Integrálás helyettesítéssel

A helyettesítés formulái

Tétel

Ha
(1) $t = g(x)$,
(2) létezik az $\int f(t)\, dt$ integrál,
(3) a g függvény differenciálható és
(4) létezik az $f(g(x))$ összetett függvény,

akkor létezik az $\int f(g(x)) \left(\frac{d}{dx} g(x)\right) dx$ integrál is, és

$$\int f(g(x)) \left(\frac{d}{dx} g(x)\right) dx = \int f(t)\, dt, \quad \text{ahol} \quad t = g(x).$$

Példa

Számítsuk ki a következõ integrált

$$\int e^{(x^2)}\, 2\, x\, dx$$

Megoldás

Legyen $t = x^2$. Ekkor $dt = 2\, x\, dx$. Így

$$\int e^{(x^2)}\, 2\, x\, dx = \int e^t\, dt = e^t + C.$$

A $t = x^2$ helyettesítést elvégezve:

$$\int e^{(x^2)}\, 2\, x\, dx = e^{(x^2)} + C$$

```
> restart:with(student):
> Int(exp(x^2)*(2*x),x)=changevar(x^2=t,Int(exp(x^2)*2*x,x),t);
```

$$\int 2\, e^{(x^2)}\, x\, dx = \int e^t\, dt \qquad (1.1)$$

```
> Int(exp(x^2)*2*x,x)=changevar(t=x^2,int(exp(x^2)*2*x,x),t);
```

(1.2)

$$\int 2\,e^{(x^2)}\,x\,dx = e^{(x^2)} \tag{1.2}$$

>

Tétel

Ha teljesülnek a következõ feltételek:
(1) az $x = \phi(t)$ függvény szigorúan monoton, differenciálható,
(2) $\frac{d}{dt}\,\phi(t) \neq 0$;
(3) és $\phi(t)$ értékkészlete tartalmazza $f(x)$ értelmezési tartományát és
(4) létezik az $\int f(\phi(t))\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\phi\right) dt$ integrál,

akkor

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(t))\left(\frac{\partial}{\partial t}\,\phi\right) dt, \quad \text{ahol } t = \phi(x)^{(-1)}.$$

Példa

Számítsuk ki a következõ integrált

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx$$

Megoldás

Próbálkozzunk az $x = t^2$ $(0 \le t)$ helyettesítéssel. Ekkor $dx = 2\,t\,dt$. Így

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right) dx = 2\int t\cos(t)\,dt =$$

Parciális integrálással folytatva

$$=2\,t\sin(t) - 2\int \sin(t)\,dt = 2\,t\sin(t) + 2\cos(t) + C$$

Elvégezve a visszahelyettesítést:, vagyis a $t = \sqrt{x}$ helyettesítést:

$$2\sqrt{x}\,\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + C$$

Példák

```
> restart:
> with(student):
```

Példa

Számítsuk ki a következõ integrált:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás

Észrevehetjük, hogy az $1-x^2$ differenciálhányadosa konstans szorzótól eltekintve a számláló. Ezért célszerûnek látszik a $t=1-x^2$ helyettesítés.

```
> Int(x/sqrt(1-x^2),x)=changevar(1-x^2=t,Int(x/sqrt(1-x^2),x),t);
```

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad (2.1)$$

```
> rhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = -\sqrt{t} \qquad (2.2)$$

```
> Int(x/sqrt(1-x^2),x)=subs(t=1-x^2,rhs(%));
```

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{1-x^2} \qquad (2.3)$$

```
> Diff(rhs(%),x)=diff(rhs(%),x);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (2.4)$$

Példa

Számítsuk ki a következõ integrált:

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)^3}{1+\cos(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás

A nevezõ deriváltja:

```
> Diff(1+cos(x)^2,x)=diff(1+cos(x)^2,x);
```

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1+\cos(x)^2\right) = -2\cos(x)\sin(x) \qquad (2.5)$$

Ezért célszerûnek tûnik a $t=1+\cos(x)^2$ helyettesítés:

```
> Int(sin(x)*cos(x)^3/(1+cos(x)^2),x)=changevar(1+cos(x)^2=t,Int
  (sin(x)*cos(x)^3/(1+cos(x)^2),x),t);
```

(2.6)

$$\int \frac{\sin(x)\cos(x)^3}{1+\cos(x)^2}\,dx = \int -\frac{1}{2}\,\frac{-1+t}{t}\,dt \tag{2.6}$$

```
> rhs(%)=changevar(t=1+cos(x)^2,int(sin(x)*cos(x)^3/(1+cos(x)^2),
x),t);
```

$$\int -\frac{1}{2}\,\frac{-1+t}{t}\,dt = -\frac{1}{2}\cos(x)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos(x)^2\right) \tag{2.7}$$

```
> Diff(rhs(%),x)=diff(rhs(%),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos(x)^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1+\cos(x)^2\right)\right) = \cos(x)\sin(x) - \frac{\cos(x)\sin(x)}{1+\cos(x)^2} \tag{2.8}$$

```
> Diff(rhs(%),x)=simplify(rhs(%));
```

$$\frac{d}{dx}\left(\cos(x)\sin(x) - \frac{\cos(x)\sin(x)}{1+\cos(x)^2}\right) = \frac{\sin(x)\cos(x)^3}{1+\cos(x)^2} \tag{2.9}$$

Példa

Számítsuk ki a következõ integrált:

$$\int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1-x^2}\,dx$$

Megoldás

A számláló deriváltja:

```
> simplify(diff(ln((1+x)/(1-x)),x));
```

$$-\frac{2}{-1+x^2} \tag{2.10}$$

Ez lényegileg a nevezõ, ezért legyen a helyettesítés:

$$t = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

```
> Int(1/(1-x^2)*ln((1+x)/(1-x)),x)=simplify(changevar(ln((1+x)/(1-
x))=t,Int(1/(1-x^2)*ln((1+x)/(1-x)),x),t));
```

$$\int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int t\,dt \tag{2.11}$$

Elvégezve a jobboldalon az integrálást:

```
> lhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\,t^2 \qquad (2.12)$$

Visszahelyettesítve:

```
> lhs(%)=subs(t=ln((1+x)/(1-x)),value(rhs(%)));
```

$$\int \frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \qquad (2.13)$$

Ellenõrizzük eredményünket deriválással:

```
> Diff(rhs(%),x)=diff(rhs(%),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1+x}{(1-x)^2}\right)(1-x)}{1+x} \qquad (2.14)$$

Ebbõl nem nagyon látszik, jó-e az eredmény! Hozzuk egyszerûbb alakra a deriváltat:

```
> simplify(rhs(%));
```

$$-\frac{\ln\left(-\frac{1+x}{-1+x}\right)}{-1+x^2} \qquad (2.15)$$

```
>
```

Így már látszik, hogy jól dolgoztunk!

Példa

Számítsuk ki az

$$\int e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\,dx$$

integrált helyettesítéssel.

Megoldás

Többféle helyettesítés szóba jöhet. Az egyik lehetõség a $t=2\sqrt{x}$.

```
> Int(exp(2*sqrt(x)),x)=changevar(t=2*sqrt(x),Int(exp(2*sqrt(x)),
  x),t);
```

$$\int e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\,dx = \int \frac{1}{2}\,e^t\,t\,dt \qquad (2.16)$$

Láthatóan innen parciális integrálással mehetünk tovább.

```
> Int(2*exp(2*t)*t,t)=intparts(rhs(%),t);
```

(2.17)

$$\int 2\,e^{(2t)}\,t\,dt = \frac{1}{2}\,e^{t}\,t - \int \frac{1}{2}\,e^{t}\,dt \tag{2.17}$$

A jobboldalon alapintegrált kaptunk. Ezt kiértékelve:

```
> lhs(%)=value(rhs(%));
```

$$\int 2\,e^{(2t)}\,t\,dt = \frac{1}{2}\,e^{t}\,t - \frac{1}{2}\,e^{t} \tag{2.18}$$

Visszahelyettesítve, tehát a $t = 2\sqrt{x}$ kapcsolat alapján az integrálás eredménye

```
> eredmény:=subs(t=2*sqrt(x),rhs(%));
```

$$eredmény := e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,e^{\left(2\sqrt{x}\right)} \tag{2.19}$$

Kaptuk tehát, hogy

```
> Int(exp(2*sqrt(x)),x)=eredmény;
```

$$\int e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\,dx = e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\,e^{\left(2\sqrt{x}\right)} \tag{2.20}$$

Ellenõrizzük eredményünket deriválással::

```
> diff(%,x);
```

$$e^{\left(2\sqrt{x}\right)} = e^{\left(2\sqrt{x}\right)} \tag{2.21}$$

Próbálkozhatunk úgy is, hogy a teljes integrálandó függvényt helyettesítjük új változóval:

```
> Int(exp(2*sqrt(x)),x)=changevar(t=exp(2*sqrt(x)),Int(exp(2*sqrt
   (x)),x),t);
```

$$\int e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\,dx = \int \frac{1}{4}\,\sqrt{4}\,\ln(t)\,dt \tag{2.22}$$

Hozzuk a jobb oldalt egyszerûbb alakra:

```
> lhs(%)=simplify(rhs(%));
```

$$\int e^{\left(2\sqrt{x}\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int \ln(t)\,dt \tag{2.23}$$

```
>
```