvényt és deriváltjait a differenciálegyenletbe helyettesítve azonosságot kapunk, amelyből az együtthatók kiszámíthatók. Ügyelni kell arra, hogy pl. polinom alakú zavaró függvény esetén a próbafüggvénynek tartalmaznia kell a polinom legnagyobb kitevőjű hatványánál kisebb kitevőjű hatványát akkor is, ha ezek valamelyike a zavaró függvényből hiányoznék. Hasonlóképpen, ha a zavaró függvény csak $\sin(\alpha x + \beta)$ vagy csak $\cos(\alpha x + \beta)$, akkor is a próbafüggvény $A\sin(\alpha x + \beta) + B\cos(\alpha x + \beta)$ alakban keresendő!

Külön meg kell említeni a rezonancia esetét. Ha a homogén egyenletáltalános megoldásának valamely tagja (együtthatótól eltekintve) megegyezik a zavaró függvénnnyel(vagy valamely tagjával), akkor rezonanciáról beszélünk.Ebben az esetben a zavarófügvény alapján felírt próbafüggvényt, vagy annak valamely tagját meg kell szorozni x-szel.

PÉLDA. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$y'' + 5\,y' + 4\,y = 3 - 2\,x - x^2.$$

MEGOLDÁS.

Az $Y'' + 5\,Y' + 4Y = 0$ homogén differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete

$$\lambda^2 + 5\,\lambda + 4 = 0\,.$$

Ennek gyökei $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = -1$, így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = c_1\,\mathbf{e}^{(-4\,x)} + c_2\,\mathbf{e}^{(-x)}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény módszerével

$$y_0 = A\,x^2 + B\,x + C$$

alakban keressük, ahol A, B és C ismeretlen együtthatók. Ekkor

$$y_0' = 2Ax + B,$$

$$y_0'' = 2A.$$

Ezeket az eredeti egyenletbe helyettesítve a

$$2A + 5\,(\,2\,A\,x + B\,) + 4\,(\,A\,x^2 + B\,x + C\,) = 3 - 2\,x - x^2$$

azonosságot kapjuk, ami csak úgy állhat fenn, ha

$$4\,A = -1,$$

$$10\,A + 4\,B = -2,$$

$$2\,A + 5\,B + 4\,C = 3.$$

Az egyenletekből

$$A = -\frac{1}{4}\,;\ B = \frac{1}{8}\,;\ C = \frac{23}{32}\ .$$

Így a partikuláris megoldás

$$y_0 = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{23}{32}\,,$$

és az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$\mathbf{y = Y + y_0 = C_1\,e^{(-4\,x)} + C_2\,e^{(-x)} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{8} + \frac{23}{32}}.$$