Fejezetek a lineáris algebrából
PTE-PMMK, Műszaki Informatika Bsc

Dr. Kersner Róbert

2007

Tartalomjegyzék

Előszó

A lineáris algebra a kalkulus (differenciál- és integrálszámítás) mellett a matematikai alapképzés másik fontos eleme. Elengedhetetlen a lineáris programozás, rendszeranalízis, statisztika, numerikus módszerek, kombinatorika, matematikai fizika megértéséhez, hogy csak az alkalmazásokat tekintsük.

Leegyszerűsítve a lineáris algebra = mátrixelmélet + lineáris egyenletrendszerek elmélete. Mint látni fogjuk, minden mátrixnak megfelel egy lineáris transzformáció és viszont. Így a lineáris transzformációk elméleteként is felfoghatjuk.

A lineáris algebra legfontosabb objektuma a *mátrix*, ami nem más, mint egy téglalap alakú táblázat, aminek m sora és n oszlopa van. A táblázat elemeit a_{ij}-vel jelöljük — ez az i-edik sor j-edik eleme.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{nn}$$

a standard jelölés.

Esetünkben az a_{ij}-k mindig valós számok ($a_{ij} \in \mathbb{R}$). A komplex eset ($a_{ij} \in \in \mathbb{C}$) nem különbözik lényegesen ettől. Általában azonban az a_{ij}-k „bármik" lehetnek.

Legfontosabb speciális esetek: négyzetes mátrix ($m = n$), oszlopmátrix, más néven oszlopvektor ($n = 1$).

1. fejezet

Determináns

Csak négyzetes mátrixnak van determinánsa, így feltesszük, hogy $n=m$. Két definíciót adunk, az első induktív, a második geometriai.

1. definíció.

(i) $n=1$, $A=(a_{11})$. Ebben a triviális esetben

$$\det(A) \equiv |A| = a_{11}$$

(a $\equiv$ jel pusztán jelölést jelent).

(ii) $n=2$ esetén az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det(A) \equiv |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

(iii) $n=3$ esetén az

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

mátrix determinánsa:

$$\det(A) \equiv |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

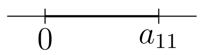
Ez az első sor szerinti kifejtés, de *bármely* sor vagy oszlop szerint kifejthető. Tudni kell az a_{ij}-hez tartozó aldetermináns fogalmát és a sakktábla szabályt (a_{11}-hez $+$ jelet rendelünk és folytatjuk a sakktábla szerint az előjelet).

(iv) $n = 4$ esetén valamelyik sor vagy oszlop szerint kifejtjük, a 3×3-as determinánst pedig már ismerjük.

Tovább haladva tetszőleges n-re meghatározhatjuk $\det A$-t. ♣

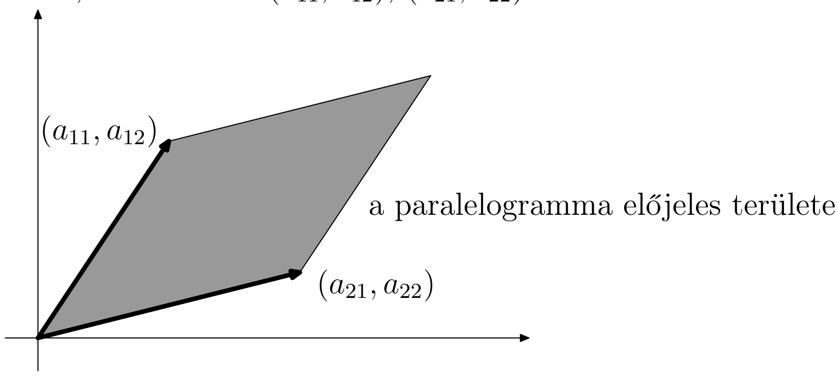
2. definíció. A determináns egy sorát (vagy oszlopát) azonosíthatjuk egy (n-dimenziós) vektorral (például az első sorral $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$ vektort, melynek a_{1i} az i-edik koordinátája). Az n db sornak megfelelő n db vektor által kifeszített n-dimenziós paralellepipedon előjeles térfogata az A mátrix determinánsa. ♣

Példák:

- $n=1$, $A=(a_{11})$, $\det A=a_{11}$ 

a $(0,a_{11})$ szakasz előjeles hossza,

- $n=2$, a két vektor (a_{11},a_{12}), (a_{21},a_{22})



Megjegyzés: a determináns mindig egy szám (esetünkben valós): egy mátrixnak feleltet meg egy számot. Íly módon a determináns egy függvény a mátrixok halmazán.

A determináns tulajdonságai

(i) Ha a mátrix egy sora tiszta 0, akkor 0 a determinánsa (ha az oszlopa, akkor is).

(ii) A determináns k-val szorzódik, ha egy sorát (oszlopát) k-val szorozzuk. Ezek következnek az 1. definícióból.

(iii) Ha felcserélünk két sort (oszlopot), akkor a determináns előjelet vált.

(iv) Ha a mátrix egy sora (oszlopa) egy másik sor (oszlop) valahányszorosa, akkor a determináns 0.
Ezek következnek a 2. definícióból. Mellesleg (iii) következménye (iv) (miért?).
A következő tulajdonság az egyik legfontosabb, leggyakrabban használt, ezt be is bizonyítjuk:

(v) a determináns nem változik, ha egyik sorához (oszlopához) hozzáadjuk egy másik sor (oszlop) valahányszorosát.
Először megmutatjuk, hogy ha két mátrix csak egy sorában (oszlopában) különbözik, akkor összegük determinánsa egyenlő a determinánsok

összegével: különbözzön az utolsó oszlop. Azt kell belátni, hogy:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Ha a baloldali determinánst kifejtjük az utolsó oszlop szerint, az állítás nyilvánvalóvá válik. Folytatva a bizonyítást, adjuk hozzá például az utolsó oszlophoz az első oszlop k-szorosát:

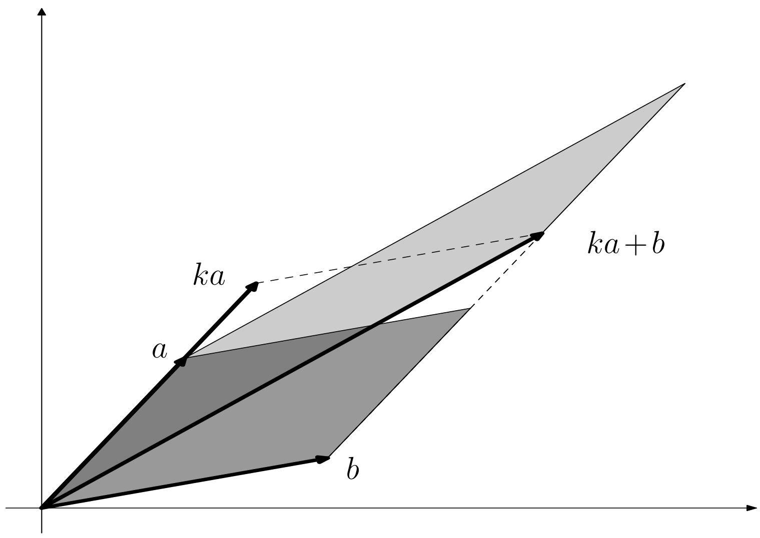
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n}+k\cdot a_{11} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn}+k\cdot a_{n1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{11} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A.$$

Mivel a k-val szorzott determináns 0 (van két egyforma oszlopa).
Ez utóbbi tulajdonság egyben módszert is ad a determináns kiszámítására (lásd később a Gauss eliminációt). Segítségével „kinullázhatunk" bizonyos elemeket és „csökkenthetjük" a kiszámolandó determináns rendjét. Például:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 5-14=-9.$$

Itt először az első sor -2-szeresét hozzáadtuk a második sorhoz, majd az első sor 3-szorosát a harmadikhoz és a kapott determinánst kifejtettük az első oszlopa szerint.
Érdekes (v) geometriai következménye is (lásd a 2. definíciót): legyen $a=(a_{11},a_{12}), b=(a_{21},a_{22})$ két vektor a síkon. Nyújtsuk meg a-t k-szorosára: $ka=(ka_{11},ka_{12})$. Ekkor az a és b által kifeszített paralelogramma területe egyenlő az a és a $ka+b$ vektorok által kifeszített paralelogramma területével ($\det A$ abszolút értékével).



(vi) Ha $A = (a_{ij})$, $A^* = A^T = (a_{ji})$, akkor $\det A^* = \det A$. Bizonyítsuk be $n = 1,2,3$ esetekben. (A^* az A transzponáltja.)

2. fejezet

Mátrixok

A mátrixok egy fontos alkalmazási területe a lineáris egyenletrendszerek elmélete. Ez (is) motiválja a következő definíciókat.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{ij}).$$

3. definíció. Két mátrix egyenlő, ha megfelelő elemeik egyenlők:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}.$$

♣

4. definíció. $k \cdot A = (ka_{ij})$: minden elemet megszorzunk k-val. ♣

5. definíció. Két mátrix összege, különbsége:

$$A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij}).$$

♣

6. definíció. Két mátrix szorzata csak akkor értelmezhető, ha A oszlopainak száma megegyezik B sorainak számával, legyen ez n, ekkor:

$$A \cdot B = (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}).$$

Ez nem más, mint A i-edik sorának és B j-edik oszlopának *skaláris szorzata.* ♣

7. definíció.

1. Nulla mátrix: $a_{ij}=0$ minden i,j-re. Jelölés: O.
2. Egységmátrix $(n=m)$: $a_{ii}=1, a_{ij}=0$, ha $i\neq j$. Jelölés: E vagy I.

♣

Példák:

1. $n=m=2$

$$2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -6\\ -3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

2.

$$\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot 2+3\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2)+3\cdot 1\\ 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 5\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

3.

$$A_1=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ -1\end{pmatrix}, A_1B_1=\begin{pmatrix}4\cdot 2+5\cdot 3+6\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\end{pmatrix}=17$$

4.

$$B_1A_1=\begin{pmatrix}2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 5 & 3\cdot 6\\ (-1)\cdot 4 & (-1)\cdot 5 & (-1)\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 12\\ 12 & 15 & 18\\ -4 & -5 & -6\end{pmatrix}.$$

5.

$$\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3\\ 1\cdot 1+5\cdot 2+6\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 29\end{pmatrix}.$$

6.

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -1 & 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+4\cdot 2+(-3)\cdot 3\\ 2\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 3\\ (-1)\cdot 1+3\cdot 2+(-5)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 5\\ -10\end{pmatrix}.$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : Ax = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Ebből látható, hogy az

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

lineáris egyenletrendszer ugyanaz, mint az $Ax = b$ egyenlet, ahol $b = = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Számítsuk ki AB és BA mátrixokat:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 23 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Tehát $AB \neq BA$, vagyis a mátrix szorzás nem kommutatív. A $[A, B] \equiv \equiv AB - BA$ mátrixot A és B kommutátorának nevezzük. Ha $[A, B] = 0$, akkor az A, B mátrixok kommutálnak.

9. Hatványozás: $A^2 = A \cdot A, \quad A^3 = A \cdot A^2$ stb.

Például: $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$! Az egyenlőség csak akkor áll, ha A, B kommutál.

10. Nullosztók lehetősége. Könnyű találni két olyan mátrixot (A, B), amelyek nem nullák, de szorzatuk az. Például:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ezeket nullosztóknak nevezik. (A valós számok körében nincsenek nullosztók: ha $a \neq 0, b \neq 0$, akkor $ab \neq 0$. Ugyanez az előbbivel ekvivalens megfogalmazásban: $ab = 0 \Rightarrow (a = 0$ vagy $b = 0)$.)

3. fejezet

Az inverz mátrix

Láttuk, hogy a mátrixokat lehet összeadni, kivonni, szorozni, számmal szorozni — hasonlóan a számokhoz. Bizonyos értelemben osztani is lehet mátrixszal: Az inverzzel szorozni, hasonlóan a számokhoz: 2-vel osztani ugyanaz, mint 1/2-del (a 2 inverzével, $s\cdot(1/2)=1$) szorozni.

8. definíció. Egy A mátrix inverze az az a^{-1}-gyel jelölt mátrix, amelyre

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E=I.$$

(Csak négyzetes mátrixokra értelmezett!) ♣

Itt csak az a célunk, hogy megadjunk egy algoritmust A^{-1} kiszámítására. Feltesszük, hogy $\det A\neq 0$, azaz A *nem szinguláris*, más szóval reguláris.

Jelöljük A_{ij}-vel az $A=(a_{ij})$ mátrix a_{ij} eleméhez tartozó, megfelelő előjeles (sakktábla szabály) aldeterminánsát. A_{ij}-t úgy kapjuk meg, hogy A-ból kihúzzuk az i-edik sort és j-edik oszlopot, a maradék $(n-1)\times(n-1)$-es mátrixnak vesszük a determinánsát és ellátjuk a megfelelő előjellel, amelyet a sakktábla szabály szerint kapunk (s_{11}-hez $+$, a többi ebből következik.)

9. definíció. Az $\left(A_{ij}\right)$ mátrix transzponáltja az A mátrix adjungált mátrixa és $\operatorname{adj} A$-val jelölik. ♣

A következő példánál felhasználásra kerül az alábbi

Tétel. *Amennyiben A reguláris ($\det A\neq 0$), létezik inverze, és*

$$A^{-1}=\frac{\operatorname{adj} A}{\det A}\qquad \textit{avagy}\qquad (\det A)\cdot E=A\cdot\operatorname{adj} A.$$

□

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Mivel egyenlő A^{-1}? Először számoljuk ki A determinánsát: $\det A = -7$, tehát van inverze a mátrixnak. Számoljuk ki az $\big(A_{ij}\big)$ mátrixot:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \qquad A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$
$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3,$$
$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Tehát

$$\operatorname{adj} A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

így

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} = -\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & -5 \\ -2 & -5 & 4 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ellenőrizze, hogy $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ (vagy ami ugyanaz, $(\det A) \cdot E = A \cdot \operatorname{adj} A$).

Ha ismerjük A^{-1}-et, akkor az $Ax = b$ egyenletrendszer (A – $(n \times n)$-es mátrix, x ismeretlen és b ismert oszlopvektorok) egyértelműen megoldható:

$$x = A^{-1}b.$$

Ez igaz bármely nagy rendszer esetén is. Ami a fő probléma, az éppen A_{-1} kiszámítás nagy n esetén. Ezért van szükség más egyenletrendszer megoldási módokra is, amik kikerülik ezt a buktatót. Egy ilyet mutatunk be a következő fejezetben.

4. fejezet

Lineáris egyenletrendszerek

Egy lineáris egyenletrendszer általános alakja a következő:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{$*$}$$

Ugyanez mátrix alakban: $Ax=b$, ahol

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix},$$

ahol x a keresendő ismeretlen, b ismert. Fontos kérdés, hogy mikor van a $(*)$ egyenletrendszernek megoldása. A pontos választ a Cronecker–Capelli illetve a Fredholm féle tételek adják. Tipikusan három eset van:

1. $n=k$. A – négyzetes mátrix, az ismeretlenek száma egyenlő az egyenletek számával. ez a legfontosabb eset. Láttuk, hogy ha $\det A \neq 0$ (vagyis létezik A^{-1}), akkor $(*)$-nak létezik egyértelműen meghatározott megoldása: $x=A^{-1}b$.

2. $n>k$. Több az ismeretlen, mint az egyenlet. Ekkor a rendszernek általában *több megoldása* van (akár végtelen sok is).

   Példa:

   $$n=2, k=1: \quad x_1+5x_2=3$$

a ($*$) rendszer. Ekkor $x_1 = 3 - 5x_2$. x_2-t *tetszőlegesen* választhatom (legyen $x_2 = a$), $x_1 = 3 - 5a$, tehát

$$x = \begin{pmatrix} 3-5a \\ a \end{pmatrix}$$

a megoldás. Ha azonban megköveteljük, hogy a megoldás normája (az x vektor hossza) 1 legyen, akkor helyre áll az unicitás (egyértelműség). $\|x\|^2 = (3-5a)^2 + a^2 = 1$ feltételből az eddig tetszőleges a-ra egyértelműen meghatározott értéket kapunk.

3. $n < k$. Több az egyenlet, mint az ismeretlen — a feladat „túlhatározott”. Itt általában nincs megoldás.

   Példa:

$$n = 1, k = 2: \quad \begin{aligned} 2x_1 &= 5 \\ 3x_1 &= 6 \end{aligned}.$$

   Látható, hogy egyrészt $x_1 = \frac{5}{2}$, másrészt $x_1 = 2$, tehát nincs megoldás.

A továbbiakban ismertetünk egy módszert (Gauss–Jordan módszer, avagy Gauss elimináció), amely valójában *minden* rendszerre alkalmazható. Segítségével eldönthető, hogy van-e egyértelmű megoldás, nincs megoldás, vagy több is van.

Mi itt feltesszük, hogy $n = k$ és $\det A \neq 0$, tehát van egyértelmű megoldás. Szintén feltesszük, hogy ha osztunk egy számmal, akkor ez nem nulla. Ha mégis nulla, akkor a módszer egyszerűen korrigálható.

Tehát: tekintsük a $*$ rendszert.

Szorozzuk meg az első egyenletet $-a_{21}/a_{11}$-gyel és adjuk hozzá a másodikhoz. Ezután szorozzuk meg az első egyenletet $-a_{31}/a_{11}$-gyel és adjuk hozzá a harmadikhoz, és így tovább ..., szorozzuk meg az első egyenletet $-a_{n1}/a_{11}$-gyel és adjuk hozzá az n-edik egyenlethez. A kapott egyenletrendszerben x_1 csak az első egyenletben maradt. Ezen új rendszerben vegyük a második egyenletet: x_2 együtthatójából kiindulva a megfelelő számmal megszorozzuk ezt a sort úgy, hogy ha hozzáadjuk a harmadik sorhoz, akkor abból eltűnik x_2. És így tovább, az n-edik sorig. Így x_1 és x_2 csak az első és második egyenletekben marad. A fenti kiküszöbölést addig folytatjuk, amíg az utolsó sorhoz nem érünk, ami $a'_{nm} x_n = b'_n$ alakú lesz. Ebből x_n meghatározható ($x_n = b'_n / a'_{nm}$). Ennek ismeretében az $n-1$-edik egyenletből (, ami csak x_n-et és x_{n-1}-et tartalmazza) meghatározzuk x_{n-1}-et. Így haladunk „felfelé” egészen az első sorig, melyből végül meghatározzuk x_1-et.

Elég világos, hogy a fenti módszer ekvivalens az úgynevezett *kibővített mátrix*on történő manipulálással. Ez látszik az alábbi példából is:

$n = k = 4$. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 8 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 &= 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 12 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Az A *együtthatómátrix* mellé leírjuk b-t, ez lesz a *kibővített mátrix*(K):

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 3 & 12 \end{pmatrix}.$$

A Gauss módszer szerint a főátló alatti elemeket

$$\begin{pmatrix} & & & \\ 2 & & & \\ -1 & 2 & & \\ 1 & -1 & -1 & \end{pmatrix}$$

„ki kell nullázni” és az első oszloppal kell kezdeni. Bármely sor valahányszorosa hozzáadható bármely másik sorhoz (oszlopokról szó sem lehet, ne feledjük, hogy egyenletekről beszélünk!), a sorok oszthatók bármely nem nulla számmal, stb.

Először hozzáadjuk az első sor (-2)-szeresét a második sorhoz, majd a (-1)-szeresét a harmadikhoz és a negyedikhez:

$$K \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = K_1$$

Most a második sor segítségével „kinullázzuk” a második oszlop két elemét: a második sort hozzáadjuk a harmadikhoz, a második (-2)-szeresét a negyedikhez:

$$K_1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & -2 & 8 & 30 \end{pmatrix} = K_2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & -13 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -21 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 16 \end{pmatrix} = K_3$$

Végül megszoroztuk K_2 mátrix harmadik sorát 2/3-dal és hozzáadtuk a negyedikhez. (Eloszthattuk volna 3-mal a harmadik sort, 2-vel a negyediket, stb.) K_3 utolsó sora azt jelenti, hogy $4x_4 = 16$, tehát $x_4 = 4$. A harmadik sor: $3x_3 - 6x_4 = -21$, tehát $x_3 = 1$. A második sor: $-x_2 + x_3 - 3x_4 = -13$, tehát $x_2 = 2$. Végül az első sor: $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 8$, tehát $x_1 = 3$.

Visszaemlékezve a determináns tulajdonságaira észrevehető, hogy mi a kibővített mátrixon, ezen belül az A együtthatómátrixon olyan operációkat hajtottunk végre, melyek nem változtatják meg a determináns értékét(, ha egyszerűsítettük volna valamelyik sort az elimináció során, ez már nem igaz!!!), így $\det A = \det K_3 = 1 \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 4 = -12$. A Gauss módszer tehát alkalmas a determináns kiszámítására is.

Térjünk vissza a $(*)$ általános egyenletrendszerhez: $Ax = b$.

10. definíció. Tekintsük az A mátrix összes lehetséges módon kiválasztható négyzetes részmátrixát, akár A-t magát is. Kiválasztjuk a legnagyobbat, amelynek nem nulla a determinánsa. Ennek mérete (r) az A mátrix rangja:

$$\operatorname{rang} A := r.$$

♣

Jelöljük B-vel az A mátrix kibővített mátrixát.

Tétel (Kronecker–Capelli)**.**

1. *Ha* $\operatorname{rang} B > \operatorname{rang} A$, *akkor a* $(*)$ *rendszernek* nincs *megoldása,*

2. *Ha* $\operatorname{rang} B = \operatorname{rang} A$, *akkor a* $(*)$ *rendszernek* van *megoldása.*

□

Egy Fredholm-típusú tétel:

Tétel. *A* $(*)$ *rendszernek akkor és csak akkor van megoldása, ha b merőleges z-re ((b,z)=0 – skaláris szorzat), ahol z a homogén* $A^*z = 0$ *egyenletrendszer (bármely) megoldása (*A^* *– A transzponáltja). Maga a megoldás* $x = x_0 + u$ *alakú, ahol* x_0 *a* $(*)$ *rendszer egy partikuláris megoldása, u pedig az* $Au = 0$ *homogén rendszeré.* □

5. fejezet

Lineáris transzformációk

A transzformáció egy megfeleltetés (függvény, operátor, stb.) két halmaz között: $Ax = y,\ x \in U, y \in V$, x-input, y-output.

Gyakran a halmazok lineáris vektorterek, melyek rendelkeznek bázissal. Itt mi a síkot ($\mathbb{R}^2$), kétdimenziós euklideszi tér a standard $e_1 = (1{,}0), e_2 = (0{,}1)$ bázissal, $x = (x_1, x_2)$ vesszük illusztrációként ugyanis itt lehet „látni” a legfontosabb transzformációkat.

11. definíció. *A lineáris*, ha

1. $A(\lambda x) = \lambda Ax$,
2. $A(x+y) = Ax + Ay$,

ahol λ egy számtest eleme (esetünkben valós, esetleg komplex). ♣

Világos, hogy a sík esetében minden lineáris transzformáció a következő alakú $Ax = y$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= y_2 \end{aligned}$$

tehát minden lineáris transzformációnak egyértelműen megfelel egy A mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Ha A – mátrix, akkor tulajdonságaiból következik, hogy $A(\lambda x) = \lambda Ax$ és $A(x+y) = Ax + Ay$, vagyis A lineáris transzformációként fogható fel.

Azaz: lineáris transzformációk elmélete = mátrixelmélet.

Fontos megjegyzés: Az eltolás (shift) $Ax = x + x_0$ NEM lineáris transzformáció: $Ay = y + x_0, A(x+y) = x+y+x_0 \neq x+y+2x_0$, ha $x_0 \neq 0$.

A lineáris + shift transzformációt *affin*nak is nevezik. Például a számítógépes grafika a háromdimenziós tér ($\mathbb{R}^3$) affin transzformációival dolgozik, melyek adekvát elmélete a projektív geometria.

Lássunk négy alaptranszformációt:

1. *példa.* (nyújtás illetve zsugorítás). $Ax = y, y_1 = k_1 x,\ y_2 = k_2 x$, tehát

$$\left.\begin{aligned} k_1x_1 + 0\cdot x_2 &= y_1 \\ 0\cdot x_1 + k_2x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} \quad \text{a megfelelő mátrix.}$$

2. *példa.* (tükrözés, itt az x-tengelyre).

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x_1 + \quad 0\cdot x_2 &= y_1 \\ 0\cdot x_1 + (-1)\cdot x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{a megfelelő mátrix.}$$

3. *példa.* (α szöggel való elforgatás). Világos, hogy

$$\begin{aligned} y_1 &= r(\cos(\alpha+\beta)) = r(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \cos\alpha\, x_1 - \sin\alpha\, x_2 \\ y_2 &= r(\sin(\alpha+\beta)) = r(\cos\alpha\sin\beta + \cos\beta\sin\alpha) = \sin\alpha\, x_1 + \cos\alpha\, x_2 \end{aligned}$$

Tehát

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

a „forgató” mátrix. Például $\alpha = 90^\circ$ esetén $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ minden vektort átvisz pozitív forgatással a rá merőlegesbe.

4. *példa.* (projekció az $y = x$ egyenesre).

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= y_1 \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Tetszőleges halmazokat transzformálhatunk segítségükkel: ebben minden pont képét kell megkeresni, gyakorlatban elég a jellemző pontokét.

1. *feladat.* Az S négyzet csúcspontja $(2{,}1), (3{,}1), (3{,}2), (2{,}2)$. Mibe viszi át S-t az a lineáris transzformáció ($S' = AS =?$), amelynek mátrix reprezentációja $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Transzformációk szorzata: $x \overset{A}{\mapsto} y \overset{B}{\mapsto} z: \ y = Ax, \ z = By$, tehát $z = BAx$ megfelel a mátrixok szorzatának.

Egy determinánsra vonatkozó

Tétel. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. □

Bizonyítás. 2 dinemziós esetben: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det(AB) = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} + a_{11}b_{11}a_{22}b_{22} +$$
$$+ a_{12}b_{21}a_{21}b_{12} + a_{12}b_{21}a_{22}b_{22} - a_{21}b_{11}a_{11}b_{12} - a_{21}b_{11}a_{12}b_{22} - a_{22}b_{21}a_{11}b_{12} -$$
$$- a_{22}b_{21}a_{12}b_{22} = b_{11}b_{22}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) - b_{21}b_{12}(a_{11}a22 - a_{21}a_{12}) =$$
$$= \det A \cdot \det B.$$

■

Tétel. *Legyen S egy halmaz, területe T. $S' = AS$, S' területe T'. Ekkor $T' = |\det A| \cdot T$.* □

2. *feladat.* Mibe viszi át az előző feladat lineáris transzformációja az egység sugarú kört? Mekkora a kapott halmaz (ellipszis) területe?

6. fejezet

Sajátérték, sajátvektor

A – lineáris transzformáció: $A : U \longrightarrow V,\;\; U, V$ vektorterek. Legyen λ egy szám (valós vagy komplex) és legyen $x \in U,\;\; x \neq 0$. Ha $Ax = \lambda x$ —, vagy E egységmátrixszal, ami ugyanaz — a sajátérték probléma egyenlete:

$$(A - \lambda E)\, x = 0, \tag{S.P.}$$

akkor λ-t sajátértéknek (karakterisztikus értéknek), x-et a λ-hoz tartozó sajátvektornak (karakterisztikus vektornak) hívják.

5. *példa.* $A = E:\;\; Ex = x$, tehát λ=1 és minden $x \neq 0$ sajátvektor.

6. *példa.* $A = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ – nyújtás. $A - \lambda E = \begin{pmatrix} k_1 - \lambda & 0 \\ 0 & k_2 - \lambda \end{pmatrix}$, tehát $\lambda_1 = $ $= k_1,\;\; \lambda_2 = k_2$. A sajátvektor egyenlete $\lambda_1 = k_1$ esetén (lsd.: (S.P.)):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 - k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

vagyis $(k_2 - k_1)x_2 = 0$, tehát vagy $k_1 = k_2$, vagy $x_2 = 0$. Ha $k_1 = k_2$, akkor a sajátvektor (a, b) tetszőleges a, b-re. Ha $x_2 = 0$, akkor a sajátvektor (a,0), ahol a tetszőleges.

7. *példa.* Projekció az $x_1 = x_2$ egyenesre: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Az S.P. egyenlet:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez egy hommogén egyenlet, melynek csak akkor van nemnulla megoldása, ha

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \text{– karakterisztikus egyenlet.} \tag{K.E.}$$

Esetünkben $\det\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=0=\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2-\frac{1}{4}=(1-\lambda)\lambda$. Tehát $\lambda_1=0,\ \lambda_2=1$.

Ha $\lambda=0$, akkor (S.P.) alapján

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

azaz

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0\\ \dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2=0\end{array}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad x_1+x_2=0.$$

Legyen $x_2=a\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, akkor $x_1=-a$, a sajátvektor $v_1=(-a,a)=a(-1,1)$.

Ha $\lambda=1$, akkor akkor (S.P.) alapján

$$\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

azaz $x_1=x_2$, tehát $v_2=(a,a)=a(1,1), a\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

8. *példa.* 90°-kal való elforgatás. Előre tudható, hogy nincs valós sajátvektor (miért?). $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $A-\lambda E=\begin{pmatrix}-\lambda & -1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}$, a karakterisztikus egyenlet λ^2+ $+1=0$. Ebből $\lambda_1=i,\lambda_2=-i$ ($i^2=-1$).

3. *feladat.* Mutassa meg, hoy a sajátvektorok $v_1=(1+i,1), v_2=(1-i,1)$.

9. *példa.* Keresendők az A mátrix sajátértékei és sajátvektorai:

$$A=\begin{pmatrix}8 & 9 & 9\\ 3 & 2 & 3\\ -9 & -9 & -10\end{pmatrix}.$$

Karakterisztikus egyenlet:

$$\det(A-\lambda E)=\det\begin{pmatrix}8-\lambda & 9 & 9\\ 3 & 2-\lambda & 3\\ -9 & -9 & -10-\lambda\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)^2=0$$

1. $\lambda=2$. A sajátvektorok ($v=(x_1,x_2,x_3)$) egyenlete:

$$\begin{pmatrix}6 & 9 & 9\\ 3 & 0 & 3\\ -9 & -9 & -12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix},$$

azaz

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+3x_3&=0\\ x_1+\quad\;\; +\;\, x_3&=0\\ -3x_1-3x_2-4x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

Az első és a második egyenlet összege a harmadik (-1)-szerese, tehát a harmadik egyenlet elhagyható:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1+3x_2+3x_3&=0\\ x_1+\quad\;\; +\;\, x_3&=0 \end{aligned}\right\}$$

Két egyenlet, három ismeretlen, egyik ismeretlen szabadon választható: legyen $x_1 = a$. Ekkor $x_3 = -a$ és $x_2 = \frac{1}{3}a$.

Tehát a sajátvektor $v_1 = a(1, \frac{1}{3}, -1)$ (vagy $b(3{,}1, -3)$).

2. $\lambda = -1$.

$$\begin{pmatrix} 9 & 9 & 9\\ 3 & 3 & 3\\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},$$

azaz $x_1+x_2+x_3=0$. Egy egyenlet három ismeretlen, tehát kettő szabadon választható. Legyen $x_2=a, x_3=b$, ekkor $x_1=-a-b$. A sajátvektor: $v=(-a-b, a, b)$. Legyen $a=0$: $v_2=b(-1{,}0{,}1)$. Legyen $b=0$: $v_3=a(-1{,}1{,}0)$. Látható, hogy v_2 és v_3 lineárisan függetlenek (nem párhuzamosak).

1. tétel. $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdots \lambda_n$. □

Bizonyítás. Definíció szerint: $\det(A-\lambda E) = (\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda)$. Legyen ($\lambda = 0$. ■

2. tétel. $\operatorname{Trace} A \equiv a_{11}+a_{22}+\dots a_{nn} = \lambda_1+\lambda_2+\cdots\lambda_n$. □

Bizonyítás. Következik a Vièta-tételből („gyökök” és együtthatók közti összefüggés). ■

4. *feladat.* Bizonyítsuk be a tételt $n = 2$ esetén!

12. definíció. $\operatorname{Spec} A = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. ($A$ spektruma a sajátértékek halmaza.) ♣

Legyen A^T az A mátrix transzponáltja (korábban A^*-gal is jelöltük).

3. tétel. $\operatorname{Spec} A^T = \operatorname{Spec} A$. □

Bizonyítás. $\det(A^T - \lambda E) = \det(a - \lambda E)^T$ és tudjuk, hogy $\det B = \det B^T$. ■

4. tétel (Cayley-Hamilton). *Legyen* $\det(a - \lambda E) = \pm\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$. *Ekkor* $\pm A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E = 0$*, vagyis minden mátrix gyöke a saját karakterisztikus egyenletének.* □

1. következmény. $\pm A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - \cdots - a_1 A - a_0 E$*, vagyis egy mátrix bármely hatványa előállítható alacsonyabb hatványainak összegeként.*

Bizonyítás. Az általános eset belátása bonyolult. A „triviális" bizonyítás: legyen $\lambda = A$. Ekkor $\det(A - \lambda E) = \det(A - A) = \det(N) = 0$ nyilván hibás (miért?). ■

5. *feladat.* Mutassa meg a a 4. tételt $n = 2$ esetén!

6. *feladat.* Legyen $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Mutassa meg, hogy ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek és $\frac{1}{\lambda}$ sajátértéke A^{-1}-nek.

Megfogalmazunk (és példán is bizonyítunk) egy fontos tételt a „hogyan lehet egyszerűbb alakra hozni egy mátrixot" témakörből. Ne feledjük, hogy egy mátrixnak mindig megfelel egy lineáris transzformáció.

5. tétel. *Tegyük fel, hogy A-nak ($x \times n$-es mátrix) van pontosan n lineárisan független sajátvektora:* $x_1, x_2, \ldots, x_n$: $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in})$. *A sajátvektort oszlopvektorként felfogva képezzük az un. sajátvektor mátrixot*

$$S = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Legyen

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mivel a vektorok függetlenek, $\det S \neq 0$*, tehát létezik S^{-1} inverzmátrix. Ekkor* $A = S\Lambda S^{-1}$*, vagyis* $\Lambda = S^{-1}AS$*. Ez utóbbi formula az A mátrix diagonalizációját jelenti.* □

Bizonyítás.

$$AS = [x_1 \cdots x_n] = [\lambda x_1 \cdots \lambda x_n] = [x_1 \cdots x_n] \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_{nn} \end{pmatrix} = S\Lambda$$ ■

2. következmény. $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$.

Bizonyítás. Indukcióval nyilvánvaló. Például $A^2 = S\Lambda S^{-1} \cdot S\Lambda S^{-1} = S\Lambda^2 S^{-1}$ ■

13. definíció. Két mátrix A és B hasonló ($A \sim B$), ha létezik egy invertálható mátrix P, hogy $A = PBP^{-1}$. ♣

6. tétel. *Ha $A \sim B$, akkor $A^{-1} \sim B^{-1}$ és* $\det A = \det B$. □

Bizonyítás. Nyilvánvaló (miért?). ■

Megemlítünk egy tételt (bizonyítása nem nehéz):

7. tétel. *Ha A-nak van n különböző sajátértéke, akkor A diagonizálható.* □

Jó lenne, ha a következő példát mindenki önállóan végigszámolná!

10. *példa.* Adjuk meg az A mátrix diagonális reprezentációját:

$$\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 12 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Megjegyezzük, hogy a mátrix szimmetrikus: $A = A^T$.

Ki kell számolni a sajátértékeket, sajátvektorokat, felírni az S mátrixot, és kiszámolni S^{-1}-et.

1. A karakterisztikus egyenlet:

$$\det(A-\lambda E) = (9-\lambda)\left[(12-\lambda)(9-\lambda)-9\right]-9(9-\lambda) = \\ = (9-\lambda)\left[\lambda^2-21\lambda+90\right] = 0.$$

   Ebből $\lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = 9,\ \lambda_3 = 15$.

2. A $\lambda_1 = 6$-hoz tartozó sajátvektor:

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

   azaz

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 3x_2 + &= 0 \\ -3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= 0 \\ -3x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{matrix} x_1 = x_2 \\ \\ x_2 = x_3 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} x_3 = a = x_2 = x_1 \\ \\ v_1 = a(1,1,1) \end{matrix}$$

7. *feladat.* Mutassa meg, hogy a $\lambda=9$-hez tartozó sajátvektor: $v_2=a(1,0,-1)$ és $\lambda=15$-höz $v_3=a(1,-2,1)$. Tehát az S mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *feladat.* Mutassa meg, hogy

$$\operatorname{adj} S = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ és } \det S = -6.$$

9. *feladat.* Adja meg az $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix diagonális reprezentációját.

7. fejezet

Szimmetrikus mátrixok

14. definíció. $A = (a_{ij})$ szimmetrikus mátrix, ha $a_{ij} = a_{ji}$, vagyis $A = A^T$. ♣

Ez az egyik legfontosabb mátrixosztály, gyakran előjön az alkalmazásokban. A fő kérdés itt a következő: mi a speciális a sajátértékekben és sajátvektorokban ($Ax = \lambda x$), ha A szimmetrikus? Három alaptételt mondunk ki.

8. tétel. *Legyen A szimmetrikus, valós mátrix. Akkor valamennyi sajátértéke valós.* □

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $Ax = \lambda x$. Tudjuk, hogy (lsd.: a 90°-os elforgatást) λ lehet komplex is: $\lambda = a+ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. λ komplex konjugáltja: $\overline{\lambda} = a - ib$. Hasonlóan x koordinátái is lehetnek komplexek. Tudjuk, hogy egy szorzat konjugáltja egyenlő a konjugáltak szorzatával: $\overline{\lambda x} = \overline{\lambda}\overline{x}$. Mivel A valós, $A\overline{x} = \overline{\lambda}\overline{x}$. Ez utóbbit $\overline{x}^T A = \overline{x}^T \overline{\lambda}$ alakba is írhatjuk. Szorozzuk meg skalárisan az első ($Ax = \lambda x$) egyenletet $\overline{x}$-tal, a másodikat $\overline{x}^T A = \overline{x}^T \overline{\lambda}$ x-szel: $\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \lambda x$ és $\overline{x}^T Ax = \overline{x}^T \overline{\lambda} x$, tehát $\lambda(\overline{x}^T, x) = \overline{\lambda}(\overline{x}^T, x)$, vagyis $(\lambda - \overline{\lambda})(\overline{x}^T, x) = (\lambda - \overline{\lambda})\,|x|^2 = 0$. Tehát $\lambda = \overline{\lambda}$, vagyis λ valós. ■

A sajátvektorok, mivel a valós $(A - \lambda E)x = 0$ egyenlet megoldásai, maguk is valósak. Fontos, hogy merőlegesek is egymásra:

9. tétel. *Ha egy valós, szimmetrikus mátrix sajátvektorai különböző sajátértékekhez tartoznak, akkor merőlegesek (ortogonálisak) egymásra.* □

Bizonyítás. Legyen $Ax = \lambda_1 x$, $Ay = \lambda_2 y$ és $A = A^T$. Szorozzuk meg skalárisan az első egyenlet y-nal, a másodikat x-szel: $(\lambda_1 x)^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y = x^T Ay = x^T \lambda_2 y$, tehát $x^T y = 0$. Ez pontosan azt jelenti, hogy x és y merőlegesek egymásra. ■

Megjegyzés. Ha A-nak van például két egyforma sajátértéke (lsd.:a 9. példát), akkor mindig van a sajátértékhez tartozó két független sajátvektor. A Gram–Schmidt módszerrel egy ortogonális párost készítünk belőlük (, ha A nem szimmetrikus, akkor ez nem igaz!).

Tehát minden szimmetrikus (valós) mátrixnak van n egymásra kölcsönösen merőleges sajátvektora. Képezzük az S mátrixot, melynek oszlopai az adott vektorok. Tudjuk: $A = S\Lambda S^{-1}$. Ebből $A^T = (S^{-1})^T \Lambda S^T = A$, tehát $S\Lambda S^{-1} = (S^{-1})^T \Lambda S^T$. Ha S oszlopai merőlegesek egymásra, akkor $SS^T = E$, így $S^T = S^{-1}$, amivel bebizonyítottuk a következőt:

10. tétel. *Minden szimmetrikus, valós mátrix előállítható az*

$$A = Q\Lambda Q^T = Q\Lambda Q^{-1}$$

alakban, ahol $\Lambda = \lambda_i \delta_{ij}$ *és* Q *oszlopai ortonormális sajátvektorok.* □

Megjegyzés $\delta_{ij} = 1$, ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$, ha $i \neq j$ (Kronecker szimbólum), ortonormális= ortogonális + egységnyi hosszú.

11. *példa.* Térjünk vissza az előző fejezet 10. példájához. Világos, hogy a sajátvektorok — az S mátrix oszlopai — merőlegesek egymásra, de hosszuk nem egységnyi. Normáljuk őket:

$$w_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

$$w_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$w_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Tehát

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

10. *feladat.* Mutassa meg, hogy $QQ^T = E$ (vagyis, hogy $Q^T = Q^{-1}$).

8. fejezet

Komplex számok

Legyen $x, y \in \mathbb{R}$. A $z = x + iy$ alakú mennyiségeket komplex számoknak hívják, ahol $i^2 = -1$, azaz $i = \sqrt{-1}$. x a z komplex szám valós része, y pedig a képzetes (imaginárius) része.

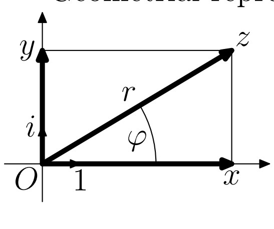
Könnyű belátni, hogy ha $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ komplex számok, akkor az összegük és különbségük, szorzatuk és hányadosuk is az. Például a szorzatra: $w = z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(y_1 x_2 + x_1 y_2)$.

$\overline{z} = x - iy$ — a z komplex szám konjugáltja. (Valós szám komplex konjugáltja önmaga!)

11. *feladat.* Mutassuk meg, hogy $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{z_1 / z_2} = \overline{z_1} / \overline{z_2}$.

Ebből következik, hogy ha egy komplex szám gyöke egy valós együtthatójú polinomnak, akkor $\overline{z}$ szintén gyök: a komplex gyökök „párosan” fordulnak elő a valós együtthatójú polinomoknál. Lásd a másodfokú polinom esetén a megoldóképletet.

Geometriai reprezentáció:



$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ – a z vektor hossza
$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$
$x = r \cos \varphi$
$y = r \sin \varphi$

Trigonometrikus alak: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$.

Nehezebb értelmezni a komplex kitevőjű hatványt: $a^{x+iy} = a^x \cdot a^{iy}$, tehát elegendő az a^{iy}-t értelmezni, amihez elég e^{iy}-t értelmezni. Úgy szeretnénk értelmezni a hatványozást, hogy a standard deriválási szabály igaz legyen: $(e^{it})' = \frac{\mathrm{d}e^{it}}{\mathrm{d}t} = ie^{it}$, itt t valós. Ha $z(t) = e^{it}$, akkor $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = iz$ vagy $\mathrm{d}z = iz\mathrm{d}t$. Tehát $\mathrm{d}z$ és z merőlegesek egymásra (Feladat: az i-vel való szorzás 90°-kal való elforgatást jelent). Ha dt-vel növeljük t-t, a z vektor dφ-vel elfordul. Mivel $\mathrm{tg}\,\mathrm{d}\varphi \simeq \mathrm{d}\varphi$ kis dφ-re, $\mathrm{d}\varphi \simeq \frac{|\mathrm{d}z|}{|z|} = \frac{|iz\mathrm{d}t|}{|z|} = \mathrm{d}t$, tehát $t \simeq \varphi$. $z(0) = e^0 = 1$ – a vízszintes egységvektor. Ezért $z = e^{i\varphi}$ egy olyan komplex szám, melyet az (1,0) egységvektorból, annak φ szögű elforgatásával kapunk. Mivel $e^{i\varphi} = z = x + iy$ az algebrai alakból, ezért:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad \text{– Euler formulát kapjuk.}$$

A $z = re^{i\varphi}$ alakot a z szám hatványkitevős, avagy exponenciális alakjának hívjuk.

Megjegyzés. Legyen $\varphi = \pi$ az Euler formulában: $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, tehát $e^{i\pi} + 1 = 0$. Ez az egyenlőség tartalmazza a matematika öt legfontosabb számát: $0, 1, \pi, e, i$.