Improprius integrálok

A határozott integrál értelmezésénél feltettük azt, hogy az integrálás intervalluma véges, s azt, hogy az integrálandó függvény korlátos ezen az intervallumon. Most olyan esetben is értelmezzük a határozott integrál fogalmát, amikor ezen feltételek nem teljesülnek. Az így értelmezett integrálokat improprius integráloknak nevezzük

Az integrálás intervalluma nem korlátos

Értelmezés

Legyen az f függvény az [a,∞ [intervallumon értelmezett, s legyen bármely $a \le t$ esetén az [a,t] intervallumon integrálható, azaz létezzen az $\int_a^t f(x)\,dx$ integrál minden $a \le t$ esetén. Ha létezik a $\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx$ véges határérték, akkor azt mondjuk, hogy létezik az f függvény [a,∞] intervallumra vonatkozó improprius integrálja, és ezzel a határértékkel egyenlő, azaz:

$$\lim_{t \to \infty} \int_a^t f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Hasonlóan, ha az f a $]-\infty, b]$ intervallumon értelmezett, s integrálható minden $t \le b$ esetén a [t,b] intervallumon, valamint létezik a $\lim_{t \to (-\infty)} \int_t^b f(x)\,dx$ véges határérték, akkor

$$\lim_{t \to (-\infty)} \int_t^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

Végül, ha az integrálás intervalluma az egész valós számegyenes,akkor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} \mathbf{f}(x)\,dx + \int_{a}^{\infty} \mathbf{f}(x)\,dx,$$

azaz definíció szerint a baloldali integrál a jobboldali integrálok összege, feltéve, hogy azok léteznek. Bizonyítható, hogy az a állandó tetszőlegesen választható, tőle nem függ a definiált integrál értéke. Ha a kérdéses határérték nem létezik, akkor az improprius integrál nem létezik, más szóval divergens.

1. Példa

Az $\mathbf{f}(x) = \mathbf{e}^{(-x)}$ függvény tetszőleges véges intervallumon integrálható és

```
> a:='a': b:='b':
> Int(exp(-x),x=a..b)=int(exp(-x),x=a..b);
```

$$\int_a^b \mathbf{e}^{(-x)}\,dx = \mathbf{e}^{(-a)} - \mathbf{e}^{(-b)}$$

```
> Limit(Int(exp(-x),x=a..b),b=infinity)=Limit(int(exp(-x),x=a..b),b=infinity);
```

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b e^{(-x)}\, dx = \lim_{b \to \infty} e^{(-a)} - e^{(-b)}$$

```
> Int(exp(-x),x=a..infinity)=limit(int(exp(-x),x=a..b),b=infinity);
```

$$\int_a^\infty e^{(-x)}\, dx = e^{(-a)}$$

Legyen pl. a = 0, akkor:

```
> a:=0;b:='b':
```

$$a := 0$$

```
> Int(exp(-x),x=a..infinity)=limit(Int(exp(-x),x=a..b),b=infinity);
```

$$\int_0^\infty e^{(-x)}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_0^b e^{(-x)}\, dx$$

```
> Int(exp(-x),x=a..infinity)=Limit(int(exp(-x),x=a..b),b=infinity);
```

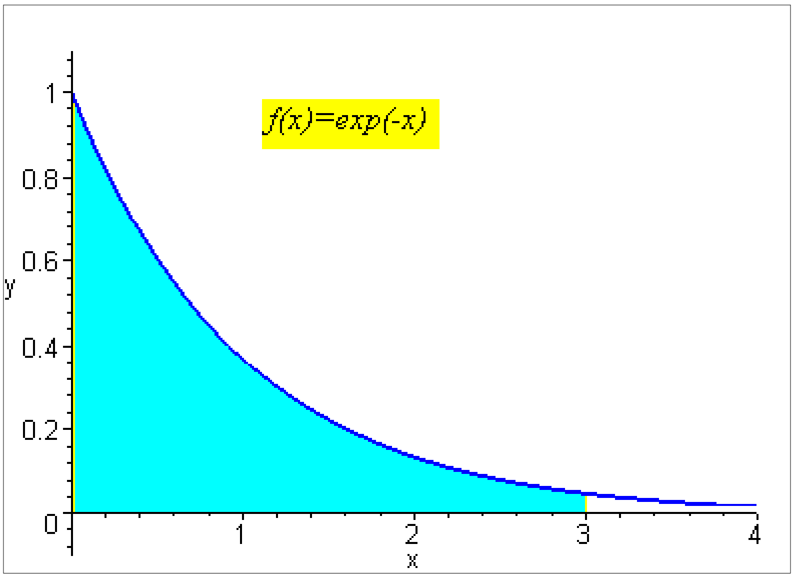
$$\int_0^\infty e^{(-x)}\, dx = \lim_{b \to \infty} 1 - e^{(-b)}$$

```
> Int(exp(-x),x=a..infinity)=limit(int(exp(-x),x=a..b),b=infinity);
```

$$\int_0^\infty e^{(-x)}\, dx = 1$$

```
> with(plottools):
Warning, the assigned name translate now has a global binding
```

```
> a:=0:b:=3:
> abra:=plot(exp(-x),x=a..b+1,y=-.1..1.1,color=blue,thickness=2):
> vonal1:=line([a+0.02,0],[a+0.02,exp(-a)],color=yellow):
> vonal2:=line([b,0],[b,exp(-b)],color=yellow):
> plots[display]([abra,vonal1,vonal2],title=`f(x)=exp(-x)`):
```




```
> b:='b':
```

2. Példa

> Az $\mathbf{f(x)} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x^2}}$ függvény minden véges [0,b] intervallumon integrálható és

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..b)=int(1/(1+x^2),x=0..b);
```

$$\int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(b)$$

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..infinity)=Limit(Int(1/(1+x^2),x=0..b),b=in
  finity);
```

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..infinity)=Limit(int(1/(1+x^2),x=0..b),b=in
  finity);
```

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(b)$$

```
> Int(1/(1+x^2),x=0..infinity)=limit(int(1/(1+x^2),x=0..b),b=in
  finity);
```

Tehát az improprius integrál létezik és értéke $\dfrac{\pi}{2}$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$$

3. Példa

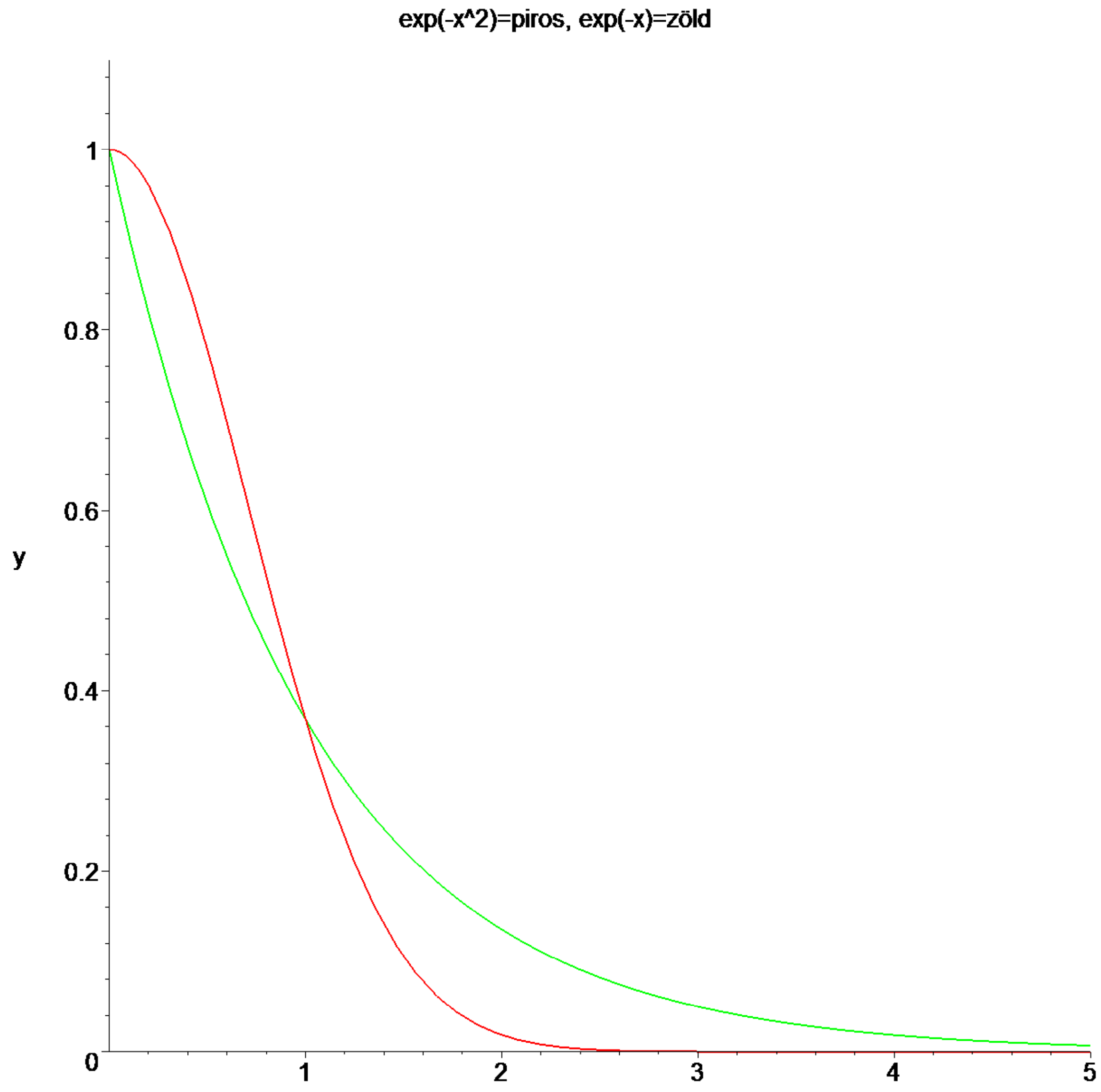
Döntsük el, hogy az $\int_1^{\infty} e^{(-x^2)}\, dx$ integrál konvergens vagy divergens!

Megoldás

Mivel a tekintett függvény primitív függvénye nem elemi függvény, az improprius integrált nem tudjuk megvizsgálni, más utat kell keresnünk!

Vizsgáljuk az $\mathbf{I}(b) = \int_1^{\infty} e^{(-x^2)}\, dx$ integrált úgy, hogy közben annak geometriai jelentésére is gondolunk: az $f(x) = e^{(-x^2)}$ függvény görbe alatti területét jelenti az[1,b] intervallumon.
Világos, hogy az $I(b)$ szigorúan monoton növekvő. Így két lehetőség áll fenn:
a) I(b) tart a ∞-be, midőn $b \to \infty$, vagy
b) I(b) véges határértékkel rendelkezik, midőn $b \to \infty$.
Megmutatjuk, hogy az első eset nem állhat fenn. Ezt úgy érjük el, hogy összehasonlítjuk az $f(x) = e^{(-x^2)}$ és a $g(x) = e^{(-x)}$ görbe alatti ferületét a kérdéses intervallumon.

```
> plot([exp(-x^2),exp(-x)],x=0..5,y=0..1.1,color=[red,green],thickness=2,title=`exp(-x^2)=piros, exp(-x)=zöld`);
>
```




```
> b:='b';
>
```

$$b := b$$

Mivel $\mathbf{e}^{(-x^2)} < \mathbf{e}^{(-x)}$ minden $1 < x$ esetén(ez nyílvánvaló, s az ábrán is jól látható) és:

```
> Int(exp(-x),x=1..infinity)=Limit(Int(exp(-x),x=1..b),b=infinity);
```

$$\int_1^\infty \mathbf{e}^{(-x)}\,dx = \lim_{b \to \infty} \int_1^b \mathbf{e}^{(-x)}\,dx$$

```
> Int(exp(-x),x=1..infinity)=Limit(int(exp(-x),x=1..b),b=infinity);
```

$$\int_1^\infty \mathbf{e}^{(-x)}\,dx = \lim_{b \to \infty} \mathbf{e}^{(-1)} - \mathbf{e}^{(-b)}$$

```
> Int(exp(-x),x=1..infinity)=limit(int(exp(-x),x=1..b),b=infini
```

```
ty);
```

$$\int_{1}^{\infty} e^{(-x)}\, dx = e^{(-1)}$$

vagyis tetszőleges b esetén $\int_{1}^{b} e^{(-x)}\, dx \le e^{(-1)}$

Ezért

$$I(b) = \int_{1}^{b} e^{(-x^2)}\, dx \le \int_{1}^{b} e^{(-x)}\, dx = e^{(-1)} - e^{(-b)} \le e^{(-1)},$$

hiszen, ha $f(x) \le g(x)$ az [a,b] minden elemére, akkor $\int_{a}^{b} f(x)\, dx \le \int_{a}^{b} g(x)\, dx$. De ez azt jelenti, hogy az $\int_{1}^{b} e^{(-x^2)}\, dx$ integrál korlátos, tehát az első eset nem állhat fenn. Mivel pedig az integrál monoton növekvő is, valóban konvergens. Értékét nem számoltuk ki, de annyit minden esetre elmondhatunk róla, hogy kisebb $e^{(-1)}$-nél.

```
>
```

Az integrálandó függvény nem korlátos

Probléma

Tekintsük az $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvényt! Értelmezhető-e a [0,1] intervallumon a függvény határozott integrálja, s ha igen, mivel egyenlő?

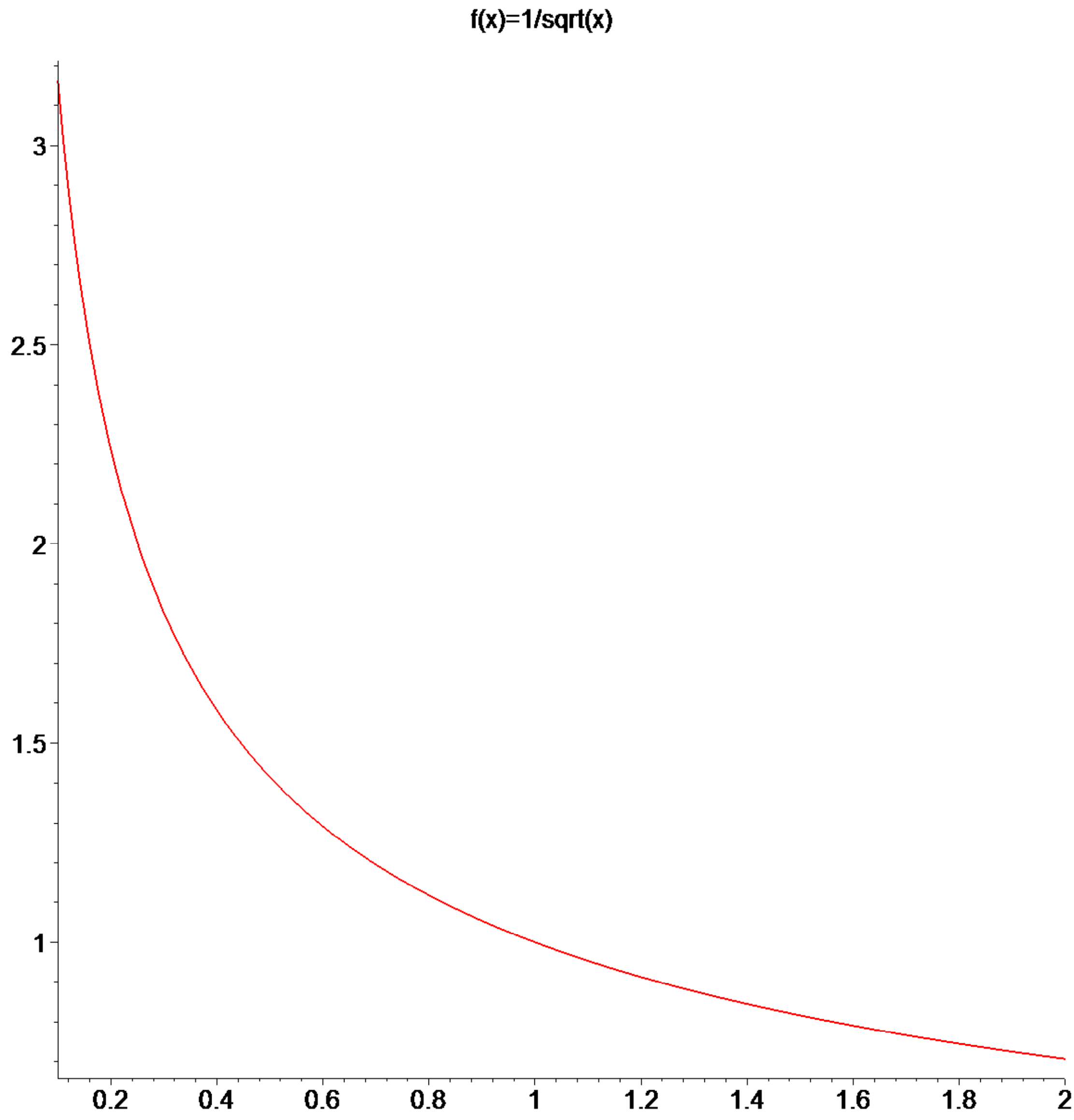
Megoldás

Nyilván a közönséges értelemben az integrál nem létezik, hiszen a függvény az adott intervallumon nem korlátos:

```
> f:=x->1/sqrt(x);
```

$$f := x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$$

```
> plot(f(x),x=0.1..2,discont=true,thickness=2,title=`f(x)=1/sqrt(x)`);
```




```
> Limit(f(x),x=0,right)=limit(f(x),x=0,right);
```

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$$

Tekintsük azonban a függvényt a $[0 + \varepsilon, 1]$ intervallumon, ahol $0 < \varepsilon < 1$. Ezeken az intervallumokon már korlátos az f függvény, s integrálható is. Vizsgáljuk meg, hogyan alakul az integrál értéke. ha $x \to 0$-hoz jobbról!

```
> Limit(Int(f(x),x=epsilon..1),epsilon=0,right)=Limit(int(f(x),
  x=epsilon..1),epsilon=0,right);
```

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} -2\sqrt{\varepsilon} + 2$$

```
> Limit(Int(f(x),x=epsilon..1),epsilon=0,right)=limit(int(f(x),
  x=epsilon..1),epsilon=0,right);
```

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$$

A határérték létezik, s 2-vel egyenlő. Kézenfekvő, hogy azt mondjuk, a [0,1] intervallumon az f integrálja 2-vel , tehát ezzel a határértékkel egyenlő!

```
> Int(f(x),x=0..1)=int(f(x),x=0..1);
```

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$$

Értelmezés

Ha az f függvény az [a,b] intervallum a végpontjának környezetében nem korlátos, de minden olyan [a+**ε** , b] intervallumon integrálható, amelyre a+**ε** < ***b***, s létezik a

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

véges határérték, akkor megállapodás szerint elfogadjuk, hogy

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\, dx$$

Hasonlóan, ha az f az [a,b] számköz b végpontjának környezetében nem korlátos, de minden olyan [a , $\boldsymbol{b-\varepsilon}$] intervallumon integrálható, amelyre 0<ε $< b-a$ és létezik a

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

véges határérték, akkor megállapodás szerint elfogadjuk, hogy

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

Ha az f függvény az [a,b] intervallum egyik végpontjának környezetében sem korlátos, de minden olyan $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ intervallumon integrálható, amelyre
0<ε $< b-a$, továbbá létezik az

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

véges határérték, akkor megállapodásszerűen elfogadjuk, hogy

$$\int_{a}^{b} f(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon} f(x)\, dx$$

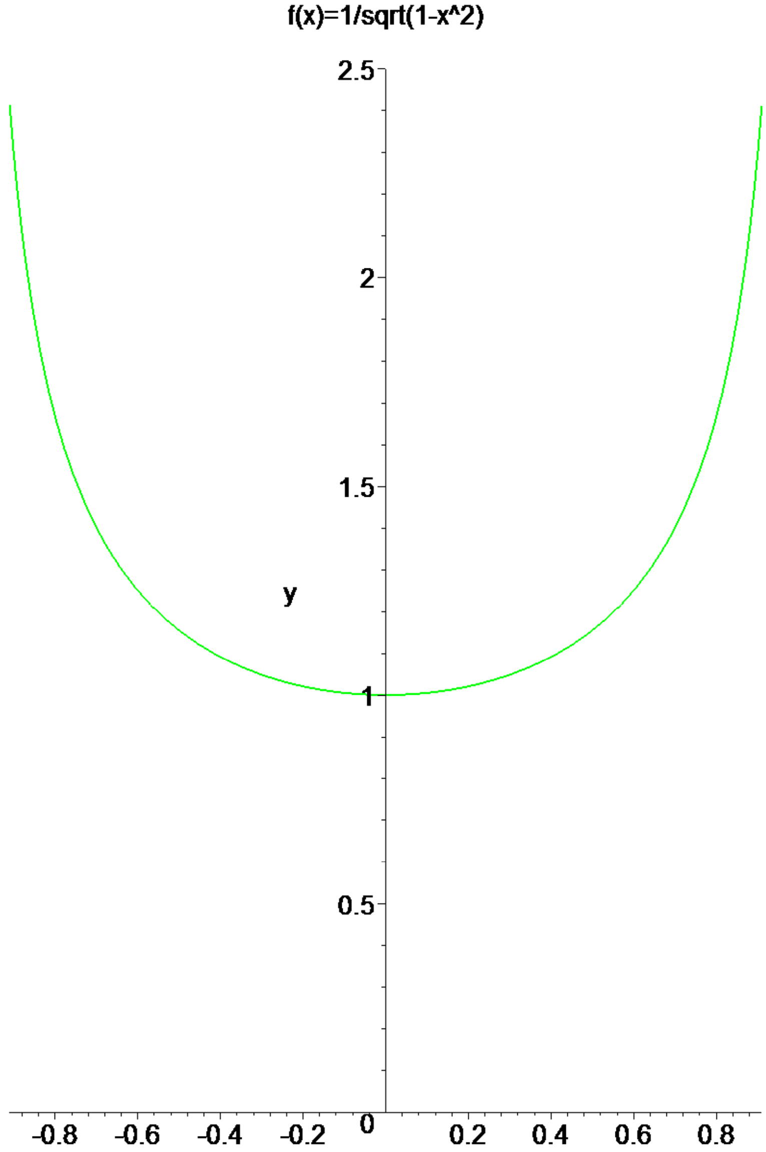
4. Példa

Mutassuk meg, hogy létezik az $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ integrál, s számítsuk ki az értékét!

Megoldás

Ábrázoljuk a függvényt!

```
> plot(1/sqrt(1-x^2),x=-0.91..0.91,y=0..2.5,scaling=constrained
  ,thickness=2,color=green,title=`f(x)=1/sqrt(1-x^2)`);
```



Az ábraról is látszik, de igazolható is, hogy a függvény a [-1,1] intervallumon nem korlátos:

```
> Limit(1/sqrt(1-x^2),x=1,left)=limit(1/sqrt(1-x^2),x=1,left);
```

$$\lim_{x \to 1-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \infty$$

A definíció alapján:

```
> Int(1/sqrt(1-x^2),x=-1..1)=Limit(Int(1/sqrt(1-x^2),x=-1+epsil
  on..1-epsilon),epsilon=0,right);
```

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{\varepsilon - 1}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

```
> Int(1/sqrt(1-x^2),x=-1..1)=Limit(int(1/sqrt(1-x^2),x=-1+epsilon..1-epsilon),epsilon=0,right);
```

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+} -2\arcsin(\varepsilon - 1)$$

```
> Int(1/sqrt(1-x^2),x=-1..1)=limit(int(1/sqrt(1-x^2),x=-1+epsilon..1-epsilon),epsilon=0,right);
```

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi$$

```
>
```