Differenciálegyenletek II.

Másodrendű differenciálegyenletek

A másodrendű differenciálegyenletek általános alakja.

F(x,y,y',y'') = 0.

Ha y'' kifejezhető, akkor az explicit alak jelölésére az

y'' = f(x,y,y')

szimbólumot használjuk.
Az általános másodrendű differenciálegyenlet megoldására véges számú integráláson alapuló módszer nem ismeretes. Speciális esetekben azonban léteznek eljárások ezen egyenletek megoldására.

Hiányos másodrendű egyenletek

Valamely másodrendű differenciálegyenletet akkor nevezünk hiányosnak, ha az x, y, y' közül legalább az egyik hiányzik belőle.
1. **F(x,y'')=0**, azaz y és y' hiányzik. Ha a differenciálegyenlet

y'' = f(x)

alakra hozható, akkor az általános megoldás kétszeri integrálással adódik.

```
> restart:
> f:='f':y:='y':
> de:=diff(y(x),x$2)=f(x);
```

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = f(x)$$

```
> dsolve(de,y(x));
```

$$y(x) = \int\int f(x)\,dx\,dx + \_C1\,x + \_C2$$

Az általános megoldás kétparaméteres görbesereg.

PÉLDA. Oldjuk meg az $y'' = x \ln(x)$ egyenletet!
Megoldás. Az egyenlet *kétszeri integrálással* oldható meg:

```
> de:=diff(y(x),x$2)=x*ln(x);
```

$$de := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = x\ln(x)$$

```
> dsolve(de,y(x));
```

$$y(x) = \frac{1}{6}x^3\ln(x) - \frac{5\,x^3}{36} + \_C1\,x + \_C2$$

```
> partmegold:=dsolve({de,y(5)=3,D(y)(3)=5},y(x));
```

$$partmegold := y(x) = \frac{1}{6}x^3\ln(x) - \frac{5\,x^3}{36} + \left(\frac{29}{4} - \frac{9}{2}\ln(3)\right)x - \frac{143}{9} - \frac{125}{6}\ln(5) + \frac{45}{2}\ln(3)$$

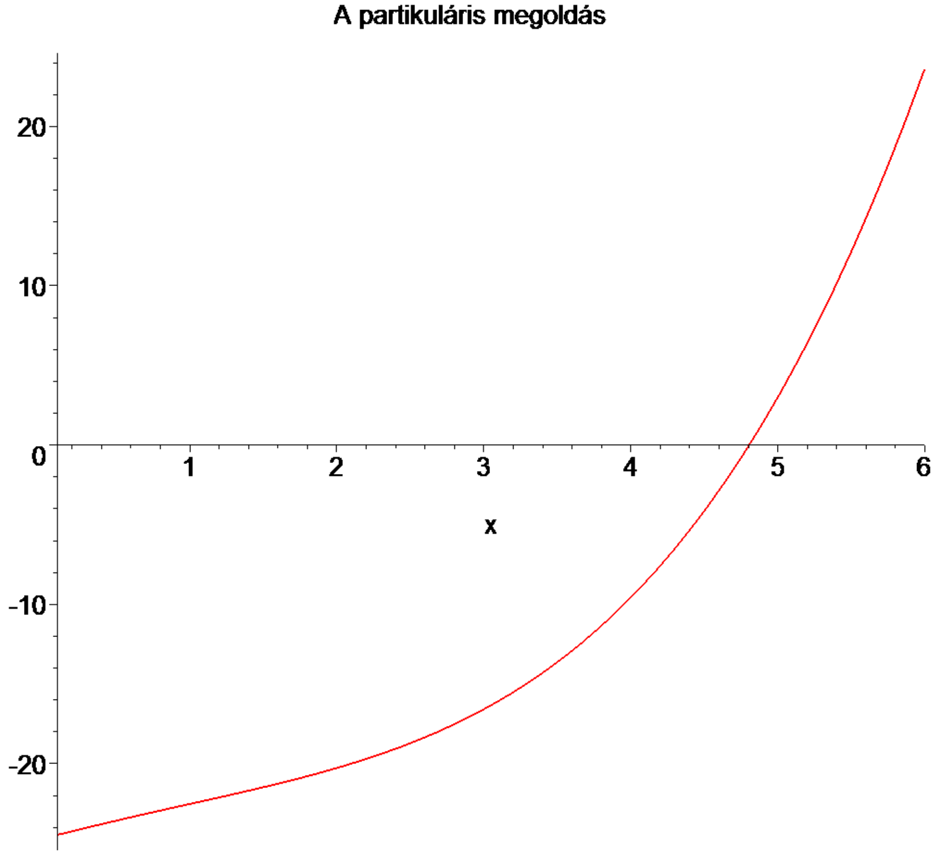
```
> f:=x->rhs(partmegold);
```

$$f := x \to \mathrm{rhs}(partmegold)$$

```
> f(x);
```

$$\frac{1}{6}x^3\ln(x) - \frac{5x^3}{36} + \left(\frac{29}{4} - \frac{9}{2}\ln(3)\right)x - \frac{143}{9} - \frac{125}{6}\ln(5) + \frac{45}{2}\ln(3)$$

```
> plot(f(x),x=0.1..6,title=`A partikuláris
  megoldás`,thickness=2);
```




```
>
```

2. Az **F(x,y',y'') = 0** alakú másodrendű differenciálegyenletből az y hiányzik Ekkor az **y' = p(x)** helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor **y'' = p'(x)**. Ezeket az egyenletbe helyettesítve az

F(x,p,p')=0

elsőrendű egyenlethez jutunk. Tehát az **F(x,y',y'') = 0** hiányos másodrendű differenciálegyenlet megoldását az

F(x,p,p') = 0 és az y' = p(x)

elsőrendű egyenletek megoldására vezethetjük vissza.

PÉLDA. Oldjuk meg az

$$xy''-y' = x^2$$

differenciálegyenletet! Adjuk meg az y(1) = 2, y'(1) = 3 kezdeti feltételeket kielégítő megoldást is!

MEGOLDÁS. A differenciálegyenletből y hiányzik. Tehát a helyettesítés:

y' = p(x) ; y'' = p1(x) ,

s így az

$$xp'(x)\text{-}p(x) = x^2$$

elsőrendű, lineáris, inhomogén egyenlethez jutunk Ezt az állandó variálásával oldjuk meg. Adódik, hogy

$$y' = p(x) = x^2 + c_1\,x.$$

Ebből integrálással:

$$\mathbf{y = \int x^2 + c_1\,x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{c_1\,x^2}{2} + c_2}$$

$y'(1) = 3$, így $3 = 1^2 + c_1\,1$,ebből $c_1 = 2$,

$y(1) = 2$, így $2 = \frac{1^3}{3} + \frac{2\,1^2}{2} + c_2$, innen $c_2 = \frac{2}{3}$.

A keresett partikuláris megoldás:

$$\boldsymbol{y = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{2}{3}}$$

Oldjuk meg a feladatot **Maple**-vel is!

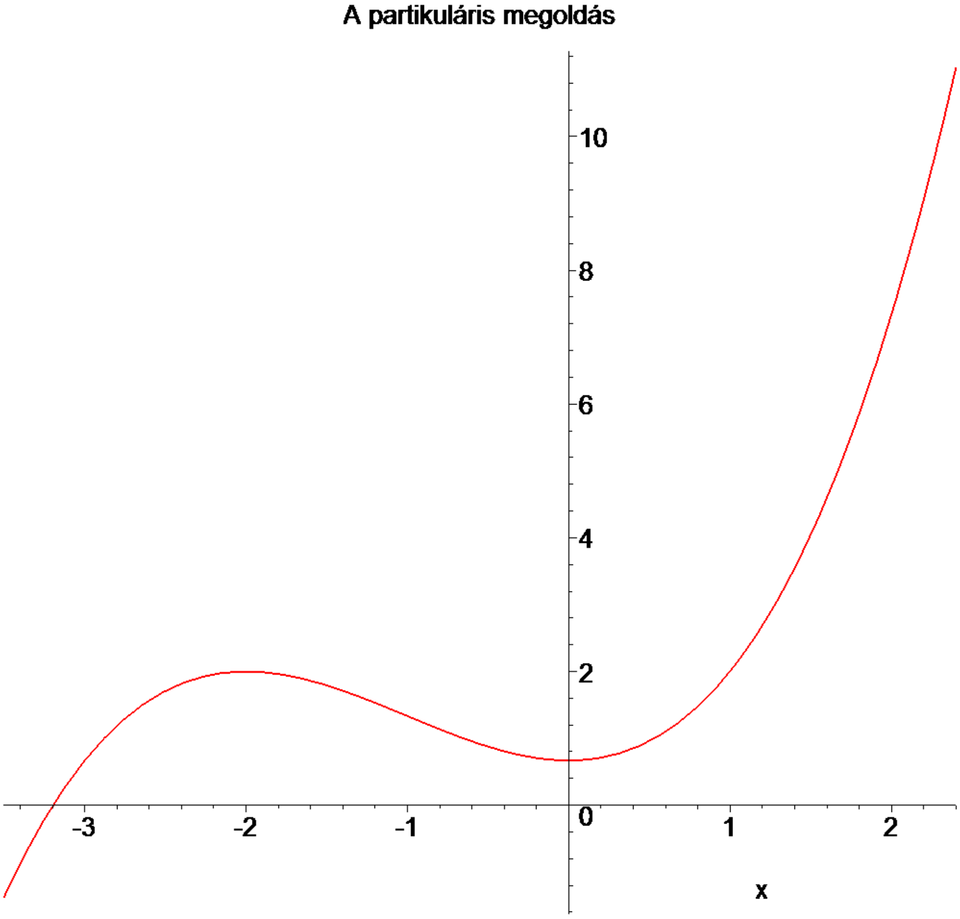
```
> y:='y':
> de:=diff(y(x),x$2)*x-diff(y(x),x)=x^2;
```

$$de := \left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right)x - \left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) = x^2$$

```
> partmegold:=dsolve({de,y(1)=2,D(y)(1)=3},y(x));
```

$$partmegold := y(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}$$

```
> assign(partmegold):
> plot(y(x),x=-3.5..2.4,title=`A partikuláris
  megoldás`,thickness=2);
```



>

3. **F(y,y',y'') = 0**, vagy explicit alakban **y'' = f(y,y')**. Ebből az egyenletből az x hiányzik. Ekkor az **y' = p(y)** helyettesítést alkalmazzuk. Határozzuk meg az y''-t is!
Az y az x (vagy más) változó függvénye, tehát az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk:

y'' = dy'/dx= dp(y)/dy*dy/dx = dp(y)/dy*y' = dp(y)/dy*p(y),

azaz rövidebben:

$$y'' = \frac{dp}{dy}\,p$$

Így az új egyenlet

dp(y)/dy*p(y) = f(y,p(y)),

s ez már elsőrendű egyenlet.

PÉLDA. Oldjuk meg a következő differenciálegyenletet:

yy'' + (y')^2 = 0,

vagy más szimbólumokkal felírva

$$y\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}y\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}y\right)^2 = 0.$$

MEGOLDÁS: A differenciálegyenletből az x hiányzik, tehát a fenti helyettesítésekkel:

$$\frac{y\,\mathrm{dp}(y)\,\mathrm{p}(y)}{dy} = -\mathrm{p}(y)^2,$$

1. Ha p(y) = 0, akkor y' = 0, azaz y = c, s ez láthatóan megoldás.

2. Ha $\mathrm{p}(y) \neq 0$, akkor osszuk el az egyenlet mindkét oldalát p(y)-nal, s írjunk a szokásnak megfelelően rövidebben p-t, s válasszuk szét a változókat!

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y},$$

integrálva:

$$\int \frac{1}{p}\, dp = \int \frac{1}{y}\, dy,$$

ebből

$$\ln\left(\left|\frac{p}{c_1}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{1}{y}\right|\right),$$

azaz:

$$p = \frac{c_1}{y},$$

a helyettesítés alapján:

$$y' = \frac{c_1}{y}. \quad (\ c_1 \neq 0\ )$$

Ez szétválasztható változójú differenciálegyenlet (Mindig így járunk el, tehát nem integrálhatunk közvetlenül!):

$$y\, dy = c_1\, dx,$$

s ebből:

$$\int y\, dy = \int c_1\, dx,$$

$$\frac{y^2}{2} = c_1\, x + c_2,$$

vagy másképpen írva:

$$\boldsymbol{y^2 = 2\, c_1 \left(x + \frac{c_2}{c_1}\right)},$$

ez pedig *parabolasereg*, melynek tengelye az x-tengely.

Oldjuk meg az egyenletet **Maple**-vel is:

```
> y:='y':
> de:=y(x)*diff(y(x),x$2)+diff(y(x),x)^2=0;
```

$$de := \mathrm{y}(x)\left(\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{y}(x)\right) + \left(\frac{d}{dx}\mathrm{y}(x)\right)^2 = 0$$

```
> altmegold:=dsolve(de,y(x));
```

$$altmegold := \mathrm{y}(x) = 0,\ \mathrm{y}(x) = \sqrt{2\, x\, \_C1 + 2\, \_C2},\ \mathrm{y}(x) = -\sqrt{2\, x\, \_C1 + 2\, \_C2}$$

A Maple explicit alakban adta meg a megoldásokat!

Adjuk meg a következő peremfeltételeket kielégítő megoldást:

$$\mathrm{y}(1) = 1;\ \ \mathrm{y}(4) = 9.$$

```
> y:='y':
> partmegold:=dsolve({de,y(1)=1,y(4)=9},y(x));
```

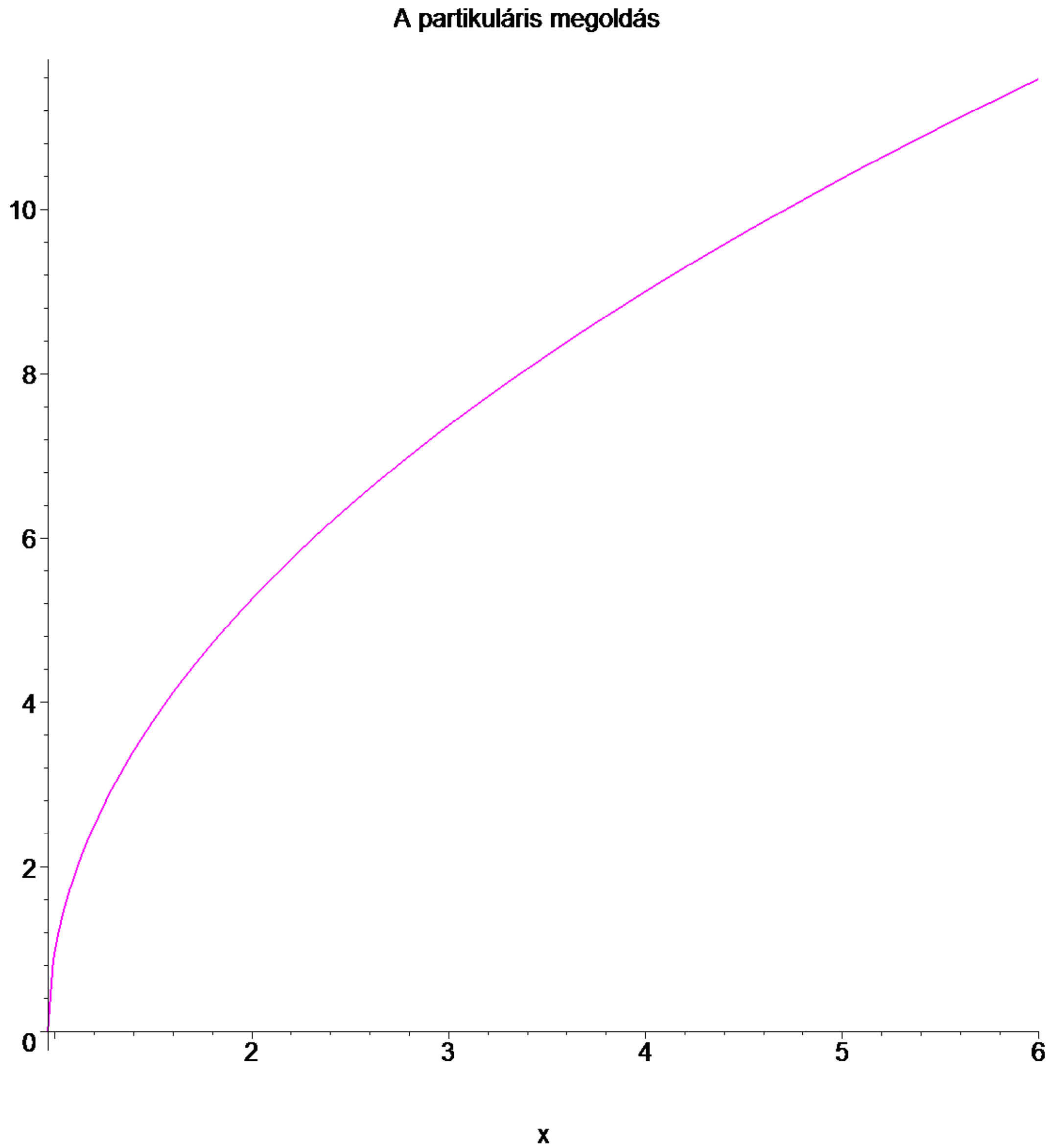
$$partmegold := \mathrm{y}(x) = \frac{\sqrt{240\, x - 231}}{3}$$

```
> assign(partmegold):
```

```
> zh:=solve(y(x),x);
```

$$zh := \frac{77}{80}$$

```
> plot(y(x),x=zh..6,thickness=2,color=magenta,title=`A
  partikuláris megoldás`);
>
```




```
>
>
```