Optimális szerkezettervezés

Dr. Pomezanski Vanda

4. hét: Variáció számítás, variációs feladatok

A variációszámítás fogalma

- Funkcionál szélsőértéke:

- $I(y) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right) dx = extremum$

- melyben $y(x)$ egy bizonyos jól definiált függvényosztály eleme. Mechanikai feladatoknál jellemző, hogy további feltételeket, ún. perem- és mellékfeltételeket is teljesítenie kell.

Funkcionálok típusai

- Egyváltozós feladatok:
- $I\big(y(x)\big) = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx$
- $I\big(y(x)\big) = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\right)dx$
- $I(y_1, y_2, \dots y_n) = \int_a^b F\big(x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1{}'(x), \dots, y_n{}'(x)\big)dx$

- Többváltozós problémák, melyek parciális deriváltakat tartalmaznak:
- $I\big(u(x,y)\big) = \iint_\Omega F\big(x, y, u, u_x, u_y\big)dx\,dy$
- $I\big(u(x,y,z)\big) = \iiint_R F\big(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z\big)dx\,dy\,dz$

- Paraméteres feladatok: $x = x(t), y = y(t)$ és $\alpha \le t \le \beta$
- $I(x,y) = \int_\alpha^\beta F(x, y, \dot{x}, \dot{y})dt$

Klasszikus feladatok
Izoperimetrikus probléma

- Adott kerületű síkidomok közül meghatározzuk a legnagyobb területűt
  - pl. a marha bőrével szerzett ország, Karthágó alapítása, Dido története Vergilius Aeneas-ából

Mechanikai feladatok közelítő megoldásainak hibacsökkentő módszerei

- Hibafeltételt két kritérium alapján szokás felvenni:
  - Stacionaritási, vagy hossz-feltétel: a hibavektor kiválasztása után a felírt bilineáris alak értéke legyen minimális.
  - Ortogonalitási, vagy vetületi feltétel: a kiszemelt hibavektor egy altérre legyen ortogonális.

Feltétel	g	h	g **és** h
stacionaritási	sok ismeretlent tartalmaz, nem alkalmas a közelítő függvény együtthatóinak meghatározására	legkisebb négyzetek hibaelve néven ismert, ortogonalitási feltételre egyszerűsödik	$\langle g, h \rangle = min!$ energetikai hibaelv
ortogonalitási	két kiegészítő feltétel felírásával megoldható, direkt módszer	súlyozott maradékok hibaelve néven ismert	------

Galjorkin-módszer

Ritz-módszer

Megoldás Galjorkin-módszerrel

- A Galjorkin-módszer a legáltalánosabb alakban megadott ortogonalitási feltételt használja ezért nemlineáris differenciálegyenletek esetén is alkalmazható:

$$\langle \Phi u, v \rangle = 0$$

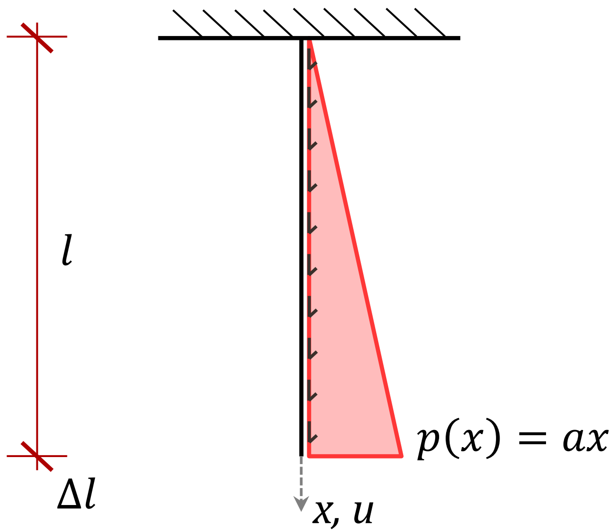
- A súlyozott maradékok hibaelvén alapul: a h képhibának zérusnak kell lennie, a zérus függvény pedig ortogonális minden az Ω-on értelmezett integrálható v függvényre.

$$\langle f - \Phi u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in M$$

  - Jelöljük u_n-el a közelítő számításhoz előre felvett n darab (a $Bu = 0$ peremfeltételt kielégítő, kellő számban folytonosan deriválható) lineárisan független φ_i függvény lineáris kombinációját: $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$
  - Az ortogonalitási feltétel v-ben lineáris, így ha az M_n lineáris tér egy bázisára ortogonális a hiba, akkor az M_n minden elemére is ortogonális lesz.

$$\langle f - \Phi(c_i \varphi_i), m_k \rangle = 0 \quad k = 1, \dots, n$$

Ismétlés: 1. Példa: peremérték feladat



$$-EA\frac{d^2u(x)}{dx^2} = p(x)$$

$u(0) = 0$ és $\varepsilon(l) = 0$

- $EA = konst.$
- egyensúlyi egyenlet:
$$\frac{d\sigma}{dx} = -\frac{p(x)}{A}$$
- geometriai egyenlet:
$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$
- anyag egyenlet:
$$\sigma = E\varepsilon$$

1. Példa megoldása Galjorkin-módszerrel

bázisfüggvények	**peremfeltételek**	
	$u(0) = 0$	$\varepsilon(\ell) = \left.\frac{du}{dx}\right\|_{\ell} = 0$
$\varphi_1 = x - \frac{x^2}{2\ell}$	0	0
$\varphi_2 = x - \frac{x^3}{3\ell^2}$	0	0

Deriváltak:

$$\varphi'_1 = 1 - \frac{x}{\ell} \qquad \varphi''_1 = -\frac{1}{\ell}$$

$$\varphi'_2 = 1 - \frac{x^2}{\ell^2} \qquad \varphi''_2 = -\frac{2x}{\ell^2}$$

1. Példa megoldása Galjorkin-módszerrel

- $L = -EA\dfrac{d^2u}{dx^2}$ lineáris operátor

- $\sum_{j=1}^{2} c_j \langle L\varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle f, \varphi_i \rangle = 0 \quad i = 1..2$

- $c_1\langle L\varphi_1, \varphi_1\rangle + c_2\langle L\varphi_2, \varphi_1\rangle - \langle f, \varphi_1\rangle = 0$
- $c_1\langle L\varphi_1, \varphi_2\rangle + c_2\langle L\varphi_2, \varphi_2\rangle - \langle f, \varphi_2\rangle = 0$

- $\begin{bmatrix} \langle L\varphi_1, \varphi_1\rangle & \langle L\varphi_2, \varphi_1\rangle \\ \langle L\varphi_1, \varphi_2\rangle & \langle L\varphi_2, \varphi_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_1\rangle \\ \langle f, \varphi_2\rangle \end{bmatrix}$

1. Példa megoldása Galjorkin-módszerrel

- $\langle L\varphi_1, \varphi_1\rangle = \int_0^\ell -EA\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\varphi_1 dx = \int_0^\ell -EA\left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(x-\frac{x^2}{2\ell}\right)dx = EA\frac{\ell}{3}$
- $\langle L\varphi_2, \varphi_1\rangle = \int_0^\ell -EA\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}\varphi_1 dx = \int_0^\ell -EA\left(-\frac{2x}{\ell^2}\right)\left(x-\frac{x^2}{2\ell}\right)dx = EA\frac{5\ell}{12}$
- $\langle L\varphi_1, \varphi_2\rangle = \int_0^\ell -EA\frac{d^2\varphi_1}{dx^2}\varphi_2 dx = \int_0^\ell -EA\left(-\frac{1}{\ell}\right)\left(x-\frac{x^3}{3\ell^2}\right)dx = EA\frac{5\ell}{12}$
- $\langle L\varphi_2, \varphi_2\rangle = \int_0^\ell -EA\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}\varphi_2 dx = \int_0^\ell -EA\left(-\frac{2x}{\ell^2}\right)\left(x-\frac{x^3}{3\ell^2}\right)dx = EA\frac{8\ell}{15}$

- $\langle f, \varphi_1\rangle = \int_0^\ell f\,\varphi_1 dx = \int_0^\ell ax\left(x-\frac{x^2}{2\ell}\right)dx = \frac{5a\ell^3}{24}$
- $\langle f, \varphi_2\rangle = \int_0^\ell f\,\varphi_2 dx = \int_0^\ell ax\left(x-\frac{x^3}{3\ell^2}\right)dx = \frac{4a\ell^3}{15}$

- $EA\begin{bmatrix}\frac{\ell}{3} & \frac{5\ell}{12}\\ \frac{5\ell}{12} & \frac{8\ell}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5a\ell^3}{24}\\ \frac{4a\ell^3}{15}\end{bmatrix} \longrightarrow$

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = \frac{a\ell^2}{2EA}$$

$$u = c_2\varphi_2 = \frac{a}{2EA}\left(\ell^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

Megoldás Ritz-módszerrel

- A kvadratikus funkcionál minimumtétele kimondja, hogy ha egy $Lu = f, Bu = 0$ alakú peremérték-feladatban L pozitív operátor, akkor ehhez a peremérték-feladathoz hozzárendelhető egy $F(u)$ funkcionál. Ha a peremérték-feladatnak létezik egy $u_0 \in D_L$ megoldása, akkor ebben (és kizárólag csakis ebben) az u_0 pontban az $F(u)$ funkcionálnak minimuma van.
- Ez fordítva is igaz. Ha egy u_0 függvénynél van az $F(u)$ funkcionál minimumpontja, akkor u_0 a peremérték-feladatnak legalább gyenge megoldása is egyben.

$$\frac{1}{2}\langle g, h\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega (u_0 - u)(f - Lu)\, d\Omega = \frac{1}{2}\int_\Omega (\underbrace{u_0 f}_{\text{konst.}} + \underbrace{uLu - u_0 Lu}_{\text{szim.}} - uf)\, d\Omega$$

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \langle f, u\rangle = min!$$

Megoldás Ritz-módszerrel

- $F(u) = \frac{1}{2}\langle Lu, u\rangle - \langle f, u\rangle = min!$
  - Mivel L pozitív operátor, parciális integrálással:
  $$F(u) = \frac{1}{2}\langle Ru, Ru\rangle - \langle f, u\rangle = min!$$
  Ebből következően a Ritz módszer bázisfüggvényei alacsonyabb rendű deriválási feltételek esetén is használhatóak, hiszen az R operátor rendje az L operátorénak a fele.
- A megoldást itt is a bázisfüggvények lineáris kombinációjával közelítjük: $u_n = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i$
- $F(c_1, \ldots, c_n) = \frac{1}{2}\langle Lu_n, u_n\rangle - \langle f, u_n\rangle = min!$
- $\frac{dF(u)}{dc_i} = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle L\varphi_j, \varphi_i\rangle - \langle f, \varphi_i\rangle = 0 \quad i = 1, 2..n$

1. Példa megoldása Ritz-módszerrel

- $F(u) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(-EA\frac{d^2u}{dx^2}\right) u\, dx - \int_0^\ell ax\, u\, dx = min!$

Parciális integrálással:

- $F(u) = \frac{EA}{2}\int_0^\ell \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \int_0^\ell ax\, u\, dx = min!$

függvényt kapjuk, ami megegyezik a szerkezet teljes potenciális energiájával.

1. Példa megoldása Ritz-módszerrel

bázisfüggvények	**peremfeltételek**	
	$u(0) = 0$	$\varepsilon(\ell) = \left.\frac{du}{dx}\right\|_{\ell} = 0$
$\varphi_1 = x$	0	1
$\varphi_2 = x^2$	0	2ℓ

Deriváltak: $\varphi'_1 = 1$ $\varphi'_2 = 2x$

- $F(u) = \frac{EA}{2}\int_0^{\ell}(c_1 + 2c_2x)^2\,dx - \int_0^{\ell} ax(c_1x + c_2x^2)dx = EA\left(c_1{}^2\frac{\ell}{2} + \right.$

1. Példa megoldása Ritz-módszerrel

- $$EA\begin{bmatrix} \ell & \ell^2 \\ \ell^2 & \dfrac{4\ell^3}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a\ell^3}{3} \\ \dfrac{a\ell^4}{4} \end{bmatrix}$$

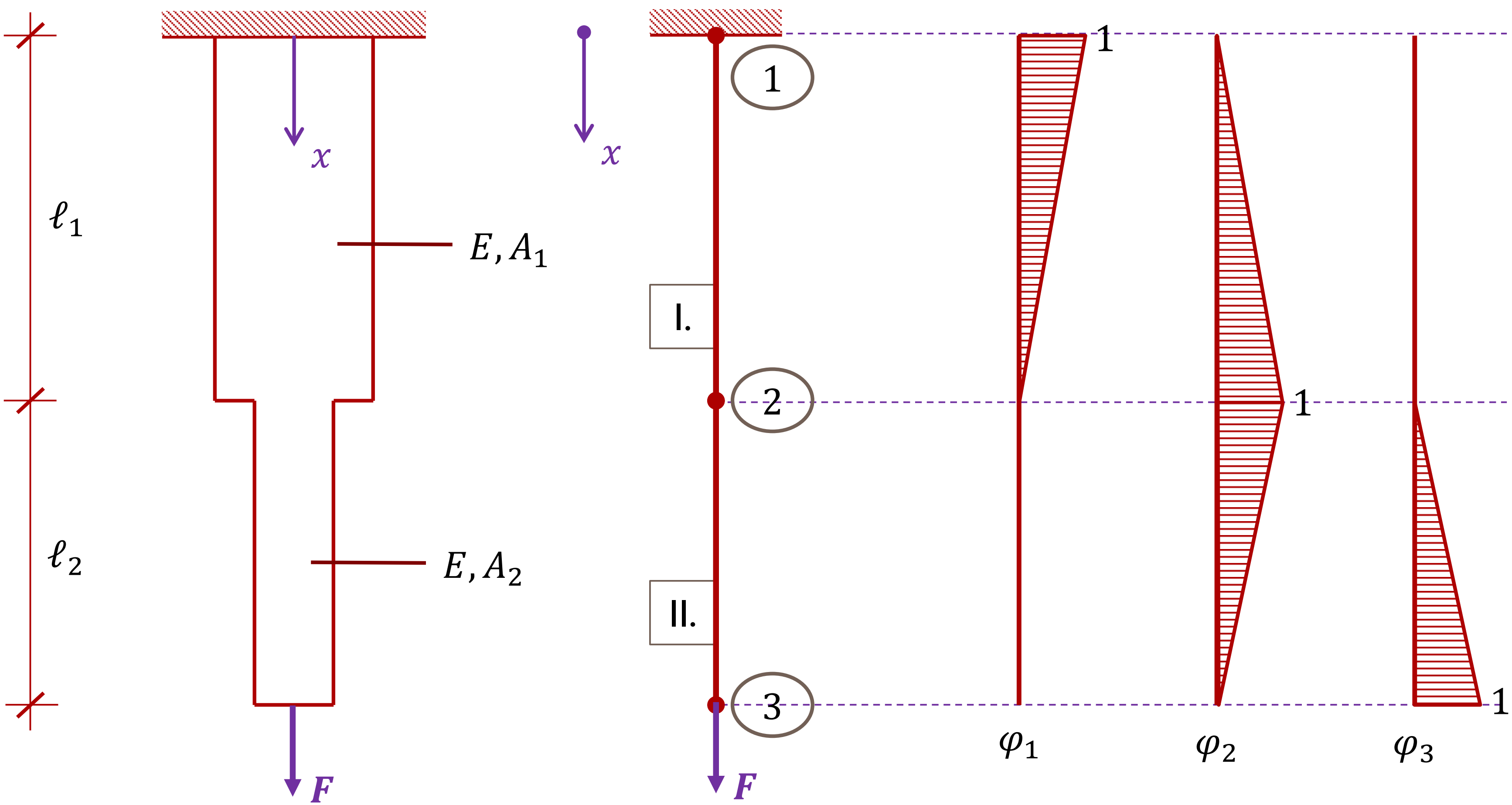
- Innen:

$$c_1 = \frac{7a\ell^2}{12EA}$$

$$c_2 = -\frac{a\ell}{4EA}$$

$$u = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = \frac{a\ell}{12EA}(7\ell x - 3x^2)$$

1. Példa

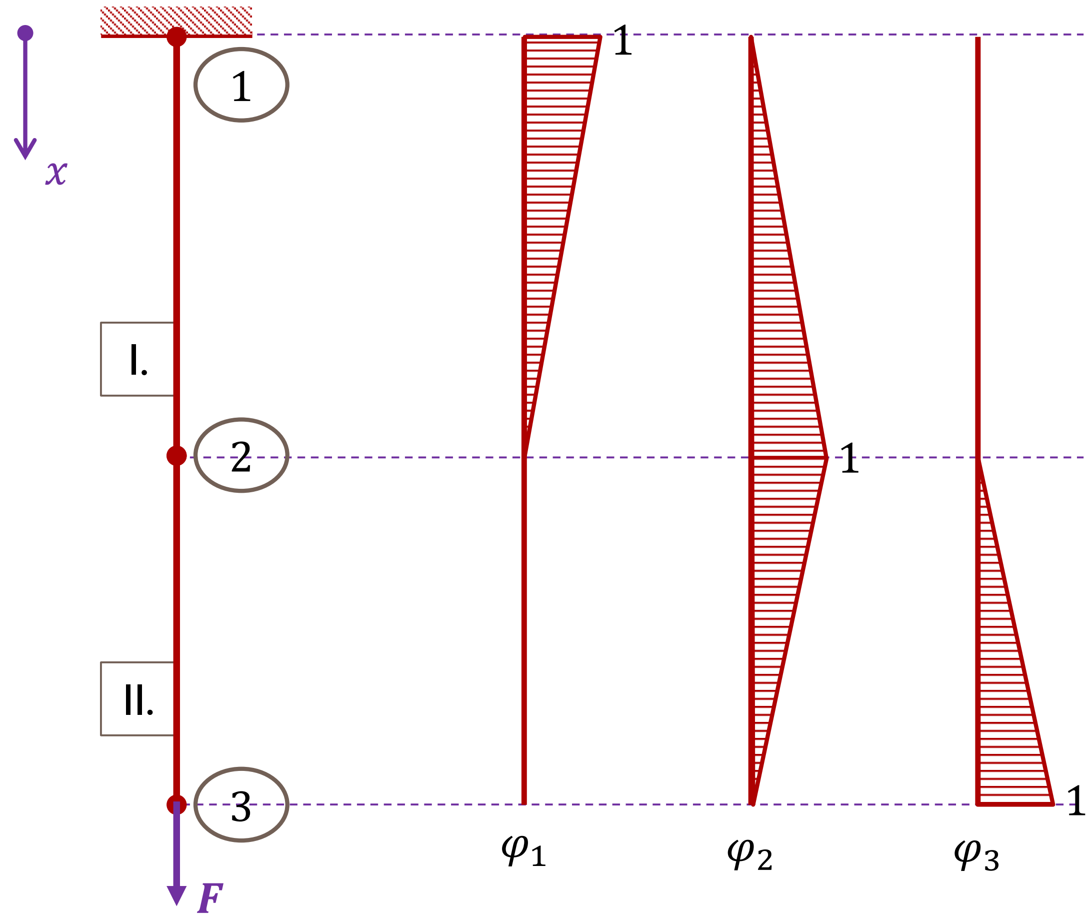


1. Példa

$$\varphi_1 = \begin{cases} x \le \ell_1 & 1 - \dfrac{x}{\ell_1} \\ x > \ell_1 & 0 \end{cases}$$

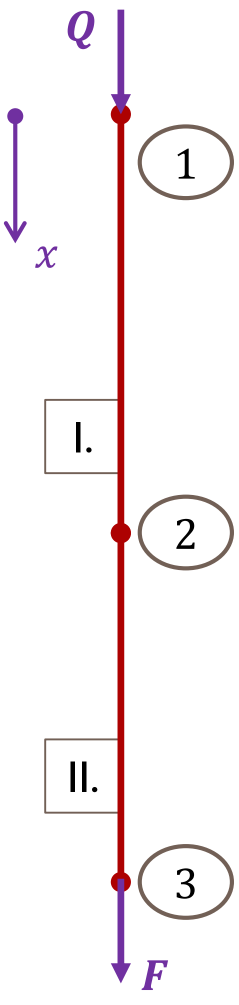
$$\varphi_2 = \begin{cases} x \le \ell_1 & \dfrac{x}{\ell_1} \\ x > \ell_1 & 1 - \dfrac{x - \ell_1}{\ell_2} \end{cases}$$

$$\varphi_3 = \begin{cases} x \le \ell_1 & 0 \\ x > \ell_1 & \dfrac{x - \ell_1}{\ell_2} \end{cases}$$



1. Példa

- $u(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i \varphi_i$
- $u(x) = c_1 \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{\ell_1} \\ 0 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} \frac{x}{\ell_1} \\ 1 - \frac{x-\ell_1}{\ell_2} \end{Bmatrix} + c_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{x-\ell_1}{\ell_2} \end{Bmatrix}$
- $\varepsilon(x) = \frac{du}{dx} = c_1 \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\ell_1} \\ 0 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} \frac{1}{\ell_1} \\ -\frac{1}{\ell_2} \end{Bmatrix} + c_3 \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\ell_2} \end{Bmatrix}$
- $\Pi = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - Qu|_{x=0} - Fu|_{x=\ell}$
- $\Pi = \frac{EA_1}{2} \int_0^{\ell_1} \left(-c_1 \frac{1}{\ell_1} + c_2 \frac{1}{\ell_1}\right)^2 dx +$
- $\frac{EA_2}{2} \int_{\ell_1}^{\ell_1+\ell_2} \left(-c_2 \frac{1}{\ell_2} + c_3 \frac{1}{\ell_2}\right)^2 dx - Qc_1 - Fc_3$



1. Példa

- $\Pi = \frac{EA_1}{2}\left(-c_1\frac{1}{\ell_1} + c_2\frac{1}{\ell_1}\right)^2 \ell_1 + \frac{EA_2}{2}\left(-c_2\frac{1}{\ell_2} + c_3\frac{1}{\ell_2}\right)^2 \ell_2 - Qc_1 - Fc_3$
- $\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = \frac{EA_1}{2}\left(2c_1\frac{1}{\ell_1} - 2c_2\frac{1}{\ell_1}\right) - Q = 0$
- $\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} = \frac{EA_1}{2}\left(2c_2\frac{1}{\ell_1} - 2c_1\frac{1}{\ell_1}\right) + \frac{EA_2}{2}\left(2c_2\frac{1}{\ell_2} - 2c_3\frac{1}{\ell_2}\right) = 0$
- $\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = \frac{EA_2}{2}\left(2c_3\frac{1}{\ell_2} - 2c_2\frac{1}{\ell_2}\right) - F = 0$

- $$E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{\ell_1} & \frac{-A_1}{\ell_1} & 0 \\ \frac{-A_1}{\ell_1} & \frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2} & \frac{-A_2}{\ell_2} \\ 0 & \frac{-A_2}{\ell_2} & \frac{A_2}{\ell_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q \\ 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$E\begin{bmatrix} \frac{A_1}{\ell_1} + \frac{A_2}{\ell_2} & \frac{-A_2}{\ell_2} \\ \frac{-A_2}{\ell_2} & \frac{A_2}{\ell_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

Szinguláris!

1. Példa

- A megoldás menete:
  - Az egyszerűsített mátrixegyenlet megoldása:
    $c_2 = F\frac{\ell_1}{EA_1}$ és $c_3 = F\frac{\ell_2 A_1 + \ell_1 A_2}{EA_1 A_2}$
  - Visszatérve a teljes egyenletrendszerhez:
    a második egyenletből: $c_1 = 0$
    az első egyenletből: $Q = -F$ reakcióerőt kapjuk.

- Az elmozdulásfüggvény:
- $$u(x) = F\frac{\ell_1}{EA_1}\begin{Bmatrix} \frac{x}{\ell_1} \\ 1 - \frac{x-\ell_1}{\ell_2} \end{Bmatrix} + F\frac{\ell_2 A_1 + \ell_1 A_2}{EA_1 A_2}\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{x-\ell_1}{\ell_2} \end{Bmatrix}$$

A sajátos bázisfüggvény felvétel előnyei

- A minimumfeltételt leíró egyenletrendszerben az együtthatómátrix
  - szimmetrikus és
  - szalagszerkezetű is egyben.
- A zérustól csak egyes szakaszokon különböző speciális bázisfüggvények és együtthatóik felírása egyszerűen algoritmizálható, tipizálható:
  - $x \leq \ell_1$ szakaszon $c_1\left(1-\frac{x}{\ell_1}\right)+c_2\frac{x}{\ell_1}=c_1+\frac{c_2-c_1}{\ell_1}x$ és a
  - $x > \ell_1$ szakaszon $c_2\left(1-\frac{\bar{x}}{\ell_2}\right)+c_3\frac{\bar{x}}{\ell_2}=c_2+\frac{c_3-c_2}{\ell_2}\bar{x}$ ha $\bar{x}=x-\ell_1$
- A c_i együtthatóknak közvetlen fizikai tartalmuk van, megegyeznek az i-dik csomópont elmozdulásával.

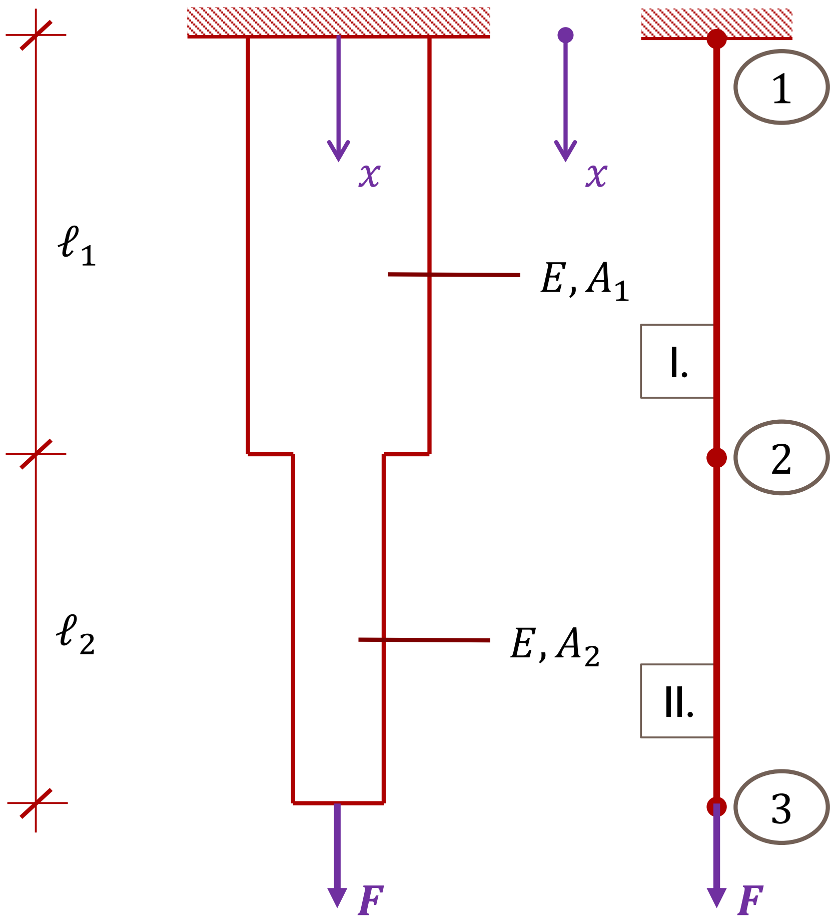
Definíciók

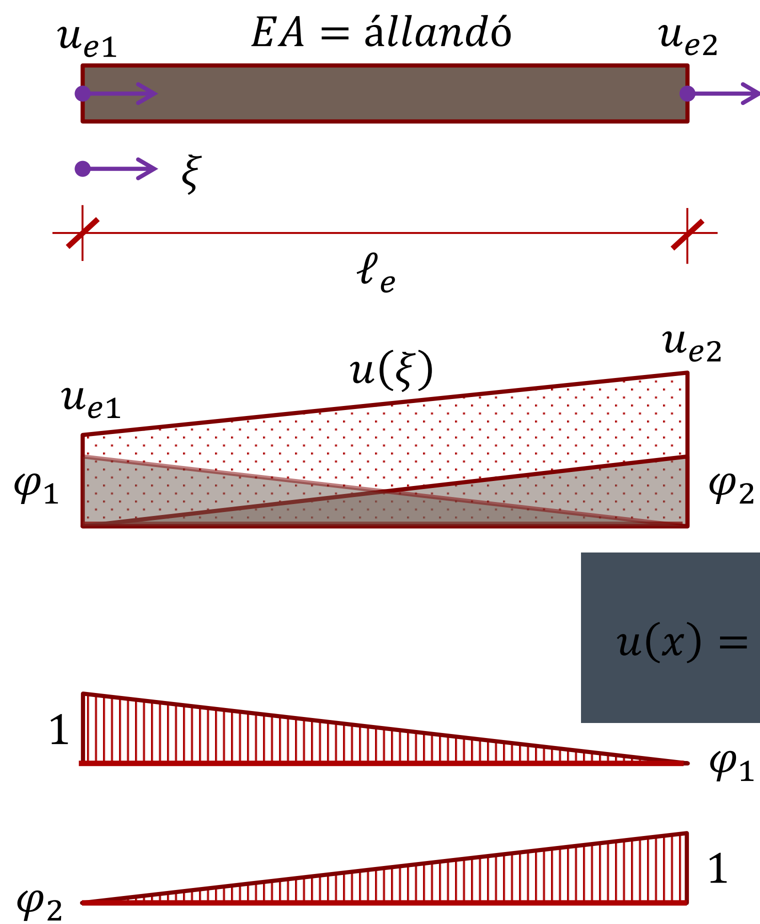
- A variációs feladatok stacionaritási elvre épülő, Ritz-módszerrel történő megoldásán belül a szerkezetet „elemekre” osztó és az elemekhez speciális bázisfüggvényeket választó technikát nevezzük végeselemes számítási modellnek.
  - Definíció a mintapélda alapján.
- A véges elemek módszere a Ritz-módszer speciális esete, amelyben sajátosan megválasztott bázisfüggvényekkel hajtjuk végre egy stacionaritási feladat megoldását.
  - Ez a definíció nem teljes, hiszen a Galjorkin-módszer a maga általánosabb, ortogonalitási feladatával éppen így alkalmas véges elemes technika megfogalmazására.
- A véges elemek módszerének lényege a közelítő eljárásoknál a geometriai és a matematikai függvénytér finitizálásával együtt járó sajátos bázisfüggvény megválasztási technika.
  - Ez a definíció általánosabb, minden olyan esetben ezt kell használni, amikor egy peremérték-feladatnak nincs stacionaritási alakja és a megoldást csak az ortogonalitási feltétel alkalmazása adhatja.

A véges elemek módszerének főbb lépései

1. A szerkezet elemekre osztása (a geometriai finitizálás).
2. A szerkezet vizsgálatához szükséges speciális bázisfüggvények kiválasztása (a függvénytér finitizálása).
3. A részekre osztott szerkezet elemeihez tartozó mátrixok előállítása.
4. A szerkezet egészéhez tartozó egyenletrendszer összeállítása.
5. Az egyenletrendszer megoldása, az ismeretlen változók meghatározása.
6. A feladat vizsgálatához szükséges úgynevezett másodlagos változók számítása.

Egy „általános” rúdelem vizsgálata





$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i \varphi_i$$

Az elmozdulások

- $u(\xi) = u_{e1} + \frac{u_{e2}-u_{e1}}{\ell_e}\xi = u_{e1}\left(1 - \frac{\xi}{\ell_e}\right) + u_{e2}\frac{\xi}{\ell_e}$

- Mátrixok segítségével:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{v}_e$$

- **N** a bázisfüggvények mátrixa:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix}$$

$$N_1 = 1 - \frac{\xi}{\ell_e} \quad \text{és} \quad N_2 = \frac{\xi}{\ell_e}$$

- $\mathbf{v}_e$ az elem csomóponti elmozdulásainak vektora:

$$\mathbf{v}_e = \begin{bmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \end{bmatrix}$$

A potenciális energia

- Egy általános szerkezeti elem esetében:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{\Omega} (\mathbf{Lu})^{\mathrm{T}}\mathbf{DLu}\,d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{Lu})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}\,d\Omega - \int_{S} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s\,dS - \int_{\Omega} \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_V\,d\Omega$$

$\mathbf{Lu} = \mathbf{LNv}_e = \mathbf{Bv}_e$ ahol a $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ mátrixot alakváltozási mátrixnak nevezzük.

$\mathbf{D}$ az anyagi merevségi mátrix

$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}$ a kinematikai terheket

$\mathbf{p}_s$ és $\mathbf{p}_V$ a peremen és tartományon működő terheket jelenti.

- A konstans $\mathbf{v}_e$ csomóponti elmozdulásokat az integrálokból kiemelve:

$$\Pi = \frac{1}{2}\mathbf{v}_e^{\mathrm{T}}\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{DB}\,d\Omega}_{\substack{\mathbf{K} \\ \text{elemi merevségi mátrix}}}\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_e^{\mathrm{T}}\underbrace{\left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{0}}\,d\Omega + \int_{S} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_s\,dS + \int_{\Omega} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}_V\,d\Omega\right)}_{\substack{\mathbf{q} \\ \text{Az elem csomópontjaira redukált terhek vektora}}}$$

Irodalom

- I.N. Bronstejn, K.A. Szemengyajev, G. Musiol, H. Mühling: Matematikai kézikönyv 9. kiadás, 10. fejezet, Typotex kiadó, Budapest 2009. ISBN 978-963-279-079-4
- Dr. Bojtár Imre, Dr. Gáspár Zsolt: Tartók Statikája IV. Műegyetemi Kiadó, 1993.
- Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: A végeselemmódszer matematikai alapjai, BME Tartószerkezetek Mechanikája Tanszék, Budapest, 2009.
- Bojtár Imre, Gáspár Zsolt: Végeselemmódszer építőmérnököknek, TERC Kiadó Budapest, 2003.