A határozott integrál fogalma, kiszámítása, műveleti tulajdonságai

Integrálközelítő összegek

Beosztás

Definíció

Ha $a < b$ és

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b, \qquad (1)$$

akkor az $[a, b]$ intervallum zárt részintervallumainak

$$[x_{i-1}, x_i] \qquad (i=1,2, \dots ,n)$$

halmazát az $[a, b]$ intervallum *beosztás*ának, az (1)-beli pontokat a beosztás *osztáspontjainak* nevezzük. Az $[a, b]$ intervallum valamely beosztását `δ` finomságúnak mondjuk, ha a beosztáshoz tartozó részintervallumok mindegyike legfeljebb `δ` hosszúságú.

Megjegyzések

- az $[a, b]$ intervallumot nem feltételül egyenlõ hosszúságú részekre osztjuk föl;
- az $[a, b]$ intervallum fölosztása végtelenül sokféleképpen elkészíthetõ;
- az osztópontok számát növelve nem feltétlenül finomodik a beosztás;
- Ha $b < a$, akkor a $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ negatív.

Reprezentánsrendszer

Definíció

Legyen megadva az $[a, b]$ intervallum valamely B beosztása az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

osztáspontokkal, és legyen ξ_i az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallum tetszõleges pontja. (i = 1,2, . . . , n)

A $[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$ véges számsorozatot a B beosztás **reprezentánsrendszer**ének nevezzük.

Az integrálközelítõ összeg fogalma

Definíció

Legyen az f az $[a, b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos függvény, továbbá legyen B az $[a, b]$ intervallum valamely beosztása az

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

osztáspontokkal és legyen

$$[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]$$

a B beosztás valamely reprezentánsrendszere. Az f függvény által a kiválasztott ξ_i helyeken

felvett függvényértékeket szorozzuk meg a megfelelõ
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ különbséggel és az így nyert $f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1})$ szorzatokat összegezzük:

$$f(\xi_1)\ (x_2 - x_1) + f(\xi_2)\ (x_3 - x_2) + \ldots + f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) + \ldots + f(\xi_n)\ (x_n - x_{n-1}),$$

vagy röviden

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1})$$

összeget az f függvényhez, a B beosztáshoz és a $[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$ reprezentánsrendszerhez tartozó **integrálközelítõ összeg**nek nevezzük. A fenti módon elkészített integrálközelítõ összegeket **Riemann-összeg**eknek is nevezik.
Ha valamelyik ξ_i helyen f nincs értelmezve, akkor $f(\xi_i)$-ként tetszõleges, de a továbbiakra rögzített valós számot vehetünk.

A határozott integrál fogalma

Az elõzõkben leírtak alapján olyan sorozatokat képezhetünk, amelyeknek minden eleme annyi tagú összeg, amennyi az elem indexe:

$$I_1 = f(\xi_1)\ \Delta x_1,\ \text{ahol}\ \Delta x_1 = b - a$$

$$I_2 = f(\xi_1)\ \Delta x_1 + f(\xi_2)\ \Delta x_2,\ \text{ahol}\ \Delta x_1 + \Delta x_2 = b - a;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$I_n = f(\xi_1)\ \Delta x_1 + f(\xi_2)\ \Delta x_2 + \ldots f(\xi_n)\ \Delta x_n,\ \text{ahol}\ \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n = b - a$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Az $I_1, I_2, \ldots I_n, \ldots$ sorotat végtelen sok változatban elkészíthetõ. Ez azért van így, mert egyrészt a beosztássorozat végtelen sokféle, másrészt adott beosztássorozat esetén a ξ_i értékeket végtelen sokféleképpen választhatjuk meg
A következõkben a beosztások és az integrálközelítõ összegek sorozatairól lesz szó, majd definiáljuk a határozott interál fogalmát

Definíció

Legyen a $[B_n]$ az $[a, b]$ intervallum beosztásainak sorozata, és jelölje δ_n a B_n beosztást alkotó részintervallumok hosszúságának legkisebb felsõ korlátját. Akkor mondjuk, hogy a $[B_n]$ beosztássorozat minden határon túl finomodó, ha

$$\lim_{n \to \infty} \delta_n = 0.$$

Definíció

Legyen az f az $[a, b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos függvény.
Képezzük az $[a, b]$ intervallum beosztásainak minden határon túl finomodó B_n beosztássorozatait és a hozzájuk, valamint az f függvényhez tartozó integrálközelítõ összegek I_n sorozatait.
Ha valamennyi I_n sorozat a beosztássorozat és a reprezentánsrendszerek választásától függetlenül konvergens és határértéke ugyanaz a szám, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon **integrálható és az** $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálja ezen határértékkel egyenlõ:

$$\lim_{n \to \infty} I_n = \lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}) \right) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az a és a b az integrálás alsó ill. felső határa.

Megjegyzés

A fenti definíciót Bernhard Riemann (1826-1866) német matematikus fogalmazta meg, ezért Riemann-integrálként szoktuk emlegetni.
Riemann-integrál

A határozott integrál létezésének feltételei

Szükséges feltétel

A határozott integrál létezésének **szükséges feltétele**:

Az f függvénynek az [a,b] zárt intervallumon **korlátos**nak és az [a,b] **minden pontjában értelmezett**nek kell lennie.

Megjegyzés: Esetleg megengedhetõ, hogy az intervallum véges sok pontjában ne legyen értelmezve a függvény.

Szükséges és elégséges feltételek

A szükséges és elégséges feltétel definícióként szolgálhat. A határozott integrál alábbi két definíciója egyenértékű az eredeti definícióval. Ez azt jelenti, hogy ha egy függvény határozott integrálja létezik a három definíció bármelyike szerint, akkor létezik a másik kettő szerint is.

Definíció II.

Legyen az f függvény az [a,b] intervallum minden pontjában értelmezett, korlátos függvény. Ha az [a,b] intervallum tetszõleges, minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x_i = f(m_1)\,\Delta x_1 + f(m_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(m_n)\,\Delta x_n$$

alsó integrálközelítõ összegek sorozatának (ahol m_i az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az f függvény értékeinek pontos alsó határa) és a

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x_i = f(M_1)\,\Delta x_1 + f(M_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(M_n)\,\Delta x_n$$

felsõ integrálközelítõ összegek sorozatának (ahol M_i az $[x_{i-1}, x_i]$ intervallumon az f függvény értékeinek pontos felsõ, m_i pedig alsó határa) **létezik közös határértéke**, akkor ezt a határértéket az f függvény [a,b] intervallumra vonatkozó határozott integráljának nevezzük, azaz:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\,\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

ahol $\lim_{n\to\infty} \max(\Delta(x_i)) = 0.$

A fenti definíciót Gaston Darboux (1842-1917) fogalmazta meg először, így s_n összegeket alsó, a

S_n összegeket felső Darboux-összegeknek, a most definiált integrált pedig Darboux integrálnak nevezik.

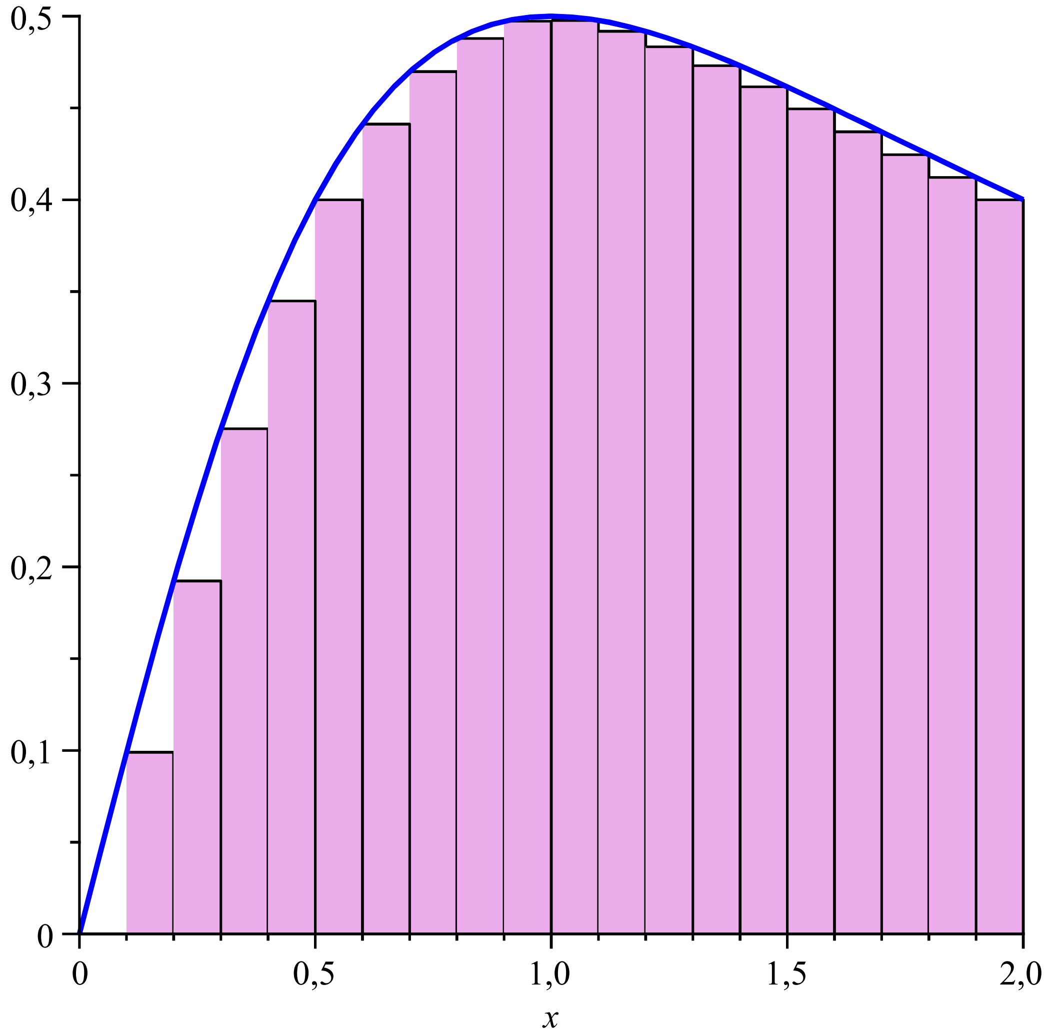
Eljárások a Darboux-összegek szemléltetésére

A **Darbouxalso** és a **Darbouxfelso** eljárások az alsó- ill. felső Darboux-összegeket szemléltetik. Paramétereik rendre: f: a függvény, a,b: az integrálás alsó- ill. felső határa, n: az osztópontok száma.

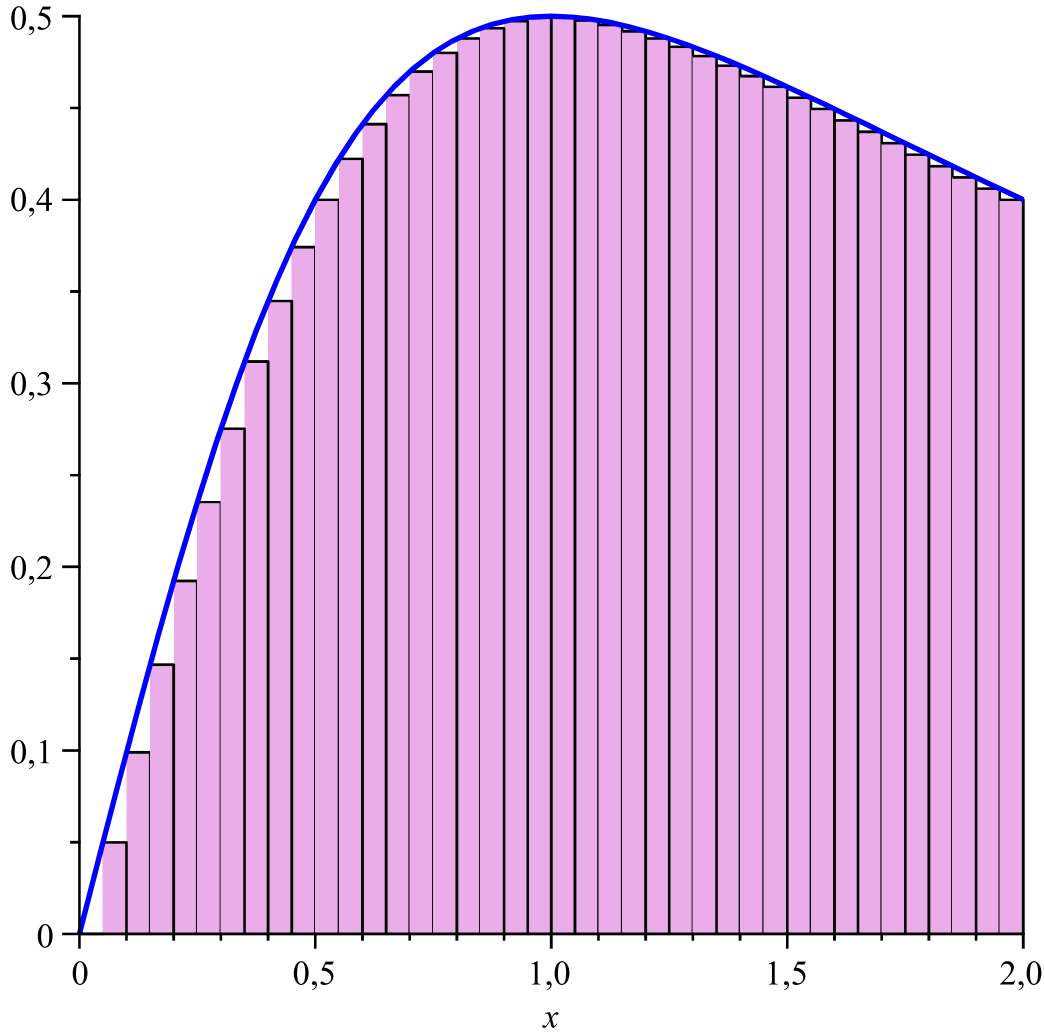
```
> f:=x->x/(x^2+1);
```

$$f := x \rightarrow \frac{x}{x^2+1} \tag{3.2.1.1}$$

```
> Darbouxalso:=proc(f,a,b,n)
>    local  h,Rajzok,mini,kp,vp,poli,kep,i,fv;
>    Rajzok:=NULL:
>    h:=(b-a)/n;
>    for  i  from 1  to  n  do
>      kp:=a+(i-1)*h:vp:=a+i*h:
>      mini:=evalf(minimize(f(x),x=kp..vp)):
>      poli:=[[kp,0],[vp,0],[vp,mini],[kp,mini]];
>      kep:=plots[polygonplot](poli,color=plum):
>      Rajzok:=kep,Rajzok
>      od:
>    fv:=plot(f(x),x=a..b,color=blue,thickness=2):
>    plots[display]({Rajzok,fv});
> end:
> Darbouxalso(f,0,2,20);
```




```
> Darbouxalso(f, 0, 2, 40);
```



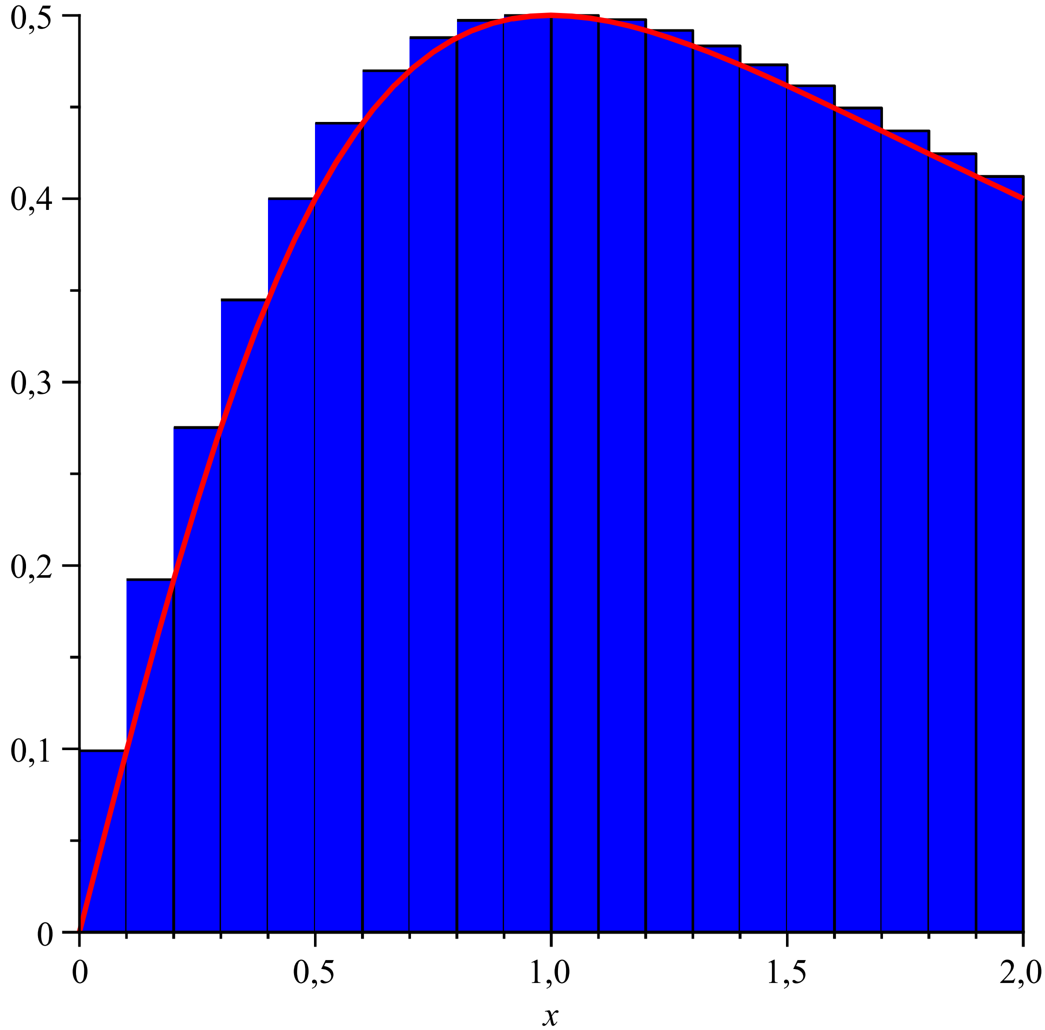
Láthatóan a lila színû téglalapok , amelyeket **beírt téglalap**oknak nevezünk, most az elõzõnél fínomabban közelítik meg a függvény alatti síkidomot, területösszegük pedig a görbe alatti területet.

\>

A **` Darboux_felsõ`(f,a,b,n) eljárás a körülírt téglalap**okkal való közelítést szemlélteti.

```
> Darbouxfelso:=proc(f,a,b,n)
>   local  h,Rajzok,maxi,kp,vp,poli,kep,i,fv;
>   Rajzok:=NULL:
>   h:=(b-a)/n;
>   for i from 1 to n do
>     kp:=a+(i-1)*h:vp:=a+i*h:
>     maxi:=evalf(maximize(f(x),x=kp..vp)):
>     poli:=[[kp,0],[vp,0],[vp,maxi],[kp,maxi]];
>     kep:=plots[polygonplot](poli,color=blue):
>     Rajzok:=kep,Rajzok
>     od:
>   fv:=plot(f(x),x=a..b,thickness=2):
>   plots[display]({Rajzok,fv});
```

```
> end:
> Darbouxfelso(f, 0, 2, 20);
```




```
>
```

Eljárások a Darboux-összegek kiszámítására

A **Darboux_also** és a **Darboux_felso** eljárások az alsó- ill. felső Darboux-összegeket számítják ki. Paramétereik rendre: f: a függvény, a,b: az integrálás alsó- ill. felső határa, n: az osztópntok száma.

```
> Darboux_also:=proc(f, a, b, n)
> local  kp, vp, mini, Osszeg, alsokoz, i, h;
> Osszeg:=0:
> h:=(b-a)/n:
>   for  i  from 1  to  n  do
>      kp:=a+(i-1)*h: vp:=a+i*h:
>      mini:=evalf(minimize(f(x), x=kp..vp)):
>      Osszeg:=Osszeg+mini*h;
>      od:
> end:
```

```
> Darboux_felso:=proc(f,a,b,n)
> local  kp,vp,maxi,Osszeg,alsokoz,i,h;
> Osszeg:=0:
> h:=(b-a)/n:
>  for i from 1 to n do
>     kp:=a+(i-1)*h:vp:=a+i*h:
>     maxi:=evalf(maximize(f(x),x=kp..vp)):
>     Osszeg:=Osszeg+maxi*h;
>     od:
> end:
> `a beírt téglalapok területösszege`=Darboux_also(f,0,2,20);
```

$$\text{a beírt téglalapok területösszege} = 0.7737847762 \quad (3.2.2.1)$$

```
> `a körülírtírt téglalapok területösszege`=Darboux_felso(f,0,2,20);
```

$$\text{a körülírtírt téglalapok területösszege} = 0.8337847762 \quad (3.2.2.2)$$

```
>
```

S végül a harmadik megfogalmazás:

Definíció III:

Legyen az f függvény az [a,b] intervallum minden pontjában értelmezett, korlátos függvény. Ha az [a,b] intervallum tetszõleges, minden határon túl finomodó beosztássorozatához tartozó

$$`\Omega`(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(f(M_i)-f(m_i)\right)\ `\delta`(x_i)$$

oszcillációs összegek sorozatainak a beosztássorozat osztópontjainak kijelölésétõl függetlenül mindig 0 a határértéke ,akkor az f függvényt az [a,b] intervallumon integrálhatónak mondjuk. Jelekkel:

$$\lim_{n\to`\infty`} `\Omega`(n)=\lim_{n\to`\infty`}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(f(M_i)-f(m_i)\right)\ `\delta`(x_i)\right)=0$$

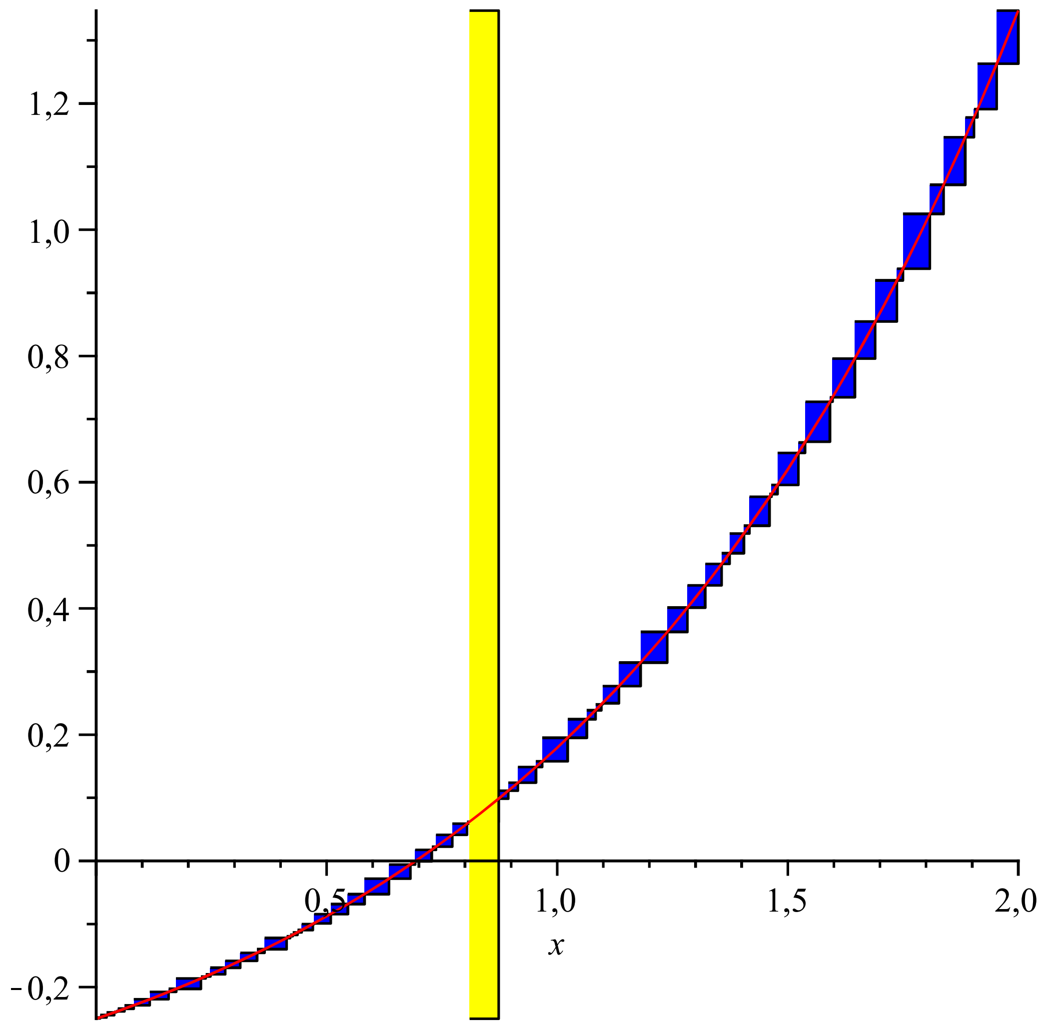
Eljárás az oszcillációs összeg szemléltetésére és felső becslésére

```
> x:='x':
> with(plots):
> f:=x->exp(x)/4-1/2;
```

$$f:=x\to\frac{1}{4}\,e^{x}-\frac{1}{2} \quad (3.2.3.1)$$

```
> oszci:=proc(f,a,b,n)
>    global k,oszckorlat;
>    local  h,Rajzok,hossz,maxi,mini,val,kp,vp,poli,kep,kep1,i,fv,pont,oszlop;
>    Rajzok:=NULL:
>    h:=(b-a)/n;
```

```
>     vp:=a:k:=0;
>     hossz:=0;
>     while vp+h<=b do
>       val:=evalf(rand()/10^12);   k:=k+1:
>       kp:=vp:vp:=kp+val*h:
>       if (vp-kp)>hossz then hossz:=vp-kp:pont:=kp:  fi;
>         maxi:=evalf(maximize(f(x),x=kp..vp)):
>         mini:=evalf(minimize(f(x),x=kp..vp)):
>       poli:=[[kp,mini],[vp,mini],[vp,maxi],[kp,maxi]];
>       kep:=polygonplot(poli,color=blue):
>       Rajzok:=kep,Rajzok
>       od:
>       if vp<b then val:=evalf(rand()/10^12);
>         k:=k+1;
>       maxi:=evalf(maximize(f(x),x=vp..b)):
>         mini:=evalf(minimize(f(x),x=vp..b)):
>       poli:=[[vp,mini],[b,mini],[b,maxi],[vp,maxi]];
>       kep:=polygonplot(poli,color=blue):
>       Rajzok:=kep,Rajzok fi;
>     fv:=plot(f(x),x=a..b):
>       oszlop:=[[pont,f(a)],[pont+hossz,f(a)],[pont+hossz,f
  (b)],[pont,f(b)]]:
> kep1:=polygonplot(oszlop,color=yellow):
> oszckorlat:=evalf(hossz*(f(b)-f(a))):
>    display({Rajzok,fv,kep1});
> end:
> oszci(f,0,2,30);
```



> \`lépésszám\`=k;

$lépésszám = 75$ **(3.2.3.2)**

> \`Az oszcillációs összeg felsõ becslése\`=oszckorlat;

Az oszcillációs összeg felsõ becslése = 0.1013342480 **(3.2.3.3)**

>

A három definíció egyenértékű, azaz bármelyikük alapján ugyanazon függvények bizonyulnak integrálhatónak.Ez azt jelenti, hogy bármelyikük teljesülése maga után vonja a másik kettõ teljesülését. Tehát, ha valamelyiket elfogadjuk kiinduló definícióként, akkor megmutatható, hogy a másik kettõ feltételei teljesülnek, vagyis azok alapján is integrálható a függvény. Ezért ezek bármelyike az integrálhatóság szükséges és elégséges feltétele.
Azért van szükség mindhármójukra, mert más-más oldalról világítják meg az integrál fogalmát, s bizonyos tulajdonságok vizsgálatánál az egyik, míg máskor a másik definíció segít.

Elégséges feltételek

Az elégséges feltételek az integrálható függvények nevezetes osztályait jelölik ki.

Tétel

Az [a,b] zárt intervallumon **folytonos függvény integrálható**. (az [a,b] intervallumon.)

Bizonyítás

A tételt a folytonos függvények egy tulajdonságát elfogadva, s a szemléletre is alapozva igazoljuk. Az idézett tulajdonság: Az [a,b] zárt intervallumon folytonos függvény az [a,b]-n egyenletesen folytonos, azaz tetszõleges $0 < \varepsilon$ számhoz van olyan $0 < \delta$,hogy ha $|x_1 - x_2| < \delta$, akkor $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Ez a tulajdonság erõsebb a küzönséges folytonosságnál, azt jelenti, hogy az [a,b]-n létezik univerzális `δ`, amelynél egymástól kevesebbel eltérõ változóértékekhez tartozó függvényértékek az elõre adott `ε`-nál kevesebbel térnek el egymástól. Legyen `ε`>0 tetszõleges, a beosztássorozat minden határon túl finomodó. Ekkor van olyan `δ`>0, hogy bármely részintervallumban a részintervallumból vett tetszõleges x_{i-1} és x_i változóértékekre :$|f(x_i) - f(x_{i-1})| < \varepsilon$, ezért

$$\Omega_n < \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \left(x_i - x_{i-1}\right) = \varepsilon \, (b-a),$$

de $0 < \varepsilon$ tetszõleges, ezért

$$\lim_{n \to \infty} \Omega_n = 0$$

Tétel

Az [a,b] zárt intervallumon **monoton függvény integrálható**. (az [a,b] intervallumon.)

Az elõzõknél "enyhébb" feltétel is elegendõ a határozott integrál létezéséhez:

Tétel

Ha az f függvény az [a,b] zárt intervallumon korlátos és véges sok szakadási helye van, akkor integrálható az [a,b]-n.

Megjegyzés: Még ennél kevesebb is elegendõ: pl. megszámlálhatóan végtelen szakadási hely esetén is integrálható a korlátos függvény.

Példa

{A függvény az [a,b] intervallumon nem folytonos, de mindenütt értelmezett és van határozott integrálja}:

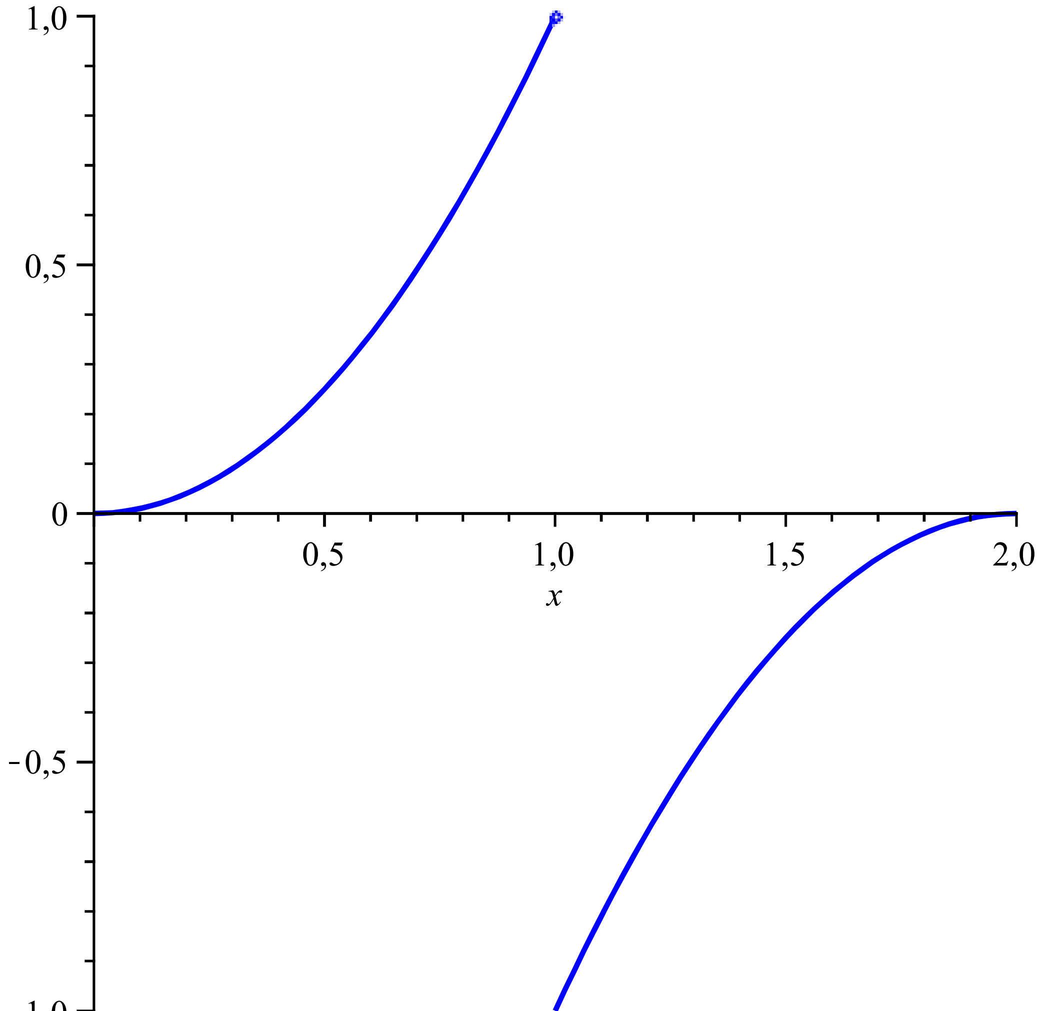
```
> f:=x->piecewise(0<=x and x<=1, x^2, 1<x and x<=2, -(x-2)^2);
```

$$f := x \to piecewise\left(0 \le x \text{ and } x \le 1, x^2, 1 < x \text{ and } x \le 2, -(x-2)^2\right) \qquad \mathbf{(3.3.1)}$$

```
> 'f(x)'=f(x);
```

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \text{ and } x \le 1 \\ -(-2+x)^2 & 1 < x \text{ and } x \le 2 \end{cases} \qquad \mathbf{(3.3.2)}$$

```
> plot(f(x),x=0..2,discont=true,color=blue,thickness=2);
```




```
> Int(f(x), x=0..2)=int(f(x), x=0..2);
```

$$\int_0^2 \begin{cases} x^2 & 0 \le x \text{ and } x \le 1 \\ -(-2+x)^2 & 1 < x \text{ and } x \le 2 \end{cases} dx = 0 \qquad (3.3.3)$$

Nem lepõdünk meg különösebben, hogy 0 az integrál számértéke, hiszen a függvény grafikonja középpontosan szimmetrikus az [1,0] pontra, az x tengely alatti és feletti görbe alatti idomok egybevágóak. Nézzük meg az oszcillációs össszegeket is.

A határozott integrál műveleti tulajdonságai

1) Az integrál értelmezésével összhangban megállapodunk abban, hogy minden valós a számra és minden f valós függvényre:

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

```
> f:='f':a:='a';
> Int(f(x), x=a..a)=int(f(x), x=a..a);
```

$$a := a$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.1}$$

>

2) A következõ definícióval olyan határozott integrálnak is értelmet adunk, amelyben a felsõ határ kisebb az alsó határnál.

Definíció

Bármely $a < b$ valós számpár esetén megállapodás szerint

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

feltéve, hogy a jobb oldalon álló integrál létezik.

3) Ha az f függvény az [a,b] számközön integrálható és c tetszõleges valós szám, akkor integrálható az [a,b] számközön az f függvény c-szerese is, mégpedig

$$\int_a^b c\ f(x)\,\mathrm{d}x = c\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

adódik, az R_n sorozat választásától függetlenül. Ez pedig éppen a tételben felírt képlet helyességét jelenti.

4) Ha **az f és a g függvények integrálhatók** az [a,b] számközön, akkor összegfüggvényük is integrálható az [a,b] intervallumon, mégpedig

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Az elõzõ két tétel tartalmát egyesíti a következõ, az integrál linearitását kifejezõ szabály:

5) Ha az f és a g függvények integrálhatók az [a,b] számközön, `α` és `β` tetszõleges valós számok, akkor az `α` $f(x)$ + `β` $g(x)$ függvény is integrálható az [a,b] számközön és

$$\int_a^b \alpha\ f(x) + \beta\ g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha\ \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\ \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

6) Ha f integrálható az [a,b] intervallumon, akkor integrálható az [a,b] bármely [c,d] részintervallumán is.

7) Ha az f függvény az a, b, c számokat magában foglaló számközön integrálható, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

A következõ tétel a határozott integrál értékére ad alsó és felsõ korlátot:

8) Ha az egyváltozós valós f függvénynek az [a,b] számközön
alsó korlátja az **m**,
felsõ korlátja a **M**
szám, és az f függvény az [a,b] intervallumon integrálható, akkor

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\cdot(b-a)$$

9) Az elõzõ tétel alapján könnyen bizonyíthatjuk a *folytonos függvények* határozott integráljára vonatkozó - gyakran alkalmazott - tételt, amelyet az **integrálszámítás középérték tételének** neveznek:

Tétel

Ha az egyváltozós valós f függvény az [a,b] számközön folytonos, akkor van olyan `ξ` az [a,b] számközben, hogy:

$$\boldsymbol{f(\xi)\cdot(b-a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Bizonyítás:

Az elõzõ tétel alapján

$$m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M\cdot(b-a)$$

ahol m ill. M az f alsó ill. felsõ korlátja az [a,b] számközön. Mivel f folytonos az [a,b]-n, ezeket az értékeket fel is veszi. Az elõzõ egyenlőtlenségsort

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)} \leq M$$

alakban is felírhatjuk. Az [a,b] zárt számközön folytonos f függvény minden m és M közötti függvényértéket felvesz, így az

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

értéket is, tehát van olyan `ξ` érték az $[a, b]$ intervallumban, amelyre

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(`\xi`),$$

s ezzel a tételt igazoltuk.

Kérdések

1. Mit értünk az [a,b] intervallum beosztása alatt?
2. Mikor mondjuk, hogy az [a,b] intervallum beosztása `δ` finomságú?
3. Mit értünk az [a,b] intervallum beosztásának reprezentánsrendszere alatt?
4. Definiálja az integrálközelítõ összeg (Riemann-összeg) fogalmát!
5. Adja meg a határozott integrál definícióját!
6. Mi a határozott integrál létezésének szükséges föltétele?
7. Milyen elégséges feltételei vannak a határozott integrál létezésének?
8. Melyek a határozott integrál mûveleti tulajdonságai?

9: Mutasson olyan függvényt, amely az $[a, b]$ intervallumon nem folytonos, és
   a) nem teljesül rá a középérték-tétel;
   b) mégis teljesül rá a középérték tétel.