1. Zárthelyi dolgozat (megoldás)

2012. október 17.

1.1. Definiálja a határozott integrál fogalmát! (Részletes meghatározást kérünk!)

Legyen az f az $[a, b]$ intervallumon legfeljebb véges számú pont kivételével mindenütt értelmezett korlátos függvény.
Képezzük az $[a, b]$ intervallum beosztásainak minden határon túl finomodó B_n beosztássorozatait és a hozzájuk, valamint az f függvényhez tartozó integrálközelítő összegek I_n sorozatait.
Ha valamennyi I_n sorozat a beosztássorozat és a reprezentánsrendszerek választásától függetlenül konvergens és határértéke ugyanaz a szám, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény az $[a, b]$ intervallumon **integrálható és az** $[a, b]$ intervallumon vett határozott integrálja ezen határértékkel egyenlõ:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \quad (x_i - x_{i-1}) \right) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

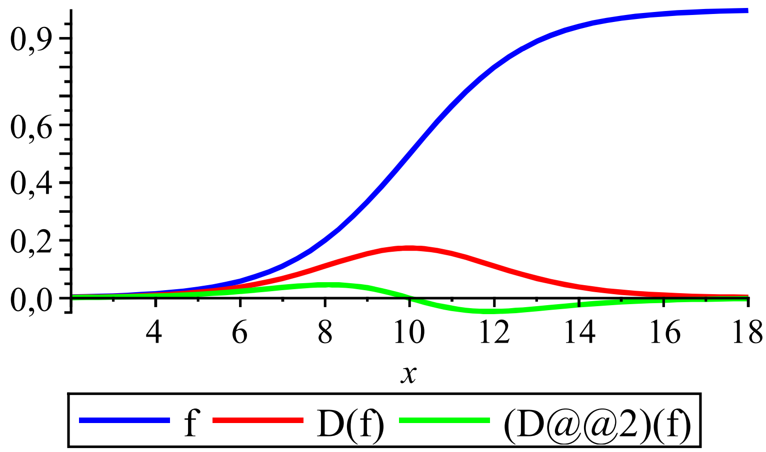
1.2. Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

Ha $f(x)$ az $[a, b]$ intervallumon integrálható (létezik határozott integrálja) és ezen az intervallumon primitív függvénye is van (legyen ezek egyike F), akkor

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

1.3. Legyen az f függvény legalább kétszer deriválható az [a,b] intervallumon. Adjon meg elégséges feltételeket arra vonatkozólag, hogy a függvény ezen az intervallumon alulról konvex legyen!

Ha az f függvény második deriváltja, $\frac{d^2}{dx^2} \; f(x)$ az [a,b] intervallumon pozitív, akkor a függvény görbéje az [a,b]-n alulról konvex .
Ha az f függvény differenciálhányadosa z [a,b] intervallumon növekvő, akkor a függvény görbéje az [a, b]-n alulról konvex .



Jellemző hibás válasz: Többen a konvexitás szemléletes definícióját írták válaszképpen, tehát azt, hogy : "Ha az [a,b] intervallumon differenciálható f függvény **bármely** [a,b] -hez tartozó pontban húzott érintője a görbe alatt helyezkedik el, akkor azt mondjuk, hogy a függvény görbéje az [a,b] intervallumban alulról konvex .

4+2+2= **8 pont**

2. Mondja ki és igazolja az integrálszámítás középérték tételét!

Tétel

Ha az egyváltozós valós f függvény az [a,b] számközön folytonos, akkor van olyan ξ az [a,b] számközben, hogy:

$$\boldsymbol{f(\xi)\cdot(b-a)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Bizonyítás:

Előzőleg beláttuk, hogy ha az egyváltozós valós f függvénynek az [a,b] számközön alsó korlátja az **m**, felső korlátja a **M** szám, és az f függvény az [a,b] intervallumon integrálható, akkor

$$m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le M\cdot(b-a)$$

Az előző egyenlőtlenségsort

$$m\le\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{(b-a)}\le M$$

alakban is felírhatjuk.
Az [a,b] zárt számközön folytonos f függvény minden m és M közötti függvényértéket felvesz, így az

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}$$

értéket is, tehát van olyan ξ érték az $[a, b]$ intervallumban, amelyre

$$\frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a} = f(\xi),$$

s ezzel a tételt igazoltuk.

3+3= **6 pont**

3.1.Melyik függvény, melyik intervallumra vonatkozó integrálközelítő összege a következő összeg:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \xi_i \cos(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}) \quad (x_0 = 0;\, x_n = \pi;\, x_{i-1} < x_i,\ \xi_i \in [x_{i-1}, x_i],\ i=1, 2, \ldots, n)$$

Az $f(x) = (\sin(x))^2 \cdot \cos(x)$ függvénynek a $[0, \pi]$ intervallumra eső integrálközelítő összege.

3.2. Tekintsük a $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max(x_i - x_{i-1})\to 0}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sin^2 \xi_i \cos(\xi_i)\right)(x_i - x_{i-1})$ *határértéket! (a fenti előírásokkal)*

Ha létezik a határérték, akkor mivel egyenlő? Válaszát indokolja!

Mivel mind a $\sin(x)$, mind a $\cos(x)$ függvény mindenütt folytonos, és folytonos függvények szorzata is ilyen, az $f(x)$ függvény folytonos. A folytonosság pedig az integrálhatóság elégséges feltétele.

Ezért a fenti határérték létezik és $\int_0^{\pi} (\sin(x))^2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$-szel egyenlő.

2+3 = **5 pont**

4. Tekintsük a $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{\ln^2(x)}{x^2 - x}\right)$ *határértéket!*

4.1. Mutassa meg, hogy a szereplő függvények teljesítik a L'Hospital-szabály alkalmazásának feltételeit!

$\lim\limits_{x\to 1} (\ln(x))^2 = \lim\limits_{x\to 1} (x^2 - x) = 0$. tehát a kérdéses határérték $\left[\frac{0}{0}\right]$ alakú.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (\ln(x))^2 = \frac{2\cdot\ln(x)}{x}$, minden pozitív x értékre, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - x) = 2\cdot x - 1 \neq 0$ az $x = 1$ hely egy környezetében.

4.2. Számítsa ki a határértéket!

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{\ln^2(x)}{x^2 - x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{2\cdot\ln(x)}{x}}{2\cdot x - 1} = 0$$

Visszatérő hibás válaszok: Többen az $\ln^2(x)$ függvényt hibásan az $\ln(x^2)$ függvénnyel azonosították. Az utóbbira

$$\ln(x^2) = 2\cdot\ln(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}+,$$

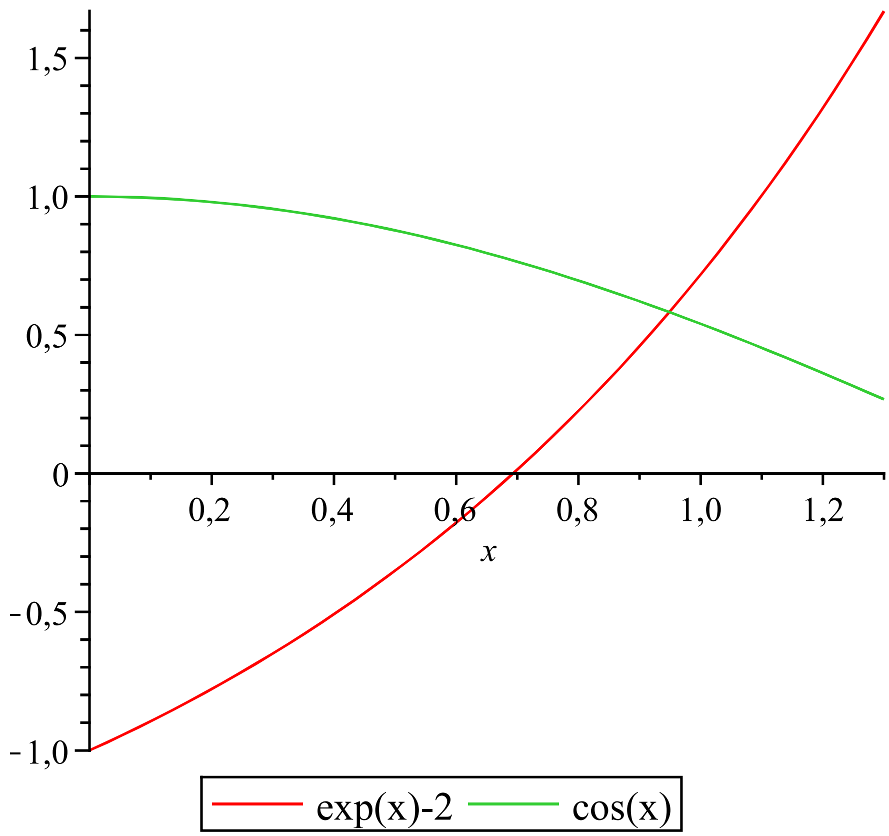
s ez nyílván nem azonos az $\ln^2(x)$ függvénnyel!
Mások arról felejtkeztek meg, hogy az $\ln^2(x)$ összetett függvény, eszerint kell deriválni!

3+2= **5 pont**

5. Határozza meg az $e^x - 2 = \cos(x)$ egyenlet pozitív gyökét 3 tizedesjegy pontossággal a Newton-féle érintő módszer alkalmazásával!
Előzőleg mutassa meg, hogy az $f(x) = e^x - 2 - \cos(x)$ függvényre alkalmas intervallumon teljesülnek a módszer alkalmazásának feltételei!

3+3 = **6 pont**

> $plot([\exp(x) - 2, \cos(x)], x = 0..1.3, legend = ["exp(x)−2", "cos(x)"]);$



Látható, hogy a gyök a [0, 1] intervallumban van.

> $f := x \to \exp(x) - 2 - \cos(x);$

$$f := x \to e^x - 2 - \cos(x) \tag{1}$$

> $Diff(f(x), x) = diff(f(x), x);$

$$\frac{d}{dx}\left(e^x - 2 - \cos(x)\right) = e^x + \sin(x) \tag{2}$$

Mivel az e^x függvény minden valós x-re pozitív és a $\sin(x)$ nem-negatív [0, 1] intervallumon, az f függvény deriváltja a [0, 1] intervallumban pozitív. Hasonlóan a második derivált is pozitív a szóbanforgó intervallumban:

> $Diff(f(x), x\$2) = diff(f(x), x\$2);$

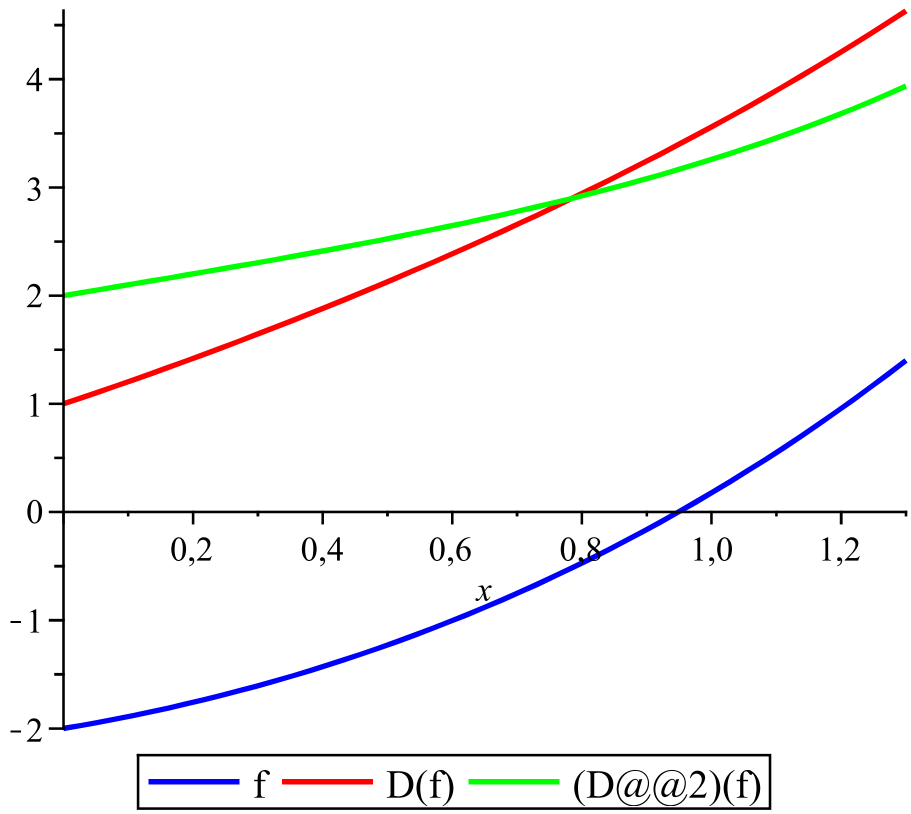
$$\frac{d^2}{dx^2}\left(e^x - 2 - \cos(x)\right) = e^x + \cos(x) \quad \textbf{(3)}$$

Mivel a 0 és az 1 helyen vett függvényértékek szorzata negatív, valóban a $[0, 1]$ intervallumban van gyök, s mivel a derivált pozitív ebben az intervallumban, következésképp az f függvény szigorúan monoton növekvő ugyanitt. Ebből adódik, hogy pontosan egy gyök van ebben a számközben. Nagyobb x-ekre pedig nyílván nincs gyök.

```
> evalf(f(0)*f(1));
```

$$-.355959044 \quad \textbf{(4)}$$

```
> plot([f(x), D(f)(x), (D@@2)(f)(x)], x=0..1.3, color=[blue, red, green]
  , thickness=2, legend=["f", "D(f)", "(D@@2)(f)"]);
```



Láthatóan az első és a második derivált is az egész intervallumon pozitív, tehát a feltételek teljesülnek. Kezdőértékként a zérushelynél nagyobb értéket kell választanunk, mert ekkor egyezik meg a második derivált előjele a függvényérték előjelével. Legyen a kezdőérték 1.

```
> newton(f, 1, 4);
```

n	x_n	$f(x_n)$	$D(f)(x_n)$	$x_n - \frac{f(x_n)}{D(f)(x_n)}$
1	1.	0.1779795221	3.559752813	0.9500022806
2	0.9500022806	0.0040343216	3.399132387	0.9488154126
3	0.9488154126	0.0000022311	3.395374354	0.9488147555
4	0.9488147555	$1.\ 10^{-10}$	3.395372274	0.9488147555

(5)

A gyök három tizedesjegy pontossággal: 0.949.

6. Számítsa ki a következő integálokat

6.1. $\int \frac{x^5+\sqrt{x}+2}{x\sqrt{x}}\,dx$; *6.2.* $\int \sin\left(4\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)dx$; *6.3.* $\int (\sin(x))^3\cdot\cos(x)\,dx$; *6.4.* $\int x\cdot e^x\,dx$.

$4\cdot 3=$ **12 pont**

6.1. $\int \frac{x^5+\sqrt{x}+2}{x^{3/2}}\,dx=\int\left(x^{7/2}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^{3/2}}\right)dx=\frac{2}{9}\;x^{9/2}+\ln|x|-\frac{4}{\sqrt{x}}+C$

6.2. $\int \sin\left(4\;\;x+\frac{1}{3}\;\;\pi\right)dx=-\frac{1}{4}\cdot\cos\left(4\cdot x+\frac{\pi}{3}\right)+C;$

6.3. $\int (\sin(x))^3\cdot\cos(x)\,dx=\frac{(\sin(x))^4}{4}+C$

6.4. $\int x\cdot e^x\,dx=\left|f'(x)=e^x; f(x)=e^x; g(x)=x; g'(x)=1\right|=x\cdot e^x-\int e^x\cdot 1\,dx=x\cdot e^x-e^x+C.$

∑: 42 pont