1. Zárthelyi dolgozat (próba)

2012. március 14.

1. Definiálja a következő fogalmakat
1.1. Integrálközelítő összeg;
1.2. Primitív függvény;
1.3. Konvexitás-konkávitás, inflexiós pont.

2. Az f függvény második deriváltjának az x_0 pontban zérushelye van, azaz $f''(x_0) = 0$ és f '' az x_0 pontban negatívból pozitívba vált, azaz az x_0 baloldali félkörnyezetében negatív, jobboldali félkörnyezetében pozitív előjelű.
Rajzolja fel az f ' és az f függvények lehetséges képének két változatát, s írja le az f ' és az f függvények viselkedését!

3.1.Melyik függvény, melyik intervallumra vonatkozó integrálközelítő összege a következő összeg:

$$\sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i}\,\xi_i (x_i - x_{i-1}) \quad (x_0 = 1;\ x_n = 2;\ x_{i-1} < x_i, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i=1, 2, \ldots, n)$$

3.2. Tekintsük a $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max(x_i - x_{i-1}) \to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-\xi_i}\,\xi_i \right) (x_i - x_{i-1})$ határértéket! (a fenti előírásokkal)

Ha létezik a határérték, akkor mivel egyenlő?

4. Mondja ki és igazolja az integrálszámítás középérték tételét!

5. Tekintsük a $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{e^{(-3\cdot x)} - 1}{\sin(2\cdot x)} \right)$ határértéket!

5.1. Mutassa meg, hogy a szereplő függvények teljesítik a L'Hospital-szabály alkalmazásának feltételeit!
5.2. Számítsa ki a határértéket!

6. Mutassa meg , hogy az $x^4 - 5\ x^2 + 2\ x - 5 = 0$ egyenletnek pontosan egy gyöke van a [2,3] intervallum belsejében! Igazolja, hogy az $f(x) = x^4 - 5\ x^2 + 2\ x - 5$ függvényre a szóbanforgó intervallumban teljesülnek a Newton-féle érintő módszer alkalmazásának feltételei! Számítsa ki a gyököt $10^{(-3)}$-nál kisebb hibával!

7. Teljes függvényvizsgálat elvégzése után ábrázolja az $f(x) = x^2 \cdot e^{(-x)}$ függvényt!

8. Számítsa ki a következő integálokat

8.1. $\displaystyle\int \frac{(x+1)\ (x-1)\ (x^2+1)}{\sqrt{x}}\,dx$; 8.2. $\displaystyle\int \sin\left(3\ x + \frac{\pi}{4}\right) dx$ 8.3. $\displaystyle\int \frac{1}{\arctan(x)\ (x^2+1)}\,dx$;

8.4. $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot \ln(x) \cdot \ln(\ln(x))}\, \mathrm{d}x;$