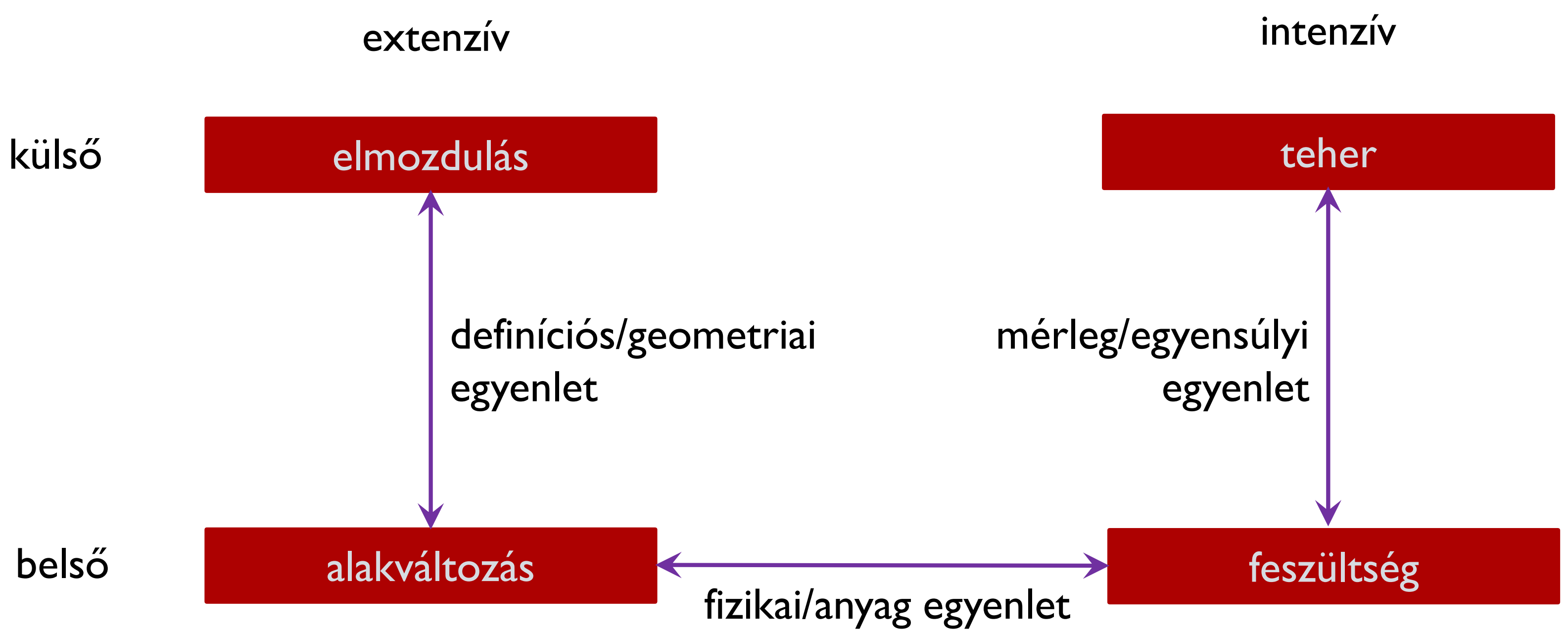
Optimális szerkezettervezés

Dr. Pomezanski Vanda

3. hét: Mechanikai feladatok közelítő megoldásainak hibái, Hiba minimálása

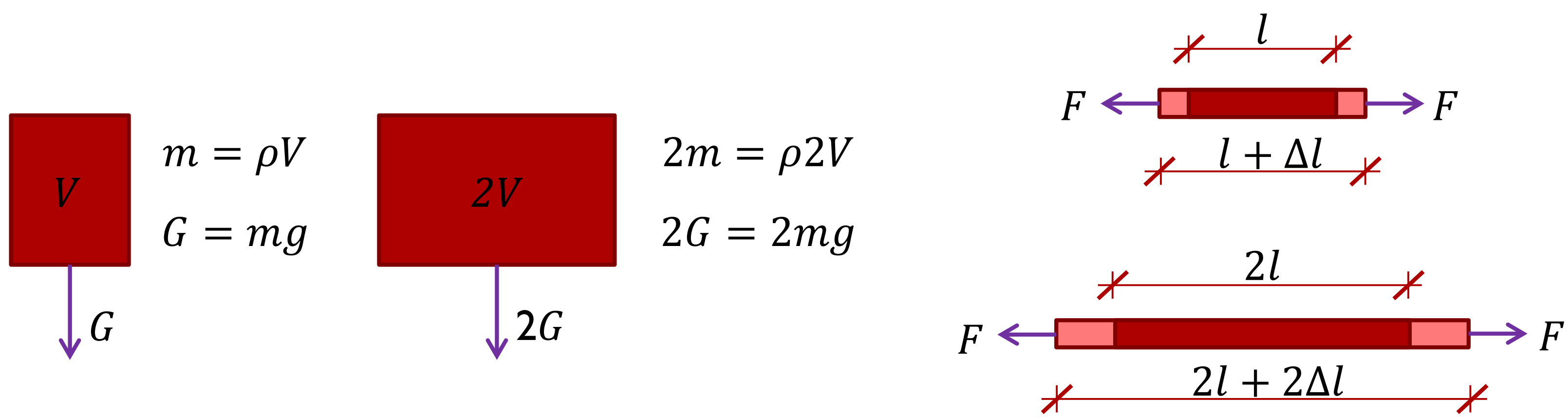
Alapfogalmak 1.



- A jelenségeket matematikailag folytonos függvények megadásával tudjuk jellemezni.

Alapfogalmak 1.

- Extenzív változók: a függvények értéke a vizsgált tartomány kiterjedéséhez kötődik
  - a változók a térfogattal arányosak,
  - a vonatkozási tartományok összegzése esetén a változók értéke összeadódik, pl. l, V, G, m
- Intenzív változók: értéke független a kiterjedéstől
  - értéke a résztartományok összegzése esetén nem változik, pl. F, ρ, g.



Alapfogalmak 1.

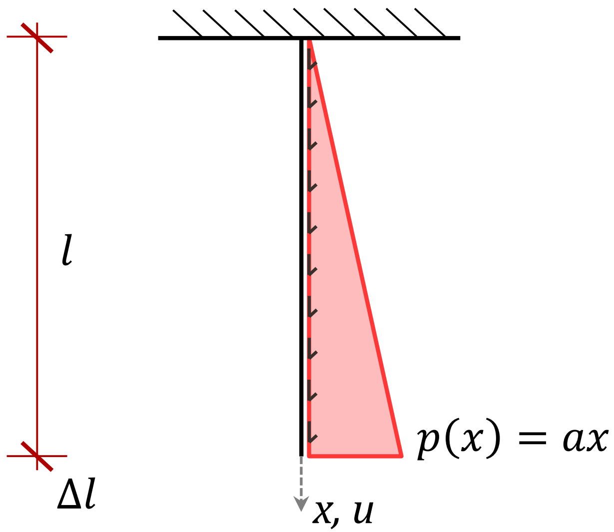
- Külső változók: a testnek környezethez viszonyított jellemzőit írják le
  - általában a testtől függetlenül felvett vonatkozási rendszerben
  - pl. elmozdulás, terhelés, hőmérséklet, stb.
- Belső változók: a testen belül felvett két vagy több pont vagy keresztmetszet egymáshoz viszonyított jellemzőit adják meg
  - pl. nyúlás, szögtorzulás, feszültség, stb.

- A változók egy része ismert (előírt), más része ismeretlen.

Alapfogalmak 2.

- A matematikai feltételi egyenletek legfontosabb típusai:
  - differenciálegyenletek: a vizsgált Ω tartomány minden pontjában, a pont elemi környezetére adnak kielégítendő egyenletet,
  - integrálegyenletek: az egész tartományra kiterjedő összegző kijelentések, melyekben rendszerint megjelennek a ponthoz rendelt elemi hatások tartományra kisugárzó hatását megadó ún. hatásfüggvények,
  - variációs feltételek: matematikai vagy fizikai megfontolásokon alapuló, a tartományra és/vagy a peremére felírt integrálkifejezések variációjának eltűnését előíró kijelentések.
  - Perem- és kezdetiértékek-feltételek: a feladatban szereplő függvényeknek a tartomány peremén vagy annak részén, ill. az állapotváltozás egy adott pillanatában érvényes értékeit rögzítik.

1. Példa: peremérték feladat



$$-EA\frac{d^2u(x)}{dx^2} = p(x)$$

$u(0) = 0$ és $\varepsilon(l) = 0$

- $EA = konst.$
- egyensúlyi egyenlet:
$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{p(x)}{A}$$
- geometriai egyenlet:
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$
- anyag egyenlet:
$$\sigma = E\varepsilon$$

1. Példa: ortogonalitási feltétel

- A virtuális elmozdulások tétele a variációs megfogalmazás ortogonalitási feltétellel felírt változatához vezet:
- $A \int_0^l \sigma \delta \varepsilon dx - \int_0^l p \delta v dx = 0$
- δv virtuális eltolódás, minden olyan folytonos függvény lehet, mely kielégíti a $\delta v(0) = 0$ feltételt.
- $\sigma = E\varepsilon$ és $\varepsilon = \frac{du}{dx}$
- $EA \int_0^l \frac{du}{dx} \frac{d\delta v}{dx} dx - \int_0^l p \delta v dx = 0$

1. Példa: Stacionaritási feltétel

- A potenciális energia állandóértékűségének alkalmazása:
- $\frac{EA}{2}\int_0^l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^l pudx = áll.$

Alapfogalmak 3.

- Operátor: egy olyan előírás, mely egy halmaz elemeihez egyértelműen hozzárendeli ugyanannak vagy egy másik halmaznak az elemeit.
  - a $\Phi: X \rightarrow Y$ operátor tehát egy olyan előírás, amelyik egy $D_\Phi \subseteq X$ részhalmaz minden x eleméhez hozzárendeli az Y halmaz egy és csakis egy elemét.
  - a D_Φ részhalmazt a Φ *operátor* (*értelmezési*) *tartomány*ának nevezzük.
  - (Az operátor definiálásához mindig hozzátartozik D_Φ megadása is. Azonos előírás különböző tartományokon különböző operátorokat jelent.)
- Az L operátor lineáris operátor, ha X és Y lineáris tér, és minden L $x, y \in D$ valamint α, β valós szám esetén $L(\alpha x + \beta y) = \alpha Lx + \beta Ly$.

Alapfogalmak 3.

- Az X halmazt lineáris térnek nevezzük, ha értelmezhető egy összeadásnak és egy skalárral való szorzásnak nevezhető művelet, vagyis minden $x, y \in X$ elempárhoz hozzárendelt egy $x+y \in X$ elem, továbbá minden α skalárhoz és $x \in X$ elemhez hozzárendelt egy $\alpha x \in X$ elem, valamint minden $x, y, z \in X$ és tetszőleges α, β skalár esetén teljesülnek a következő feltételek:
  1. $x+y = y+x$,
  2. $(x+y)+z = x+(y+z)$,
  3. Létezik $O \in X$ ún. nulla elem, melyre $x+O = x$,
  4. $\alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$,
  5. $(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x$,
  6. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
  7. $0x = O$ és $1x = x$.

Alapfogalmak 3.

- Funkcionál: az operátor az X halmaz elemeihez skalárt rendel hozzá.
- Ha az X valós lineáris tér minden x, y és z eleméhez hozzá van rendelve egy $\langle x, y\rangle$ valós szám úgy, hogy teljesüljenek az
  1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
  2. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
  3. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$
  4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ és $\langle x, x\rangle = 0$, ha $x = 0$

  axiómák, akkor az $\langle x, y\rangle$ számot az x és y skaláris szorzatának nevezzük.
- Ha két elem skaláris szorzata zérus, akkor azokat egymásra ortogonálisnak nevezzük.
- Függvények esetében a skaláris szorzatot általában szorzatintegrálként definiáljuk: $\langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\, y(t) dt$.

Mechanikai feladatok közelítő megoldásainak hibái

- Tekintsük a $\Phi u = f,\ f \in W$ leképezést.
  - Φ (akár nemlineáris) operátor az $\Omega \subset R^d$ tartományon értelmezett $u \in U$ függvényeket a W függvénytérben értelmezett f függvénytérbe képezi le.
  - U az ún. tárgytér
  - W az ún. képtér
  - U és W végtelen dimenziós függvényterek,
  - a peremfeltételeket az Ω tartomány S peremén írjuk elő, homogén $Bu = 0$ formában.
- A pontos megoldást jelöljük u_0-lal, a közelítő megoldást pedig u_n-nel.
- A két függvénytérben értelmezhető hibavektorok:
  - $g = u_0 - u_n$ tárgyhiba
  - $h = f - \Phi u_n$ képhiba

Mechanikai feladatok közelítő megoldásainak hibái

- Ha Φ egy lineáris operátor, L, akkor
  - $Lu = f$ és
  - $h = f - \Phi u_n = Lu - Lu_n = Lg$
- Hibaelv kiválasztása: el kell dönteni, hogy a g, a h, vagy mindkét hibafeltételt alkalmazzuk, továbbá egy mérési elvet (metrikát) kell értelmezni az U és W függvényterekre.
- Bázisválasztás: mindkét függvénytérben alkalmas bázisvektor-rendszert kell felvenni a közelítő megoldás szempontjából szükséges alterek kifeszítésére.
  - A végeselemes technikák alapvetően ehhez a lépéshez kapcsolódnak és nem függenek a hibaelv megválasztásától!

Mechanikai feladatok közelítő megoldásainak hibái

- Hibafeltételt két kritérium alapján szokás felvenni:
  - Stacionaritási, vagy hossz-feltétel: a hibavektor kiválasztása után a felírt bilineáris alak értéke legyen minimális.
  - Ortogonalitási, vagy vetületi feltétel: a kiszemelt hibavektor egy altérre legyen ortogonális.

Feltétel	g	h	g **és** h
stacionaritási	sok ismeretlent tartalmaz, nem alkalmas a közelítő függvény együtthatóinak meghatározására	legkisebb négyzetek hibaelve néven ismert, ortogonalitási feltételre egyszerűsödik	$\langle g, h \rangle = min!$ energetikai hibaelv
ortogonalitási	két kiegészítő feltétel felírásával megoldható, direkt módszer	súlyozott maradékok hibaelve néven ismert	------

Irodalom

- Dr. Bojtár Imre, Dr. Gáspár Zsolt: Tartók Statikája IV. Műegyetemi Kiadó, 1993.
- Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: A végeselemmódszer matematikai alapjai, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, Budapest, 2009.
- Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: Végeselemmódszer építőmérnököknek, TERC Kiadó Budapest, 2003.