

## A.23. Keretek modellezése és számítása

### A.23.1. Bevezetés. A keretszerkezetek viselkedése

#### A.23.1.1. Tárgy

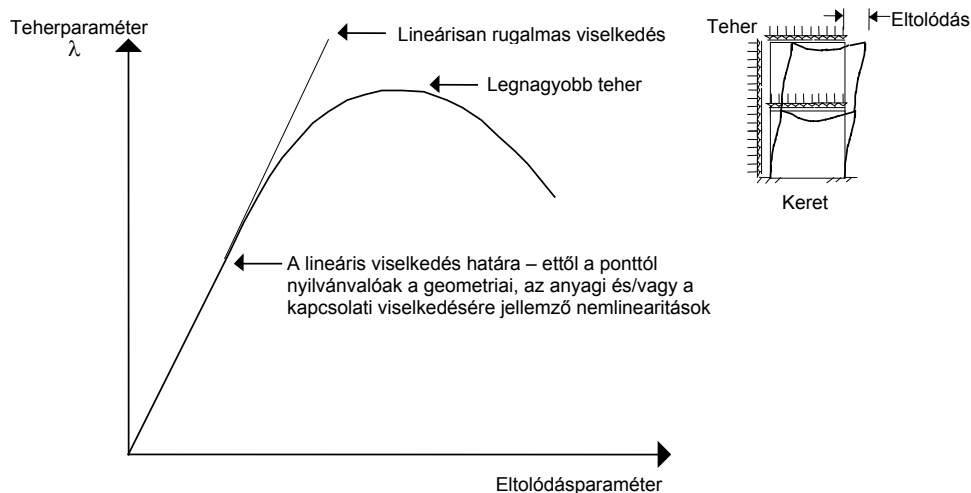
A keretszerkezetek globális analízisének célja az adott teherrel terhelt szerkezetben fellépő igénybevételek eloszlásának, valamint a kialakuló alakváltozásoknak a meghatározása.

Ezt a célkitűzést alkalmas modellek megválasztásával érhetjük el, amelyek különböző feltételezéseket tartalmaznak a szerkezet, különösen pedig a szerkezetet alkotó szerkezeti elemek és kapcsolatok viselkedéséről. Ennek a fejezetnek az alapvető célja az, hogy áttekintsük a szerkezeti viselkedés modellezésének és analízisének különböző lehetőségeit a gyakorlati tervezés szempontjából.

#### A.23.1.2. Keretek teher–eltolódás összefüggései

A szerkezetnek a rá működtetett terhekre adott válaszát egy teherparaméter és egy jellemző eltolódási paraméter viszonyával fejezhetjük ki. Az *A.23.1. ábra* a monoton növekvő teherrel terhelt kilengő keret jellegzetes viselkedési görbáját ábrázolja.

A  $\lambda$  teherparaméter általában egy szorzótényező (teherfaktor), amely a terhek valamennyi komponensére működik, és amely leírja e terhek monoton és arányos növekedését, míg az eltolódási paraméter esetünkben a felső födém szintjének oldalirányú eltolódását jelenti. Azt mondhatjuk, hogy az így felvett görbe jól jellemzi a szerkezet mint egész viselkedését; esetünkben a görbe meredeksége arányos a keretszerkezet oldalirányú merevségével.



A.23.1. ábra: Keretszerkezet teher–eltolódás viselkedése

Megfigyelhető, hogy a szerkezet viselkedése egy bizonyos pontig (az úgynevezett arányossági határig) gyakorlatilag lineáris. Az arányossági határ elérése után a görbe emelkedő részének pozitív meredeksége fokozatosan csökken, és pedig három különböző nemlinearitás: a geometriai nemlinearitás, a kapcsolati nemlinearitás és az anyagi nemlinearitás együttes következményeként. A kapcsolati nemlinearitás a legtöbb esetben már igen alacsony teherszint mellett is jelentkezik. A geometriai nemlinearitás azt fejezi ki, hogy összefüggés van a szerkezet aktuális, deformált alakja és az igénybevételek megoszlása között. Ez a fajta nemlinearitás általában jóval az anyag megfolyása, azaz az anyagi nemlinearitás megjelenése előtt kifejti hatását. Ez utóbbit követően a szerkezet egészének viselkedése egyre fokozottabban nemlineárisává válik, egészen addig, amíg a teherparaméter értéke el nem ér egy maximumot. A maximális teher elérése után az alakváltozások növekedése mellett az egyensúlyi követelmény csak úgy teljesül, ha a teherszint közben csökken.

A maximális teher szintjén a görbe meredeksége (azaz a szerkezet merevsége) zérus, majd pedig negatívvá válik, ami arra utal, hogy a szerkezet ettől a ponttól kezdve nem stabil. A maximális teher – amelyet teherbírásnak is nevezünk – azt az állapotot jelöli meg, amelyben a szerkezet összeomlása bekövetkezik, amennyiben nincs lehetőség a terhek más szerkezetre való áthárítására.

## **A.23.2. A keretek modellezése és a szerkezeti analízis alapfogalmai**

### **A.23.2.1. Magasépítési szerkezetek modellezése a szerkezeti analízishez**

A keretszerkezetek globális analíziséhez használt modell számos alapfeltételezést tartalmaz, amelyek részben a szerkezeti modellre, részben a szerkezet és az egyes szerkezeti elemek geometriai viselkedésére, részint pedig a keresztmetszetek és a kapcsolatok viselkedésére vonatkoznak.

Az analízis végrehajtása után a kereten és a keretet alkotó komponenseken (szerkezeti elemeken és kapcsolatokon) végre kell hajtani az előírt ellenőrzéseket. Ezek az ellenőrzések függenek a szerkezeti analízis típusától, valamint a keresztmetszetek ellenőrzésének típusától (azaz a teherbírási határállapot feltételeitől).

A magasépítési szerkezetek analíziséhez szükséges modell felvételére, illetve bizonyos esetekben az egyes szerkezeti elemek méretezésére iránymutatást az Eurocode 3 1.1. része tartalmaz. Az 1.1. rész az elsődlegesen statikus terhekkel terhelt épületek egyszerűsített, a bonyolultabb modellek helyett alkalmazható modellezési lehetőségeire ad javaslatokat. A javaslatok nem vonatkoznak a földrengésre való méretezésre, illetve a burkolatok héjszerű viselkedését figyelembe vevő eljárásokra, amelyekkel az Eurocode szabványsorozat külön részei foglalkoznak.

#### **A.23.2.1.1. A szerkezet koncepciója**

A szerkezet kialakítása feleljen meg a tervezett használattal összefüggő követelményeknek, beleértve a várhatóan működő terhekkel szembeni ellenállást is.

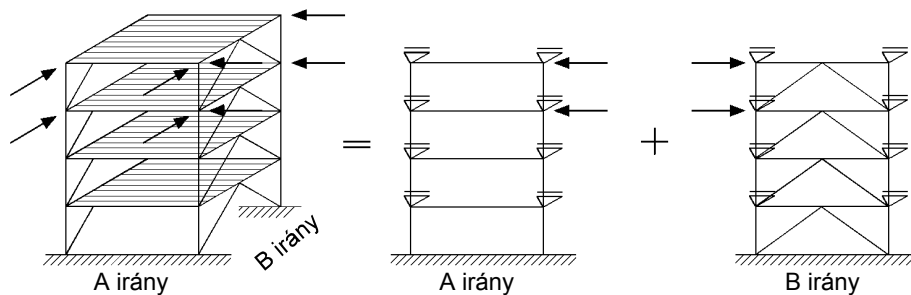
A szerkezeti elemek következő kategóriáit lehet megkülönböztetni:

1. *elsődleges tartószerkezeti elemek*: a keretszerkezetű főtartó, valamint ennek kapcsolatai és alapozása, tehát azok az elemek, amelyeken keresztül a függőleges és a vízszintes terhek lejutnak az altalajra;
2. *másodlagos tartószerkezeti elemek*: fióktartók és szelemenek, amelyek a terheket az elsődleges tartószerkezeti elemekre továbbítják;
3. *egyéb elemek*: olyan szerkezeti elemek, amelyek csak az elsődleges vagy a másodlagos tartószerkezeti elemekre továbbítják a terheket (például lemezburkolatok, tetőfedés, válaszfalak).

Abban az esetben, ha erre a három szerkezeti elem-csoportra különböző biztonsági követelmények vonatkoznak, szükség esetén külön-külön kell őket modellezni.

#### **A.23.2.1.2. Térbeli viselkedés**

Ahelyett, hogy az elsődleges tartószerkezetet egyetlen háromdimenziós keretként modelleznénk, lehetőség van arra, hogy a feladatot két, egymástól független és egymásra merőlegesen elhelyezkedő síkbeli keretcsoporthoz vizsgálataira egyszerűsítsük (A.23.2. ábra), amennyiben minden ilyen síkbeli keret a síkjára merőlegesen kellően meg van támasztva az oldalirányú stabilitás biztosítására.



A.23.2. ábra: A háromdimenziós keretszerkezet helyett síkbeli keretszerkezeteket vizsgálunk

#### **A.23.2.1.3. A vízszintes terhekkel szembeni ellenállás**

Erről a kérdésről a „Keretek osztályozása és a kapcsolati viselkedés leírása” című fejezetben lesz szó részletesen, ahol bevezetjük a merevített és merevítetlen, továbbá a kilengő és nem kilengő keretek fogalmát.

Ha a szerkezet kialakítása olyan, hogy az épület érzékeny a vízszintes terheknek a szerkezet csavarási ellenállási középpontjához képest értelmezett esetleges külpontosságára, akkor számításba kell venni azt a lehetőséget is, hogy a vízszintes terhek csak részlegesen működnek a szerkezetre.

#### **A.23.2.1.4. Az altalaj és a szerkezet kölcsönhatása**

Azt, hogy szükséges-e figyelembe venni az altalaj és a szerkezet kölcsönhatását, alapvetően az határozza meg, hogy a szerkezeti elemekben fellépő igénybevételek mennyire érzékenyek az altalajra jutó terhekből az altalajban bekövetkező süllyedésekre.

Az altalaj és a szerkezet kölcsönhatásának vizsgálatára az 1.1. rész a következő eljárást javasolja:

- Első lépésben végrehajtjuk a szerkezet analízisét azzal a feltételezéssel, hogy az altalaj tökéletesen merev. Ebből az analízisből meghatározzuk az altalajra működő terheket, ezekből pedig az altalajban bekövetkező süllyedéseket.
- Az ily módon kiszámított süllyedéseket mint kényszer-alakváltozásokat működtetjük a szerkezetre, és kiszámítjuk az ennek hatására fellépő igénybevételeket.
- Ha ezek az igénybevételek jelentős mértékűek, akkor számításba kell venni az altalaj és a szerkezet kölcsönhatását. Ehhez az altalajt egyenértékű rugókkal modellezhetjük.

Az Eurocode 3 1.1. része nem adnak iránymutatást arra vonatkozóan, hogy mikor célszerű jelentősnek tekinteni az altalaj és a szerkezet kölcsönhatását. Mi azt javasoljuk, hogy ha az altalaj süllyedései következtében a szerkezet ellenállása nem csökken 5%-nál nagyobb mértékben, akkor a kölcsönhatás a tervezés során elhanyagolható. Ez a feltétel megegyezik a merev kapcsolatok osztályba sorolására vonatkozó kritériummal.

#### **A.23.2.1.5. A keretek modellezése**

Az 1.1.rész a következő iránymutatást adja.

1. A szerkezeti analízis során az egyes szerkezeti elemeket és kapcsolatokat olyan modellel kell figyelembe venni, amely megfelelő módon tükrözi az adott szerkezeti elem vagy kapcsolat adott terhek esetén várható viselkedését.
2. A keret geometriáját a szerkezeti elemek tengelyvonalával kell megadni.

3. A szerkezeti elemeket általában elegendő az elem tengelyvonalában elhelyezett rúdként modellezni, és általában figyelmen kívül hagyhatók a szerkezeti elemek tényleges szélességéből adódó átfedések.
4. Szükség esetén a szerkezeti elemek közötti kapcsolat környékén figyelembe vehető a csatlakozó szerkezeti elemek tényleges szélességi mérete. Az 1.1. rész megad olyan eljárásokat, amelyek erre lehetőséget adnak. Az egyik ilyen modell különleges rugalmas kapcsolatokat tartalmaz.

#### **A.23.2.1.6. Kerettípusok és kapcsolatok**

Az Eurocode 3-ban a *kerettípus* fogalma azon módszerek között tesz különbséget, amelyekkel a kapcsolatok viselkedése figyelembe vehető a szerkezeti analízisben.

Közismert, hogy a kapcsolatok alakváltozásai miatt a szerkezeti elemek alakváltozás utáni alakja a kapcsolatokban nem illeszkedik. Az ebből adódó folytonossági hiány következményeinek függvényében a következő esetek különböztethetők meg.

- Ezt a folytonossági hiányt elhanyagoljuk, azaz feltételezzük, hogy a kapcsolatok merevek, és a keret folytatólagos keretszerkezetként modellezhető. Ilyenkor nevezzük a kerettípust folytatólagosnak.
- A folytonossági hiány figyelembe vehető úgy, hogy csuklós kapcsolati modellt tételezünk fel, azaz azt feltételezzük, hogy az alakváltozások kialakulása a kapcsolatban nem jár nyomatókátadódással. Ilyenkor nevezzük a kerettípust egyszerűnek.
- A folytonossági hiány úgy is figyelembe vehető, hogy az úgynevezett részlegesen folytatólagos kerettípust alkalmazzuk. Ilyenkor a kapcsolatot a maga viselkedési modelljével (fémerev kapcsolati modellel) vesszük figyelembe, amely a kapcsolat nyomatók-elfordulás viselkedését az előző kerettípusokhoz képest részletesebben tartalmazza.

Folyatólagos és egyszerű kerettípust csak úgy szabad figyelembe venni, ha a feltételezett viselkedésnek megfelelő kialakítású („merev”, illetve „csuklós” osztályú) kapcsolatot alkalmazunk. Bár a gyakorlatban előforduló esetek többségében az analízis során a teljes keretet egyféle kerettípusnak megfelelően vesszük figyelembe, elvileg elképzelhető, hogy egy keretszerkezet különböző részein különböző megközelítésmódot alkalmazunk.

#### **A.23.2.1.7. Rácsos tartók és rácsozások**

A rácsos tartókat általában úgy modellezzük, hogy a rudak találkozásánál csuklókat képzelünk el, akkor is, ha a külső elemek (például a rácsos tartó felső vagy alsó övrúdjai) fizikailag folytatólagosak. Ez alól néhány, az Eurocode 3 1.1. részében megadott különleges eset képez kivételt.

Ha a csomópontok kialakítása olyan, hogy a rudak bekötése külpontos, akkor bizonyos esetekben a kapcsolatot úgy célszerű modellezni, hogy ezt a külpontosságot figyelembe vesszük.

### A.23.2.2. Az imperfekciók figyelembevétele

A szerkezet analízise során, a merevítő rácsozások és a szerkezeti elemek tervezésekor alkalmas módon figyelembe kell venni a gyakorlati imperfekciók hatásainak esetleges következményeit.

A gyakorlati imperfekciók, amelyek közé a gyártási sajátfeszültségeket is soroljuk, általában geometriai jellegűek: ferdeség, görbeség, pontatlan illeszkedés, a kapcsolatok elkerülhetetlen, nem terv szerinti külpontossága.

Ezeket az imperfekciókat úgy lehet figyelembe venni, hogy megfelelő, valamennyi imperfekció típus hatását magában foglaló, úgynevezett helyettesítő geometriai imperfekciókat veszünk fel. Az Eurocode 3 1.1. része szerint a keretek analízise során kétféle imperfekciót kell figyelembe venni:

- a *kezdeti kilengési imperfekciókat* (keretimperfekciókat), valamint

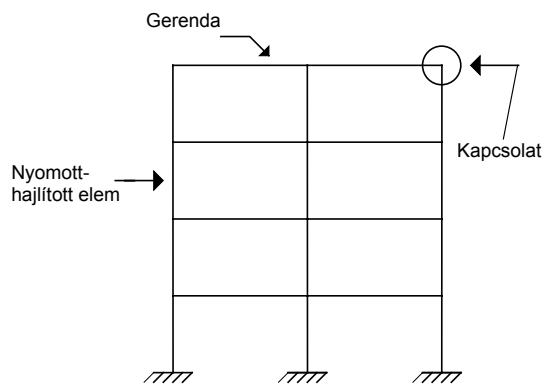
- az *elemimperfekciókat*, ha szükséges.

Nem kilengő keretek analízisében az elemimperfekciók figyelembevétele elhagyható. Karcsú oszlopokkal rendelkező kilengő keretekben azonban előfordulhat, hogy az elem imperfekcióit is figyelembe kell venni az analízis során.

Az imperfekciókat részletesebben a „Keretek osztályozása és a kapcsolati viselkedés leírása” című fejezetben tárgyaljuk.

### A.23.2.3. A keretek alkotóelemei

A keretek szerkezeti elemekből (rudakból) és kapcsolatokból állnak (A.23.3. ábra). A szerkezeti elemek olyan alkotóelemek, amelyeknek hossza lényegesen nagyobb, mint magassága, a kapcsolatok pedig azok a részek, ahol két vagy több ilyen szerkezeti elem egymáshoz csatlakozik. A szerkezeti elemek között aszerint szokás különbséget tenni, hogy milyen terheket viselnek. A szerkezeti elemet gerendának hívjuk, ha elsődlegesen hajlítást visel; oszlopnak, ha elsődlegesen nyomva van; húzott rudnak, ha a húzás dominál; nyomott-hajlított elemnek, ha mind a normálerő, mind pedig a hajlító nyomaték jelentős. A keretszerkezeteket elsődlegesen gerendák, nyomott-hajlított elemek és ezek kapcsolatai alkotják.



A.23.3. ábra: A keret és alkotóelemei

A húzóerővel terhelt szerkezeti elemeket húzott rudaknak nevezzük. Ilyen rudak a merevítő rácsosázásokban, a rácsos tartókban és a függesztett részeket tartalmazó (például függesztőrudakkal kialakított) szerkezetekben fordulnak elő.

A hajlító nyomatékkal és húzóerővel terhelt szerkezeti elemek nem képeznek külön kategóriát, hanem a nyomott-hajlított elemek közé soroljuk őket.

A szokványos keretszerkezeteket úgy szokás kialakítani, hogy jelentős csavaró nyomatékok ne tudjanak kialakulni. Ilyenkor, bár a csavaró nyomatékok teljesen sohasem küszöbölhetők ki, hatásuk elhanyagolható. Ha azonban jelentős csavaró nyomatékok kialakulására számítunk, akkor az érintett szerkezeti elemekben alkalmas eszközökkel meg kell határozni ezeket a csavaró nyomatékokat (ha erre a szerkezeti analízis kapcsán nem került sor), és tervezésükkor is figyelembe kell venni ezt a hatást.

#### **A.23.2.3.1. Gerendák**

A gerendákat általában olyan terhekre tervezzük, amelyek csak a szelvény erős tehetetlenségi főtengelye körül okoznak hajlítást. A keretgerendák tervezése általában erre az úgynevezett egyenes hajlításra történik. Mivel a gerenda geometriájában mindig vannak elkerülhetetlen kezdeti imperfekciók, és a terhek is mindig kissé kúpszerűen működnek a terv szerintihez képest, síkbeli hajlítás esetén is mindig fellép bizonyos mértékű csavarás. A terhek növelésével a hajlítás síkjára merőleges irányú elmozdulások annyira megnövekedhetnek, hogy a gerenda teherbírása kimerül. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a gerenda tönkremenetele kifordulás formájában következett be. A legtöbb szokványos keretszerkezetben ez a fajta tönkremenetel elkerülhető a nyomott öv alkalmas oldalirányú megtámasztásával (például a földem síkjában kialakított megtámasztással vagy magával a földemlemezsel).

A gerendák lemezelemkből épülnek fel, amelyek bizonyos esetekben érzékenyek a lemezhorpadás jelenségére. Bizonyos gerendákban a kifordulással együtt bekövetkező lemezhorpadás okozhat tönkremenetelt. Kéttengelyű (ferde) hajlításról akkor beszélünk, ha a szerkezeti elem keresztmetszetének erős és gyenge tengelye körül egyaránt van hajlítás. Akárcsak a síkbeli hajlítás esetén, ilyenkor is mindig van jelen csavarás is. A gerendákban kéttengelyű hajlítás azonban ritkán fordul elő, és a szokásos kialakítású keretszerkezetekben általában a csavarás is elhanyagolható mértékű. Az előzőekben említett jelenségeket felgyorsíthatja a keresztmetszetekben bekövetkező esetleges képlékenyedés.

#### **A.23.2.3.2. Normálerővel terhelt elemek: oszlopok és húzott rudak**

A nyomóerővel terhelt szerkezeti elemek (oszlopok, nyomott rudak) hosszuk alapján osztályozhatók. Míg a rövid szerkezeti elemek (támpillér, pillértalp) összeroppanás vagy folyás miatt mennek tönkre, a hosszú vagy karcsú szerkezeti elemek tönkremenetelét a kihajlás formájában bekövetkező stabilitásvesztés okozza. A teherbírás kimerüléséhez tartozó egyik fajta teher azt a terhet jelenti, amely a szerkezeti elem keresztmetszetének teljes megfolyását okozza. A kihajlás formájában tönkremenő nyomott elemek teherbírása az elem karcsúságától függ, és jóval kisebb lehet a keresztmetszet teljes megfolyásához tartozó teherbírásnál.

A gyártási sajtófeszültségek a keresztmetszet teherbírására nincsenek jelentős hatással, azonban számottevően csökkentik a kihajláshoz tartozó terhet. A helyi külpontosságok és a szerkezeti elemek egyenestől való eltérése (görbesége) következtében a teherbírás kisebb mind a keresztmetszet elméletileg számított ellenállásánál, mind pedig a kihajláshoz tartozó elméleti teherértéknél.

A terv szerint egyenes elemek Eurocode 3 szerinti kihajlási ellenállása figyelembe veszi az elem véletlenszerű kezdeti görbeségét (egyenestől való eltérését), továbbá a gyártási és szerelési sajtófeszültségeket.

A húzott elemek ellenállása a teljes keresztmetszet megfolyása, illetve a gyengített keresztmetszetben bekövetkező törés alapján számítható. Különös gonddal kell eljárni azokban az esetekben, amikor nagy alakváltozási képesség (szívósság) szükséges. A ferde kábelek, függesztőkábelek és karcsú függesztőrudak esetében különleges számítási módszereket kell alkalmazni, mert az önsúly miatti kezdeti alakváltozások miatt viselkedésük erősen nemlineáris.

#### **A.23.2.3.3. Nyomott-hajlított elemek**

Nyomott-hajlított elemeknek nevezzük azokat a szerkezeti elemeket, amelyeket jelentős nagyságú hajlító nyomatékok és nyomóerők terhelnek egy időben. Ilyen elemek jellemzően a keretszerkezetek függőleges szerkezeti elemei (oszlopai).

A jelentős nagyságú hajlító nyomatékkal és húzóerővel terhelt szerkezeti elemek ugyancsak ebbe a kategóriába sorolhatók. Ha szigorúan vesszük, valamennyi szerkezeti elem tulajdonképpen nyomott-hajlított elemnek minősül, és ennek speciális esete a gerenda, amelyben elhanyagolható a normálerő, valamint az oszlop, amelyben a hajlító nyomaték nem jelentős.

#### **A.23.2.3.4. Kapcsolatok**

Korábban általános volt, hogy a kapcsolatokat vagy merevnek, vagy csuklósnak tekintettük. Ugyan ez napjainkban is így van, ma már lehetőség van arra is, hogy a kapcsolatok viselkedését szabatosabban modellezzük (lásd a „Keretek osztályozása és a kapcsolati viselkedés leírása” című fejezetet és a „Kapcsolatok” című modult.)

A két szerkezeti elem összekötésére szolgáló kapcsolatok elsődlegesen nyíróerőt, illetve – hacsak nem csuklós kapcsolatról van szó – a keret síkjába eső hajlító nyomatékot továbbítanak. A kapcsolatok gondoskodnak továbbá az oszlopok, húzott elemek és nyomott-hajlított elemek esetén (de gerendák esetén nem) jelentős mértékű normálerők, az esetleges keretsíkra merőleges hajlító nyomatékok és nyíróerők, valamint a csavaró nyomatékok továbbításáról is.

### **A.23.2.4. A szerkezeti analízis alapfogalmai**

A szerkezet modellezése során az első lépés a szerkezeti elrendezés definiálása. Mivel a szokásos kialakítású szerkezetekben egyenes tengelyű szerkezeti elemek fordulnak elő, amelyek kapcsolati pontokon (kapcsolatokon

keresztül) kapcsolódnak a szomszédos szerkezeti elemekhez, a szerkezet geometriáját általában meghatározzák a kapcsolatok független koordinátái.

Ezen alapvető geometriai információk alapján állapítható meg a szerkezet szabadságfokainak száma. Ehhez néhány további adatra van szükség arról, hogy a szerkezeten belül az egyes helyeken milyen mozgási lehetőségek vannak. Ezek a mozgási lehetőségek többnyire a megtámasztási feltételek és néhány más hely (általában a kapcsolatok) viselkedésének idealizálását jelentik – azokét a helyekét, ahol a relatív eltolódások (például vízszintes eltolódás) vagy elfordulások (például a csuklós kapcsolatban) kialakulása nincs megakadályozva.

Az általában a kapcsolatok eltolódásaival és elfordulásaival kifejezett szabadságfokokat ezután a szerkezet modelljében, a szerkezet teher alatti megváltozott alakjának leírásában használjuk. Ha a kapcsolatok alkotóelemeit különálló összetevőkként modellezzük, akkor általában növekszik a szabadságfokok száma.

Ha rögzítettük a szerkezet geometriáját, a következő lépés az anyagjellemzők (azaz az acélsanyag viselkedési görbéjének), valamint a terhek jellegének felvétele. Ezután felvesszük az előtervezéshez használt keresztmetszeti és kapcsolati jellemzőket.

A szerkezeti analízis kapcsán felmerülő problémák megoldásához mindig az szükséges, hogy a szerkezet változói (az erők és az alakváltozások) kielégítsenek három alaptörvényt vagy fizikai törvényt, éspedig a következőket:

- **Egyensúly:** a szerkezeti elemekben és a kapcsolatokban ébredő belső erők, valamint a külső terhek a teljes szerkezetben elégséges ki a statikai (vagy dinamikai) egyensúlyi feltételeket.
- **Kompatibilitás:** a szerkezeti elemek alakváltozásai legyenek geometriailag kompatibilisek a kapcsolatok (beleértve a megtámasztásokat is) eltolódásaival és elfordulásaival, vagyis a tartószerkezetnek minden pontjában folytonosnak kell maradnia.
- **Anyagtörvény:** a szerkezeti elemekben és a kapcsolatokban ébredő belső erők (feszültségek) és a szerkezeti elemek és a kapcsolatok alakváltozásai elégséges ki azon anyag viselkedési törvényét, amelyből készültek. Az anyagok alapvető viselkedési törvénye a feszültség–alakváltozás diagramjuk, amely magában foglalja az anyag rugalmassági modulusát, folyáshatárát és alakváltozási képességét. Speciális analitikai eljárásokban más, származtatott anyagtörvényeket is felhasználunk a szerkezeti elemek és a kapcsolatok hajlítás, nyírás és normálerő együttesére való viselkedésének és ellenállásának leírására.

A szerkezeti analízishez használt modell középpontjában mindig a tartószerkezeti elemek modellje (rúdmodell) áll, amely az alapvető alkotóelemek (szerkezeti elemek, kapcsolatok) viselkedését írja le. Szerkezeti elemek esetén ez a modell a szerkezeti elem végén kialakuló eltolódások és elfordulások, illetőleg a működő erők (belső erők) közötti összefüggést fejezi ki. Ezek az összefüggések a szerkezeti elem hossza mentén minden keresztmetszetben kielégítik a három alapkövetelményt: az egyensúlyt, a kompatibilitást és az anyagtörvényt. A kapcsolatot leíró szerkezeti elem modelljét, ha van ilyen, hasonló elven vesszük fel, bár az anyagtörvények gyakran részben vagy egészben kísérleti eredmények kalibrációja révén származtatott tapasztalati vagy féltapasztalati összefüggéseken alapulnak.

A legtöbb számítógépes számítási eljárásban a szerkezeti elem viselkedését leíró modellt merevségi mátrix formájában adják meg. Ennek következtében a szerkezeti analízis végrehajtása során a szerkezeti elemeket összekapcsoló kapcsolatokban kell biztosítani az egyensúlyi és a kompatibilitási feltételek kielégülését. Egyetlen fizikailag megjelenő szerkezeti elemnél több számítási rúdelem is modellezhető.

A ma szerkezeti analízisre használt számítógépi programok többsége feltételezi, hogy a kapcsolatok vagy merevek, vagy csuklósak. Általában azonban lehetőség van arra, hogy külön kapcsolati elemeket (tehát részlegesen folytatólagos keretet) definiáljunk, és ezekhez az elemekhez egyedi viselkedési modellt rendeljünk. Például az alaptestek elmozdulásainak hatása leírható úgy, hogy a megtámasztó „kapcsolatokban” alkalmas jellemzőket veszünk figyelembe. Feltételezve, hogy a gerendák végén lévő kapcsolatok tulajdonképpen magának a gerendának a kiterjesztését jelentik, definiálható egy olyan egyenértékű gerendaelem, amely már a kapcsolat jellemzőit is tartalmazza. Ez az utóbbi megközelítésmód "kéz" számításra is alkalmas eljárást eredményez, és különösen előnyös akkor, amikor a keret vagy valamely szerkezeti elem síkbeli stabilitását kívánjuk megvizsgálni a kapcsolati viselkedés figyelembevételével.

A számítógépes számítási eljárások a leggyakrabban azoknak a csomóponti eltolódásoknak és elfordulásoknak a megkeresésére épülnek, amelyek kielégítik a kompatibilitási feltételeket, míg az egyensúlyi feltételek kielégülését az anyagtörvényeken keresztül biztosítják. Ezt az eljárást nevezzük elmozdulás módszernek. A másik, elvileg alkalmazható eljárás azoknak a belső erőknek (igénybevételeknek) a megkeresésére összpontosít, amelyek a kapcsolatokban kielégítik az egyensúlyi egyenleteket, míg a kompatibilitási feltételek kielégülését az anyagtörvényeken keresztül biztosítják. Ez az utóbbi, erőmódszernek nevezett eljárás különösen kézi számítás esetén előnyös, erre épül például a nyomatékostás módszere is. A számítógépi eljárásokban azonban előnyösebb az elmozdulás módszer alkalmazása.

A ma használt "kézi" és gépi eljárásokkal, elsősorban azoknak az egyszerűsítő feltevéseknek a következtében, amelyekre épülnek, nem mutatható ki a szerkezet stabilitásvesztése. A stabilitásvesztés valamely szerkezeti elem alkotó lemezében bekövetkező lemezhorpadás, valamely szerkezeti elem kihajlása/kifordulása vagy a teljes szerkezet valamely nagyobb részének globális instabilitása formájában következhet be. Ezért a szerkezeti analízis kiegészítéseképpen általában külön számítással vagy szerkezeti megoldással kell gondoskodni a stabilitásvesztési jelenségek kiküszöböléséről. Ezek a kiegészítő vizsgálatok bizonyos mértékig függenek a végrehajtott szerkezeti analízis típusától és bonyolultságától, illetve az alkalmazott szerkezeti elemek és kapcsolatok típusától.

### A.23.3. A keretanalízis módszerei

#### A.23.3.1. Általános megjegyzések

A tényleges teher–eltolódás viselkedést általában csak igen bonyolult számítási eljárással lehet meghatározni. Gyakorlati megfontolások miatt a keretanalízis, illetve az abban figyelembe vett szerkezeti elem- és kapcsolati modellek felvétele során több feltételezést teszünk, aminek eredményeképpen a teherbírásra biztonságos korlátot kapunk. Ezeknek a feltételezéseknek megfelelően a számítási eljárások az egyszerű rugalmas vagy merev–képlékeny analízistől az összetettebb, a szerkezet tényleges viselkedését már egészen jól közelítő elasztikus analízisig sokféle formában végrehajthatók.

A szerkezeti analízis módszereinek osztályozása során a legalapvetőbb szempont, hogy rugalmas vagy képlékeny eljárásról van-e szó. Míg a rugalmas analízis minden esetben alkalmazható, a képlékeny analízis használata csak bizonyos feltételek teljesülése esetén lehetséges. Másik alapvető osztályozási szempont az, hogy az eljárás figyelembe veszi-e vagy elhanyagolja a szerkezet megváltozott alakjának visszahatását az erőjére. Ebből a szempontból megkülönböztetünk másodrendű, illetve elsőrendű eljárásokat. Míg a másodrendű eljárások minden esetben alkalmazhatók, az elsőrendű eljárások csak akkor, ha az elmozdulások a szerkezet erőjére valóban csak kis mértékben hatnak, illetve ha ezt a hatást másképpen vesszük figyelembe.

A következőkben az egyszerűség és átláthatóság kedvéért csak síkbeli, síkjukban terhelt és síkjukban alakváltozó kereteken mutatjuk be a szerkezeti analízis alapfogalmait.

Bár mindig csak egyetlen teherkombinációt tárgyalunk, nem szabad megfeledkezni arról, hogy a vizsgálatokat minden egyes teherkombinációra el kell végezni.

#### A.23.3.2. Másodrendű hatások

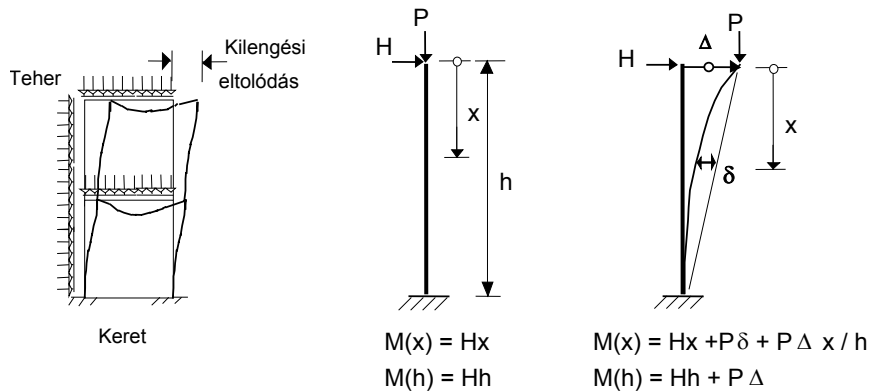
A külső terhek következtében fellépő elmozdulások módosítják a szerkezet viselkedését és a belső erők eloszlását. Ezért meg kell vizsgálni, mennyire jelentős ez a hatás, és szükség esetén alkalmas módon figyelembe kell venni következményeit.

Keretek esetén a lineáris viselkedéstől való eltérést elsősorban a csomópontok oldalirányú eltolódása, illetőleg a normálerők hatása okozza. Ezeket a hatásokat egy befogott, elkülönített oszlopon mutatjuk be, amelyet a szabad végén függőleges és vízszintes koncentrált terhek terhelnek (4. ábra). Az elkülönített oszlop egy olyan keret oszlopának az alapozástól az első inflexiós pontig terjedő szakaszát jelképezi, amelynek szintjei oldalirányban eltolódnak. Az inflexiós pont vízszintes eltolódása közelítően feleakkora, mint az oszlop feletti és alatti szint közötti relatív eltolódás. Az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy az inflexiós pontban működő vízszintes erőn és az alapozásnál fellépő vízszintes reakcióerőn kívül más vízszintes teher (például megoszló erőként



működő szélteher) nem hat az oszlopra. (Megjegyzés: a normálerőt ebben a szakaszban  $P$  betűvel jelöljük, igazodva a másodrendű hatásokkal foglalkozó szakirodalom szokásos jelöléséhez, de eltérve az Eurocode jelölésrendszerétől. Az Eurocode 3 1.1. része a normálerőt  $N$  betűvel jelöli.)

A normálerő jelenléte, az oszlop felső végének oldalirányú (kilengő jellegű) eltolódása, valamint az oszlop alakjának meggörbülése következtében a szerkezeti elem teljes hosszán másodrendű hajlító nyomatékok lépnek fel. Ennek az lesz a következménye, hogy adott teher esetén az oszlop tényleges alakváltozásai nagyobbak, mint ami az elsőrendű számításból (a másodrendű hatások elhanyagolásával) következne.



ahol  $h$  az oszloptalp és az inflexiós pont távolsága  
 $\Delta$  az oszloptalp és az inflexiós pont vízszintes eltolódásának különbsége

A.23.4. ábra: Nyomott-hajlított elem első- és másodrendű nyomatékai

A A.23.4. ábrán látható, hogy a rúdon a két szomszédos szint közötti relatív oldalirányú eltolódásból (a kilengésből,  $\Delta$ ) keletkezik egy globális, a rúd teljes hosszára kiterjedő másodrendű nyomaték – ezt a jelenséget nevezzük  $P-\Delta$  hatásnak. Emellett a nyomóerővel terhelt szerkezeti elemben, a rúdvégeket összekötő egyeneshez képest fellépő eltolódások ( $\delta$ ) következtében helyi másodrendű nyomatékok is működnek – ez utóbbi jelenséget nevezzük  $P-\delta$  hatásnak.

Keretek esetén ha a kilengési alakváltozásokat megakadályozzuk, akkor csak a  $P-\delta$  hatás érvényesül; ha azonban nem akadályozzuk meg őket, akkor a  $P-\delta$  hatás és a  $P-\Delta$  hatás együtt jelentkezik. A gyakorlatban előforduló kilengő keretekben a  $P-\Delta$  hatás sokkal jelentősebb, mint a  $P-\delta$  hatás. Emiatt mindig meg kell vizsgálni, hogy a keretben a kilengés hatásai jelentősek-e vagy sem, míg a  $P-\delta$  hatást csak különösen karcsú elemek esetén kell számításba venni (lásd az 5., „Keretek osztályozása és a kapcsolati viselkedés leírása” című fejezetet). (Megjegyezzük, hogy az Eurocode csak a kilengési alakváltozásokkal foglalkozik, de ezeket  $\delta$  betűvel jelöli.). Mindkét jelenség kialakulása független attól, hogy a szerkezeti elemben működő normálerő nyomóerő-e vagy húzóerő. A szerkezeti elem és a teljes szerkezet stabilitásának szempontjából a húzóerők következtében bekövetkező másodrendű hatások kedvezőek, míg a nyomóerők következtében bekövetkező másodrendű hatások kedvezőtlenek.

### A.23.3.3. Az erő–elmozdulás-módszer

A keretek rugalmas számítása során felhasznált alapvető összefüggések megértéséhez érdemes megvizsgálni egy egyszerű gerenda vagy nyomott-hajlított elem viselkedését meghatározó erő–elmozdulás egyenleteket. Először az elsőrendű elmélet által szolgáltatott egyenleteket vesszük sorra, majd áttekintjük, hogyan vehetők figyelembe a másodrendű hatások.

#### A.23.3.3.1. Elsőrendű rugalmas analízis

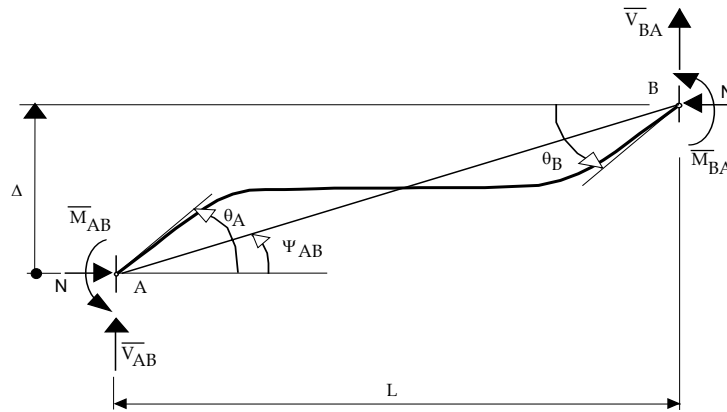
Az alapvető erő–elmozdulás összefüggések az elem végén fellépő nyomatékokat egyrészt az elemre ható külső terhek következtében fellépő, befogott elemvég feltételezésével számított elemvégi nyomaték, másrészt a fellépő rúdvégi eltolódások és elfordulások által okozott nyomatékok összegeként adják meg. A módszer alkalmazása során fel kell írni a kapcsolatok egyensúlyát kifejező egyenletrendszer, és a kapcsolat eltolódásai és elfordulásai következtében fellépő nyomatékokat ezen eltolódások és elfordulások lineáris függvényeként kell figyelembe

venni. Ez az egyenletrendszer azután meghatározza az elem merevségi mátrixában szereplő nyomási és nyírás jellegű tagokat.

Kilengő keretre való alkalmazás esetén az erő–elmozdulás módszerben a kapcsolatokba befutó elemvégek elfordulásainak kompatibilitásából indulunk ki; emellett olyan egyenleteket is felírunk, amelyek az egyes szintek vízszintes erőkire vonatkozó egyensúlyát fejezik ki. Az így felírt egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása szolgáltatja az ismeretlen kapcsolati eltolódásokat és elfordulásokat. Ha ezeket visszahelyettesítjük az egyes elemek kiindulási erő–elmozdulás egyenleteibe, megkapjuk az elemvégi nyomatékokat, illetőleg az elemvégi reakcióerőket.

Az erő–elmozdulás-módszer tulajdonképpen az általánosabb elmozdulás módszer elsőrendű elmélet szerinti, síkbeli keretekre vonatkozó alkalmazása, amelynek során feltételezzük, hogy a normálerőkhöz és a nyíráshoz tartozó alakváltozási energia elhanyagolható a hajlításhoz tartozó alakváltozási energiához képest. Ez az egyszerűsítés keretszerkezetek esetén általában megalapozott.

Az A.23.5. ábra a továbbiakban alkalmazandó előjel-konvenciót, valamint a nyomatékok, a nyíróerők, az elfordulások és az oldalirányú eltolódások jelölését szemlélteti. (Megjegyzés: a  $\Delta$  eltolódás jelentősen kisebb, mint az elem  $L$  hossza.)



A.23.5. ábra: A nyomott-hajlított elem alakváltozásai

Az elem alapvető erő–elmozdulás egyenletei a következőképpen írhatók:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{AB} &= \varepsilon \left[ R_{AB}^* (S_{AA} \theta_A + S_{AB} \theta_B - S_{AC} \psi_{AB}) - F_{AA} M_{AB} - F_{AB} M_{BA} \right] - V_{AB} a \\ \overline{M}_{BA} &= \varepsilon \left[ R_{AB}^* (S_{BA} \theta_A + S_{BB} \theta_B - S_{BC} \psi_{AB}) - F_{BA} M_{AB} - F_{BB} M_{BA} \right] - V_{BB} a \end{aligned} \quad (1)$$

ahol az A.23.5. ábra jelölései mellett a következő jelöléseket alkalmazzuk:

- $\overline{M}_{AB}$  és  $\overline{M}_{BA}$  az A és B kapcsolatnál fellépő csomóponti nyomaték;
- $M_{AB}$  és  $M_{BA}$  az elemre működő keresztirányú erőkől befogott elemvég feltételezésével számított elemvégi nyomatékok;
- $\psi_{AB} = \Delta / L$  az A és B pontot összekötő egyenes meredeksége a kilengési alakváltozások következtében.

Az elemek végén fellépő nyíróerőket a következő összefüggések szolgáltatják:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{AB} &= -\frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} + V_{AB} \\ \bar{V}_{BA} &= -\frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} + V_{BA}\end{aligned}\quad (2)$$

ahol  $V_{AB}$  és  $V_{BA}$  az  $L$  támaszközű kéttámaszú tartó végén fellépő nyíróerők.

(Megjegyzés: az előzőekben megadott erő–elmozdulás összefüggések csak merev kapcsolatok esetén érvényesek. Ha a kapcsolatok hajlítási merevségét figyelembe vesszük, akkor az egyenleteket alkalmas módon módosítani kell.)

Az analízis algoritmusához ezek után az erő–elmozdulás egyenletek, a nyírási egyenletek, valamint a normálerő és a normálirányú alakváltozások alapján származtatjuk az egyes szerkezeti elemek elsőrendű merevségi mátrixait. Ha a kilengési alakváltozásokat megakadályozzuk, akkor a kilengéshez tartozó tag ( $6\psi_{AB}$ ) elhagyható.

Ha az erő–elmozdulás-módszert vagy a nyomatékosztás módszerét kilengő keretek analíziséhez kívánjuk felhasználni, akkor általában úgy járunk el, hogy először azzal a feltételezéssel végezzük el a ténylegesen ható terhekkel terhelt szerkezet analízisét, hogy a kilengési alakváltozások meg vannak akadályozva. Ezután egy ettől független számítással meghatározzuk a kilengés hatásait, majd a két eredményt egymásra halmozzuk. A kilengés hatásainak számítása során olyan egyenleteket használunk, amelyek az egyes szintekre működő külső vízszintes terhek (azaz az oszlopokban fellépő nyíróerők összege) és a szint oszlopaiban fellépő nyomatékok közötti egyensúlyt fejezik ki. A szerkezetre működő vízszintes erőket az első analízis alapján vesszük fel, az ott az egyes szintekre kapott vízszintes (a kilengés megakadályozásához szükséges) reakcióerőknek megfelelő értékre, de ellentétes irányban működőnek tételezzük fel őket. Az egyes szintek elsőrendű kilengési egyensúlyi egyenletei a következőképpen írhatók fel (az összegzések az  $i$ -edik szint összes oszlopára terjednek ki):

$$\sum_j (\bar{M}_{AB,sway} + \bar{M}_{BA,sway})_j = h_i [H_i], \quad (3)$$

ahol  $H_i$  a  $h_i$  magasságú,  $i$ -edik szintre működő összes külső nyíróerő,  $A$  és  $B$  pedig a  $j$ -edik általános oszlop két végét jelöli.

A befogott oszlopokon számított kezdeti kilengési nyomatékok értékét az egyes oszlopokra a következő összefüggéssel vesszük figyelembe, feltételezve, hogy a szinteken további kilengési alakváltozások nem léphetnek fel:

$$M_{AB} = M_{BA} = \frac{6EI\Delta_i}{h_i^2}, \quad (4)$$

ahol  $\Delta_i$  az  $i$ -edik szint oszlopai által megtámasztott szint relatív eltolódása az alatta lévő szinthez képest – ez egyben a keresett ismeretlen.

Az eljárás során egyszerre egy szint kilengését vizsgáljuk. A kilengések végleges értéke a kilengési egyenletek alkotta egyenletrendszerből határozhatók meg, amelyben az egyenletek száma megegyezik az ismeretlen szintkilengések számával.

#### **A.23.3.3.2. Másodrendű analízis**

Ha a  $P$ – $\delta$  és a  $P$ – $\Delta$  hatásokat elhanyagoljuk, akkor az egyes szerkezeti elemek viselkedését leíró, az elsőrendű rugalmas számítás során figyelembe vett merevségi mátrixok lineárisakká válnak. Ezzel az eljárással csak akkor kapunk elfogadható eredményt, ha az oszlopokban viszonylag kicsi a normálerő (azaz az oszlopok viszonylag zömökök).

A  $P$ – $\delta$  hatás (a normálerő) hatását az elemben működő  $N_A$  normálerő és az elem  $N_E$  Euler-féle kritikus ereje közötti viszony határozza meg. Az  $L$  hosszúságú és  $I$  tehetetlenségi nyomatékú oszlop Euler-féle kritikus erejét a következő képlet adja:

$$N_E = \frac{\pi^2 EI}{L^2}.$$

A  $P$ - $\delta$  hatás úgy vehető figyelembe, hogy a lineáris merevségi mátrixot oly módon módosítjuk, hogy olyan tényezőket (az úgynevezett stabilitási függvényeket) tartalmazzon, amelyek az

$$\varepsilon = \pi \sqrt{\frac{N_{Ax}}{N_E}}$$

tényező függvényei. A normálerő tehát a szerkezeti elem merevségét módosítja.

Megjegyzendő, hogy meg kell különböztetni ebben az összefüggésben a szerkezeti elemben működő  $N_A$  normálerőt – amely az  $AB$  egyenessel párhuzamos – az *A.23.5. ábrán* jelzett  $N$  erőtől. Kilengés jelenléte esetén a szerkezeti elemben működő normálerő kis mértékben eltér az  $N$  erőtől. Ezt a különbséget általában elhanyagolhatjuk, mert a kilengési eltolódások általában kicsik ( $\cos \psi_{AB} \approx 1$  és  $\sin \psi_{AB} \approx \psi_{AB}$ ).

A szerkezeti elem módosított erő–elmozdulás összefüggései a következők:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{AB} &= \left[ \frac{EI}{L} (s\theta_A + sc\theta_B - s(1+c)\psi_{AB}) + mM_{AB} \right] \\ \bar{M}_{BA} &= \left[ \frac{EI}{L} (sc\theta_A + s\theta_B - s(1+c)\psi_{AB}) + mM_{BA} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

$\varepsilon = 0$  esetén az  $s$ ,  $c$  és  $m$  stabilitási függvények értéke rendre 4, 0,5 és 1, így az egyenletek ebben a speciális esetben megegyeznek az elsőrendű elmélet szerinti egyenletekkel. Az egyenletben szereplő többi jelölés megegyezik az elsőrendű elmélet kapcsán használt jelölésekkel (lásd az *A.23.5. ábrát*).

Az  $m$  paraméter azt jelzi, hogy a két végén befogott szerkezeti elem számítható elemvégi nyomatékok kis mértékben eltérnek a normálerő nélküli szerkezeti elem hasonló nyomatékaitól. Ez a paraméter kifejezhető az  $s$  és  $c$  függvény segítségével. Egyenletesen megosztó teher esetén [5] például  $f = 6 / [s(1+c)]$ . Nyomóerő esetén a két végén befogott szerkezeti elem számítható elemvégi nyomatékok megnövekednek, húzóerő esetén lecsökkennek. Ezt a hatást bizonyos esetekben elhanyagoljuk.

Megjegyzendő, hogy bár húzó- és nyomóerő esetén  $e$  dimenzió nélküli paraméter értékét eltérő összefüggések írják le,  $\varepsilon = 0$  esetén mégis ugyanazokhoz az értékekhez konvergálnak. Léteznek olyan, a számítógépes alkalmazásokhoz kifejlesztett numerikus közelítések, amelyek a húzóerő és a nyomóerő tartományában is egyformán érvényesek [8].

A nyíróerőkre vonatkozó összefüggések az elsőrendű elmélet szerinti összefüggésekhez képest szintén módosulnak, mert tartalmazni fognak egy olyan új tagot, amely a kilengés hatását veszi figyelembe. Ez az új tag jelképezi a  $P$ - $\Delta$  hatást. A nyíróerők képletei a következők (az összefüggésekben a nyomóerőt tekintjük pozitívnak):

$$\begin{aligned} \bar{V}_{AB} &= \frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} + N\psi_{AB} + V_{AB} \\ \bar{V}_{BA} &= -\frac{\bar{M}_{AB} + \bar{M}_{BA}}{L} - N\psi_{AB} + V_{BA} \end{aligned} \quad (6)$$

A síkbeli keretek teljes körű másodrendű analizisével foglalkoznak a [6, 7, 8] hivatkozások, és bemutatják, hogyan terjeszthető ki a másodrendű analízis a rugalmas-képlékeny tartományban bekövetkező tönkremenetelre (beleértve a stabilitásvesztést is). A fenti (5) és (6) egyenletekben jól látható a szerkezeti elemben működő nyíróerő és nyomaték legfontosabb módosulása a másodrendű hatások következtében, azonban a

szakirodalomban található részletesebb vizsgálatok azt igazolják, hogy a kilengés következtében magasabb rendű tagok is megjelennek a nyírási és normálerővel szembeni merevség képleteiben. A teljes szerkezet így kapható módosított merevségi mátrixa nemlineáris, hiszen a merevségi tagok az éppen érvényes kilengési alakváltozások és a szerkezeti elemekben működő normálerők függvényei. Tulajdonképpen arról van szó, hogy a szerkezet egyensúlyát az alakváltozások nyomán előálló alakra írjuk fel. A másodrendű analízist általában úgy végezzük, hogy az összes terhet együtt, kis lépésekben növeljük, és iterációs eljárással biztosítjuk a konvergenciát [6].

Nyilvánvaló, hogy a szokásos kialakítású, nagyon karcsú rudakat nem tartalmazó kilengő keretek esetén nem szükséges a nemlineáris elméletet közvetlenül alkalmazni, hiszen a  $P-\delta$  hatás elhanyagolható. Ilyen esetekben biztonsággal használhatók egyszerűbb eljárások, például az elsőrendű analízis iterációs alkalmazása. Néhány, a  $P-\Delta$  hatásokat figyelembe vevő módszert, amelyek alapvetően az előzőekben bemutatott módosított nyírási egyenleteken alapulnak, a következő szakasz mutat be.

Az Eurocode 3 1.1. része nem ad meg konkrét módszert arra, hogyan lehet a  $P-\delta$  hatást figyelembe venni, valószínűleg azért, mert feltételezi, hogy a kihajlási görbék kellően figyelembe veszik őket, legalábbis nem kilengő keretek nyomott-hajlított elemeiben. Óvatosan kell azonban eljárni akkor, amikor a szerkezet igen karcsú vagy íves tengelyű szerkezeti elemeket tartalmaz, hiszen ilyenkor a szerkezeti elem teljes hossza mentén jelentős mértékben módosulnak a nyomatékok. Ilyen különleges esetekben általában nem elégedhetünk meg a másodrendű analízis egyszerűbb eljárásaival, hanem pontosabb másodrendű analízist kell végrehajtanunk. A szerkezeti elemet célszerűen több számítási rúdelemre kell felosztani, ami a szerkezeti elem imperfekcióinak felvételét is lehetővé teszi. Ily módon az analízis megadja a szerkezeti elemek hossza mentén mesterségesen létrehozott „kapcsolatokban”, illetve a szerkezeti elemek végén kialakuló belső erőket és nyomatékokat.

#### **A.23.3.3.3. Az egyenértékű vízszintes erők módszere a másodrendű számításához**

A *A.23.4. ábrán* látható, hogy az oszlop alsó végén a nyomaték értéke az elsőrendű  $Hh$  értékről  $Hh + P\Delta$  értékre növekedett. Az eset majdnem ugyanaz, mintha a tényleges vízszintes teher (nyíróerő) növekedett volna meg a kilengés következtében  $P\Delta / h$  értékkel.

Az eljárás alkalmazása során első lépésben ki kell számítani elsőrendű elmélettel a függőleges és a vízszintes terhekből a normálerőket és a szintek vízszintes eltolódásait (kilengéseit). Ezen normálerőkből és kilengésekből aztán meghatározzuk azokat a  $P\Delta_f / h_s$  egyenértékű vízszintes erőket, amelyeket minden szinten minden oszlop felső végén (azaz a megtámasztott földem szintjében) működtetni kell a kilengés irányában. Az előző képletben  $h_s$  az adott oszlophoz tartozó szintmagasság,  $\Delta_f$  pedig az oszlop alsó és felső vége közötti relatív vízszintes eltolódás. Mivel azonos nagyságú, de ellentétes értelmű erőket alkalmazunk az oszlopok alsó végén, a szerkezet teljes egészére működő vízszintes erők eredője nem változik. A vízszintes erők így előálló összes növekménye egy adott földem szintjében meghatározható úgy, hogy a szint alatt lévő összes oszlop felső végének vízszintes erejét összegezzük, és ebből levonjuk a szint felett lévő összes oszlop (ha van ilyen) alsó végének összes vízszintes erejét.

Végeredményben egy zárt erőrendszert kapunk.

Ezután ismét végrehajtottunk egy elsőrendű analízist, most már a szintenként (az alapozás szintjén is) működtetett „egyenértékű” vízszintes erőkkel együtt. Az eljárást addig kell ismételni, amíg a szintek kilengésének értékei kellő pontossággal konvergálnak. Ha néhány iterációs lépésen belül nem tapasztalunk konvergenciát, akkor az azt jelenti, hogy a szerkezet instabil. Konvergencia esetén a kapott belső erők és nyomatékok már minden szerkezeti elem esetén tartalmazzák a  $P-\Delta$  hatást.

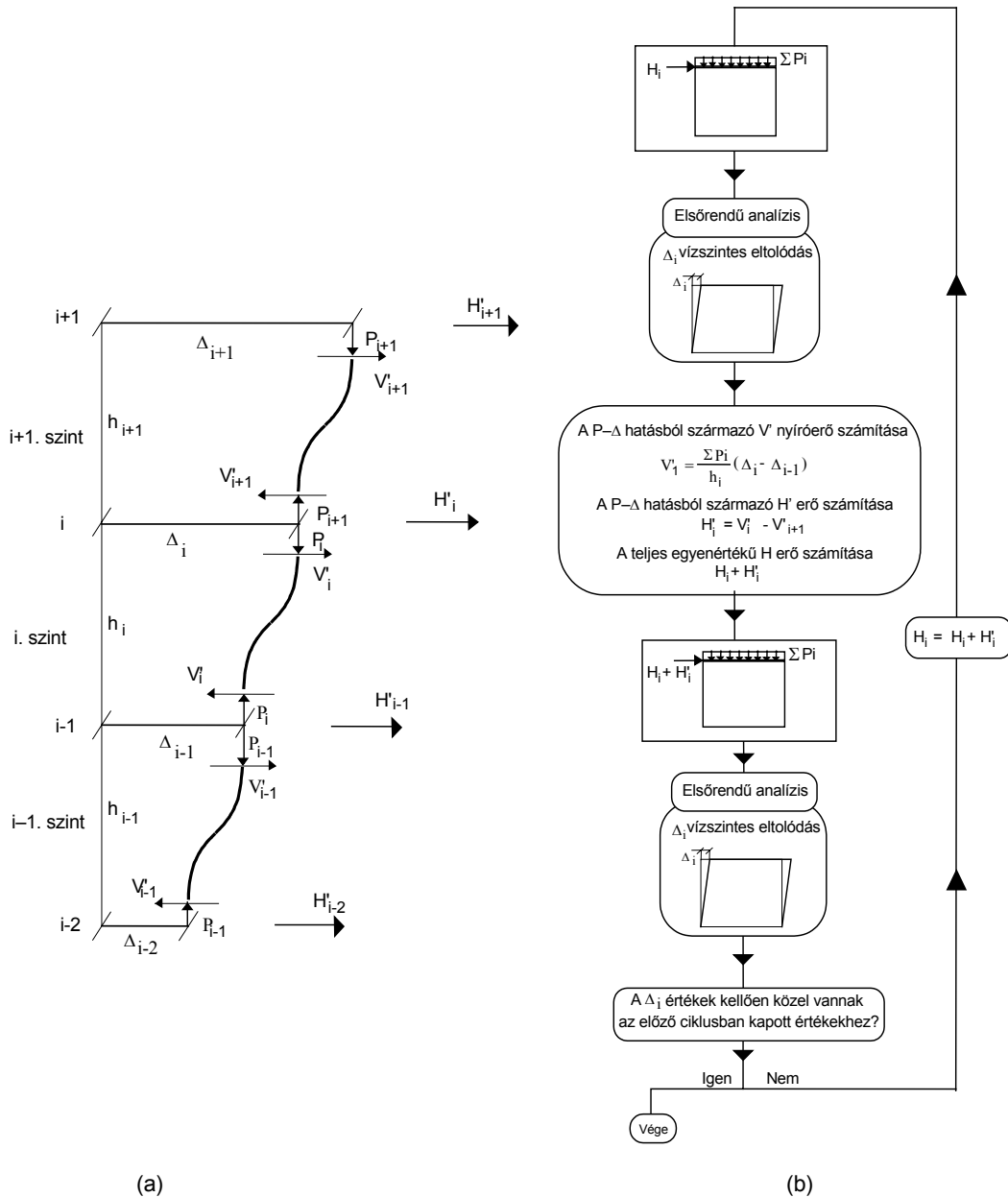
Az eljárást a *6. ábra* szemlélteti. Az ábrán a kezdeti kilengéseket  $\Delta_i$  jelöli, ahol  $i$  a szint sorszámára utal.

Valamely szint összes vízszintes többleterejét a következő összefüggés adja:

$$V_i' = \sum \frac{P_i}{h_i} (\Delta_i - \Delta_{i-1}), \quad (7)$$

ahol:

- $V_i'$  az  $i$ -edik szinten a kilengési alakváltozások következtében fellépő többlet nyíróerő;
- $\sum P_i$  az  $i$ -edik szinten lévő oszlopokban keletkező normálerők összege;
- $h_i$  az  $i$ -edik szint (az  $i-1$ -edik és az  $i$ -edik födém közötti szint) magassága;



A.23.6. ábra: Az egyenértékű vízszintes erők módszere

- $\Delta_i$  és  $\Delta_{i-1}$  az  $i$ -edik és az  $i-1$ -edik szint teljes kilengése, azaz az alapozás szintjéhez (0-dik szinthez) viszonyított relatív kilengés (feltételezve, hogy az alapozás szintje nem mozdul el).

A módszer feltételezi, hogy az épület valamennyi szintje ugyanabba az irányba tolódik el. Az oszlopok felső végén fellépő nyíróerő ellentétes értelmű az oszlopok alsó végén fellépő nyíróerővel. Ennek megfelelően egy adott födém szint összes „ekvivalens” kilengési nyíróereje megegyezik a födém szint feletti oszlopok és a födém szint alatti oszlopok „többlet nyíróerejének” különbségével, azaz:

$$H'_i = V'_i - V'_{i+1} \quad (8)$$

A szerkezetet ezek után elsőrendű elmélettel újraszámítjuk, vagy úgy, hogy külön meghatározzuk a  $H'$  erőkből származó igénybevételeket, és ezeket összegezzük a kiindulási analízis eredményeivel, vagy pedig úgy, hogy az eredeti teherrendszert kiegészítjük a  $H'$  erőkkel, és a teljes erőrendszerre újból elvégezzük az elsőrendű analízist. Ha a megismételt számítás után a  $\Delta_i$  értékek kellően közel vannak (például 5%-ra) az előző számításból kapott értékekhez, akkor azt mondhatjuk, hogy az eljárás kellő mértékben konvergál. Egyes rendelkezésre álló számítógépes programok ezt az eljárást alkalmazzák a kilengő keretek másodrendű számítására.

#### **A.23.3.3.4. A módosított erő–elmozdulás-módszer**

Egy adott szinten az oszlopokban ébredő normálerők összegének meg kell egyeznie a szintre működő összes függőleges teher eredőjével. Adott szint esetén akár kézi számítással, akár elsőrendű analízissel könnyűszerrel meghatározható az oszlopokban működő normálerők összege.

Az erő–elmozdulás-módszer alkalmazásakor a  $P$ – $\Delta$  hatás figyelembevételének egyszerű módja, hogy felírjuk az egy adott szint vízszintes egyensúlyát kifejező, úgynevezett módosított kilengési egyenletet, amely a következő alakú:

$$\sum_j \left( \overline{M}_{AB,sway} + \overline{M}_{BA,sway} \right) - \Delta_i \sum_j P_j = h_i [H_i], \quad (9)$$

ahol  $\sum_j P_j$  az  $i$ -edik szint  $j$  jelű oszlopaiban ébredő normálerők összege, tehát ismert érték;  $\Delta_i$  pedig az  $i$ -edik szint kilengése. Az összefüggésben szereplő többi mennyiség jelentése megegyezik az eredeti erő–elmozdulás-módszer kapcsán megszokottal.

Ez az eljárás olyan közvetlen módszert jelent a  $P$ – $\Delta$  hatás figyelembevételére, amely nem igényel iterációt. A módosított kilengési egyenlet a nyomatékosztás módszerével együtt is alkalmazható.

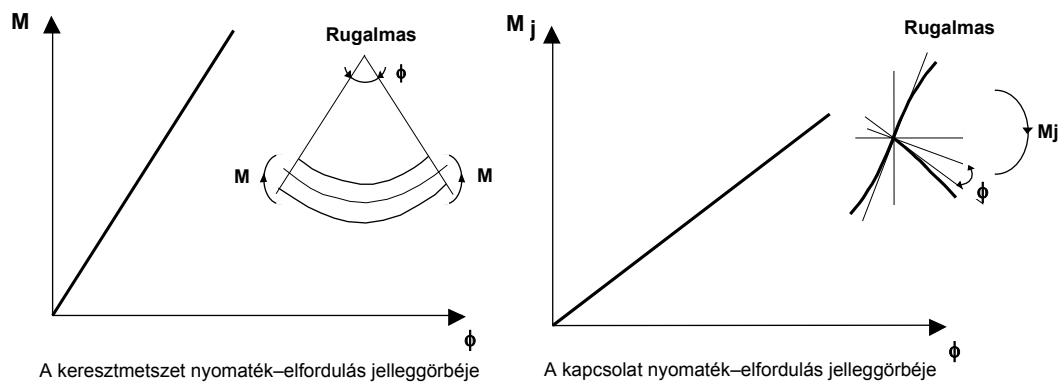
### **A.23.4. Rugalmas globális keretanalízis**

#### **A.23.4.1. Elsőrendű elmélet**

##### **A.23.4.1.1. Feltételezések, megszorítások, a keresztmetszetekkel és a kapcsolatokkal szemben támasztott követelmények**

A lineárisan rugalmas számítás során feltételezzük, hogy a keresztmetszetek és a kapcsolatok viselkedése korlátlanul rugalmas (A.23.7. ábra.) Az elsőrendű analízis során a szerkezet egyensúlyát az eredeti, deformálatlan tartóalakon írjuk fel.

Az eljárás alkalmazásához nem szükséges semmiféle, a keresztmetszetek vagy a kapcsolatok alakváltozási képességére vonatkozó kikötés (keresztmetszeti osztály, kapcsolat szívóssági osztálya). Az azonban, hogy végül milyen keresztmetszeti osztályt alkalmazunk, függ attól, hogy milyen módszerrel kívánjuk ellenőrizni a keresztmetszet ellenállását (milyen tönkremeneteli feltételt alkalmazunk).



A.23.7. ábra: A szerkezeti elemek és a kapcsolatok nyomaték-elfordulás jelleggörbéje

#### A.23.4.1.2. A keret analízise

A szerkezeti elemek és a kapcsolatok lineáris viselkedésének feltételezésével végrehajtott elsőrendű rugalmas globális analízis lineáris teher-eltolás összefüggést eredményez (A.23.8. ábra).

Az analízis során figyelembe kell venni a keret imperfekcióit.

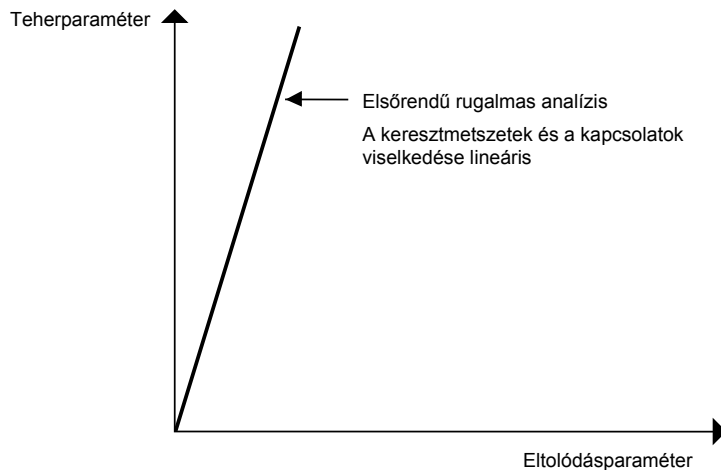
Egyszintes, nyeretetős portálkeretekben gyakori, hogy folyamatosan változó keresztmetszetű elemeket alkalmazunk. Az ilyen szerkezeti elemeket általában úgy modellezzük, hogy felosztjuk őket elegendő számú számítási rúdelemre, amelyeket azután állandó keresztmetszettel veszünk figyelembe. Egyhajós, kétsuklós keretek esetén azonban arra is lehetőség van, hogy egy, az egyenletesen változó keresztmetszetű rudak pontos elméletén alapuló, félgrafikus eljárást alkalmazzunk [9], amely mind elsőrendű, mind pedig másodrendű analízis esetén használható.

A tervezőmérnökök általában jól kiismerik magukat az elsőrendű rugalmas analízisben, hiszen minden lehetséges eljárás közül ez a legegyszerűbb. Az évek során számos olyan eljárást dolgoztak ki, amely a "kézi" számítás céljaira is alkalmas; ilyen az erő-elmozdulás-módszer, a nyomatékosztás módszere vagy a gyors számítást lehetővé tevő analitikus formulák (amelyeket néha dimenzió nélküli, grafikus formában adnak meg). Ezek az eljárások általában általánosíthatók oly módon, hogy a kapcsolatok viselkedését is figyelembe tudják venni [4].

Ugyanez érvényes a mátrixszámításra épülő eljárásokra is, amelyek napjainkra – a számítógépek általánossá válásával – szinte teljesen kiszorították a kézi módszereket.

Az elsőrendű rugalmas számítás nagy előnye, hogy lehetővé teszi a terhekre és az igénybevételekre vonatkozó szuperpozíció elvének alkalmazását.





A.23.8. ábra: Teher–eltolódás görbe elsőrendű rugalmas analízis esetén

### **A.23.4.1.3. A keret tervezése**

Ezzel a témával részletesen a „Az igénybevétel-számítás módszerének megválasztása. A számítási módszer és a tervezés viszonya” című fejezet foglalkozik.

Az elsőrendű rugalmas számítás csak akkor jelent biztonságos alapot a tervezés számára, ha a szerkezet előre jelzett válasza a terhek egy jelentős tartományában csak kis mértékben tér el a valóságostól (azaz kis normálerők esetén).

Vizsgálni kell a keret egészének stabilitását. A keret rugalmas kritikus terhe meghatározható akár speciális keretszámítással [5, 6], akár a „Keretek osztályozása és a kapcsolati viselkedés leírása” című fejezetben ismertetendő közelítő módszerrel.

A legtöbb keretszerkezet esetén az elsőrendű rugalmas számítás általában jó alapot szolgáltat a szerkezet egészének és a szerkezeti elemeknek a használhatósági határállapotában való vizsgálatához (a megengedett lehajlások ellenőrzéséhez). Ezen a teherszinten a nemlineáris hatások viszonylag kevésbé jelentősek.

Amikor már ismert a tervezési igénybevételek (normálerők, hajlító nyomatékok és nyíróerők) eloszlása a teljes szerkezetben, akkor a következő legfontosabb vizsgálatokat kell elvégezni:

- az altalaj és a szerkezet kölcsönhatásának ellenőrzése, illetve szükség esetén figyelembevétele;
- a másodrendű hatások ellenőrzése, illetve szükség esetén figyelembevétele;
- a szerkezeti elemeket alkotó keresztmetszetek ellenállásának ellenőrzése (teherbírasi határállapot);
- a kapcsolatok ellenállásának és osztályozási követelményeinek ellenőrzése (teherbírasi határállapot);
- instabilitási jelenségek ellenőrzése (a keret síkjában és a keret síkjára merőlegesen): oszlop kihajlása, kifordulás, a keret egészének vagy egy részének stabilitásvesztése;
- a horpadás és a koncentrált erőkkel szembeni ellenállás ellenőrzése;
- a tűzzel szembeni ellenállás ellenőrzése;
- a használhatósági határállapot követelményeinek ellenőrzése (a megengedett lehajlások, illetve szükség szerint a rezgések vizsgálata);
- a fáradással szembeni ellenállás vizsgálata.

## A.23.4.2. Másodrendű elmélet

### A.23.4.2.1. Feltételezések, megszorítások, a keresztmetszetekkel és a kapcsolatokkal szemben támasztott követelmények

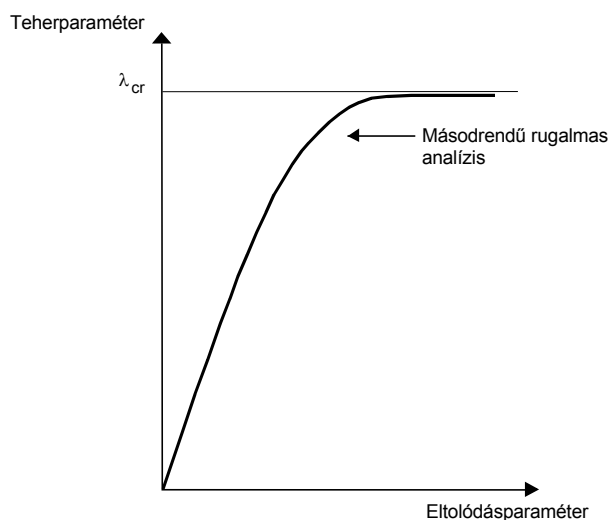
Ebben a fajta rugalmas analízisben továbbra is feltételezzük, hogy a keresztmetszetek és a kapcsolatok viselkedése korlátlanul lineárisan rugalmas (A.23.7. ábra). A belső erők eloszlását most a másodrendű elmélet alapján, az előzőekben vázolt eljárások valamelyikével számítjuk (bár azokat a kereteket, amelyek bizonyos feltételeket kielégítenek, az elsőrendű elmélet alkalmazásával és az eredmények megfelelő módosításával is számíthatjuk). Az egyensúlyi egyenleteket a szerkezet alakváltozások utáni alakjára írjuk fel ( $P-\Delta$  hatás), és szükség esetén figyelembe vesszük a szerkezeti elemek imperfekcióit, illetőleg a szerkezeti elemek normálerő hatására bekövetkező merevségcsökkenését ( $P-\delta$  hatás).

Az eljárás alkalmazásához nem szükséges semmiféle, a keresztmetszetek vagy a kapcsolatok alakváltozási képességére vonatkozó kikötés (keresztmetszeti osztály, kapcsolat szívóssági osztálya). Az azonban, hogy végül milyen keresztmetszeti osztályt alkalmazunk, függ attól, hogy milyen módszerrel kívánjuk ellenőrizni a keresztmetszet ellenállását (milyen tönkremeneteli feltételt alkalmazunk).

Az elsőrendű rugalmas analízissel ellentétben, ha szigorúan vesszük, másodrendű rugalmas analízis esetén nem használható a szuperpozíció elve, tehát az egyes teheresetekből meghatározott eredmények nem adhatók össze. Emiatt az analízist teherkombinációként kell elvégezni.

### 4.2.2. A keret analízise

A A.23.9. ábra egy olyan másodrendű rugalmas analízis eredményéül kapott teher–eltolódás görbét ábrázol, amelynek során az összes terhet monoton módon növeltük, egy adott tehereszoró növelésével (egyparaméteres teher). A geometriai nemlinearitást is tartalmazó teher–eltolódás görbe aszimptotikusan tart egy vízszintes egyeneshez, amelyhez a tehereszoró (teherparaméter)  $\lambda_{cr}$  értéke tartozik. Ez a  $\lambda_{cr}$  érték a keret adott teherkombinációhoz tartozó rugalmas kritikus terhét adja meg.



A.23.9. ábra: Teher–eltolódás görbe másodrendű rugalmas analízis esetén

Ha az analízis során a  $P-\delta$  hatást nem vesszük figyelembe, akkor előfordulhat, hogy a számított kritikus teher nagyobb a ténylegesnél. Ne feledjük, hogy minél karcsúbb egy nyomott elem, annál jelentősebb a  $P-\delta$  hatás.

A rugalmas kritikus teher lényeges viszonyítási érték, hiszen ez az a legnagyobb elméleti teherérték, amelynek a keret képes ellenállni abban az esetben, ha a keret anyagában nem következik be folyás. Ha folyás is bekövetkezik, mint a gyakorlati esetek egy jelentős részében, akkor a ténylegesen elérhető legnagyobb teher kisebbé válik, éspedig általában jelentős mértékben kisebbé, mint a rugalmas kritikus teher.

### **A.23.4.2.3. A keret tervezése**

Az elsőrendű rugalmas analízissel ellentétben a másodrendű analízis olyan elemvégi igénybevételeket szolgáltat, amelyek már tartalmazzák a másodrendű hatásokat, ezért ezekkel külön nem kell foglalkozni.

A másodrendű rugalmas analízis eredményeképpen megkapható a keret rugalmas kritikus terhe is, de csak akkor, ha a tehersorzót kellő mértékben növeljük. Ha azonban a keretet úgy tervezzük, hogy mindvégig a rugalmas tartományban maradjon, akkor nem szükséges a keret síkbeli stabilitását megvizsgálni. Továbbá, mivel a  $P-\delta$  hatás általában nem jelentős, a szerkezeti elemek keretsíkba eső stabilitását sem kell vizsgálni. Ha íves tengelyű vagy igen karcsú szerkezeti elemeket alkalmazunk, a szerkezeti elemek imperfekcióit és a  $P-\delta$  hatást figyelembe kell venni az analízis során. Ebben az esetben azonban, ha csak a szerkezeti elemeket nem elegendő számú számítási rúdmodellre bontva vesszük figyelembe ahhoz, hogy hosszuk mentén megkapjuk az igénybevételek értékét, tanácsos elvégezni a szerkezeti elemek keretsíkban érvényes stabilitásvizsgálatát.

Az elvégzendő vizsgálatok általánosságban megegyeznek az elsőrendű elmélet kapcsán felsoroltakkal, azzal az eltéréssel, hogy másodrendű analízis esetén bizonyos stabilitásvizsgálatok elhagyhatók.

## **A.23.5. A képlékeny globális analízis módszerei**

### **A.23.5.1. Bevezetés**

Mint korábban láttuk, képlékeny analízist csak akkor szabad végezni, ha az acélanyag, a szerkezeti elemeket alkotó keresztmetszetek és a kapcsolatok teljesítenek bizonyos minimális alakváltozási követelményeket, továbbá a képlékeny csuklók helyén alkalmas oldalirányú megtámasztásokat alkalmazunk. Ezekre a követelményekre azért van szükség, hogy a keresztmetszetek és a kapcsolatok, legalábbis ott, ahol képlékeny csuklók alakulhatnak ki, megfelelő elfordulási képességgel rendelkezzenek, és a szerkezetben az összes képlékeny csukló ki tudjon alakulni.

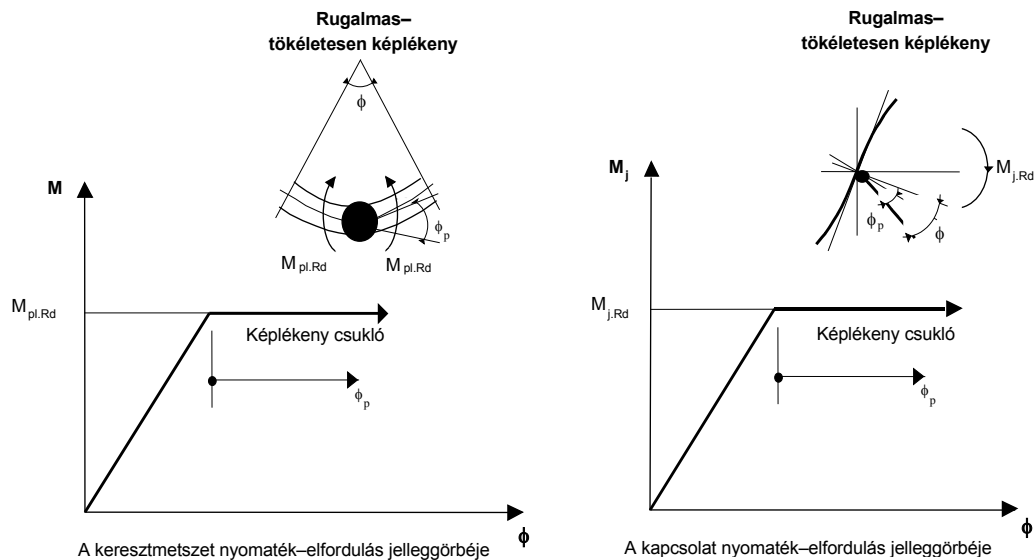
### **A.23.5.2. Rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis (másodrendű elmélet)**

#### **A.23.5.2.1. Feltételezések, megszorítások, a keresztmetszetekkel és a kapcsolatokkal szemben támasztott követelmények**

A rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis során feltételezzük, hogy valamennyi keresztmetszet, illetve kapcsolat mindaddig rugalmas állapotban marad, amíg benne a nyomaték el nem éri a képlékeny nyomatéki ellenállás értékét; ezen a ponton azután ideálisan képlékeny állapotba kerül. Feltételezzük továbbá, hogy a képlékeny alakváltozások a képlékeny csuklók helyére koncentrálnak, amelyekről viszont azt tételezzük fel, hogy korlátlan elfordulási képességgel rendelkeznek. Azt általában utólag kell ellenőrizni, hogy a tényleges elfordulási képességek kellően nagyok-e.

A *A.23.10. ábra* egy keresztmetszet és egy kapcsolat rugalmas–tökéletesen képlékeny viselkedését szemlélteti. A normálerőknek, illetve a nyíróerőknek a keresztmetszetek képlékeny nyomatéki ellenállására gyakorolt hatását vagy közvetlenül vesszük figyelembe, vagy a tervezés során ellenőrizzük. (Megjegyzés: a képlékeny csuklóban a nyomatéki ellenállás  $M_{pl,Rd}$  tervezési értékének megfelelő nyomatékot tételezhetünk fel.

A fenti feltételezések alapján meghatározható a keret teher–eltolódás görbéje. Ugyancsak kiszámítható az egyes képlékeny csuklóban a képlékeny elfordulások nagysága, amelynek alapján aztán ellenőrizhető, hogy rendelkezésre áll a szükséges elfordulási képesség.



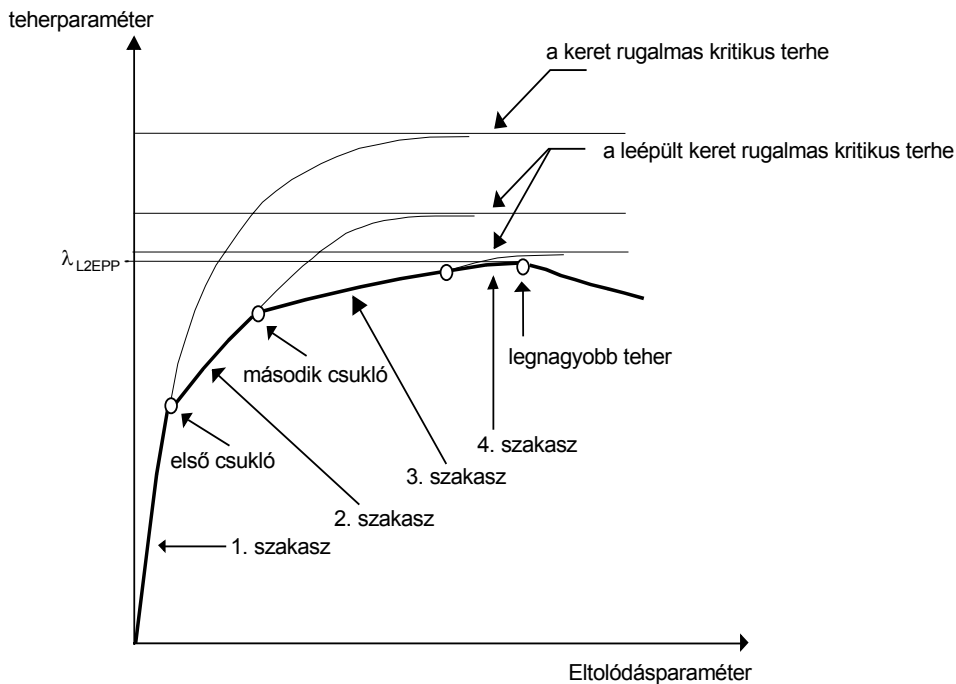
A.23.10. ábra: A keresztmetszetek és a kapcsolatok viselkedése

#### A.23.5.2.2. A keret analízise és tervezése

A következőkben a hagyományos sorrend szerint ismertetjük a másodrendű rugalmas-tökéletesen képlékeny analízis különböző lépéseit, azzal a szokásos feltételezéssel, hogy a teher teherlépcsők szerint növekszik. A könnyebb áttekinthetőség kedvéért azt is feltételezzük, hogy a képlékeny csuklók egymás után alakulnak ki, bár elvileg elképzelhető, hogy két vagy még több képlékeny csukló egyszerre alakul ki.

A számítás kiindulópontja a rugalmas másodrendű elméletből meghatározott elmozdulások rendszere (a A.23.11. ábra 1. görbeszakasza). Első lépésben a teher minden egyes növelésekor megfigyeljük, mekkora hajlító nyomatékok alakulnak ki a szerkezetben. Akkor állunk meg, amikor kialakul egy képlékeny csukló, vagyis annál a teherszintnél, amely mellett valamely keresztmetszetben vagy kapcsolatban a nyomaték eléri a képlékeny nyomatéki ellenállás értékét. A következő szakaszban ismét másodrendű rugalmas analízist végzünk, a terhek további növelésével, de a keret viselkedése ekkor az előző lépéstől eltérő, mert az elsőként megjelent képlékeny csukló helyén „rendes” csuklós kapcsolatot tételezünk fel (a A.23.11. ábra 2. görbeszakasza). A képlékeny csukló feltételezéseink szerint nyilvánvalóan nem tud további nyomatékot felvenni, ugyanakkor a szükséges elfordulások kialakulásához megfelelő elfordulási képességgel kell rendelkeznie. A képlékeny csukló helyén elképzelt „rendes” csukló csak a teher további növelése esetén viselkedik csuklóként, ugyanakkor továbbra is viseli a képlékeny nyomatéki ellenállásnak megfelelő nyomatékot. Azt is mondhatjuk, hogy az ily módon módosított keret „leépült”. A teher további növelésével elérkezünk a következő képlékeny csukló kialakulásához, majd a folyamat ismétlődik.

A A.23.11. ábrán vastag vonallal jelzett görbe ábrázolja a másodrendű rugalmas-tökéletesen képlékeny analízis eredményét. Az 1. görbeszakasz a teljes mértékben rugalmas kerethez tartozik. Ez a görbe csak akkor tart aszimptotikusan a keret rugalmas kritikus terhéhez, ha korlátlanul rugalmas viselkedést tételezünk fel. Kialakul azonban az első képlékeny csukló, és a teher további növelésének hatására a keret úgy viselkedik, mintha lenne benne egy csukló (2. görbeszakasz), egészen addig, amíg egy második csukló is ki nem alakul. Ha az első képlékeny csukló kialakulása után korlátlanul rugalmas viselkedést tételezünk fel, a 2. görbeszakasz folytatódik, és aszimptotikusan tart a „leépült” keret, azaz az első képlékeny csukló helyén „rendes” csuklóval ellátott keret kritikus terhéhez. Ez a folyamat folytatódik újabb képlékeny csuklók kialakulásával (és a megfelelő „rendes” csuklók feltételezésével) mindaddig, amíg a szerkezet instabillá nem válik (mechanizmus kialakulása vagy a keret stabilitásvesztése következtében). A másodrendű rugalmas-képlékeny analízissel számított legnagyobb teher éppen ehhez a teherszinthez tartozik, amelyet a A.23.11. ábrán a  $\lambda_{L2EPP}$  teherparaméter jelöl.



A.23.11. ábra: Teher–eltolódás görbe másodrendű rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis esetén

Ha a normálerők, illetve a nyíróerők keresztmetszeti ellenállásra gyakorolt hatását figyelembe vettük, akkor nem szükséges a keresztmetszetek és a kapcsolatok ellenállását külön ellenőrizni. Ha kiszámítjuk a képlékeny csuklóknak bekövetkező elfordulásokat, akkor tudjuk ellenőrizni, hogy rendelkezésre áll-e a megfelelő elfordulási képesség azokon a helyeken, ahol a képlékeny csuklók kialakultak.

A másodrendű analízis szükségtelenné teszi a keret saját síkjában bekövetkező stabilitásvesztésének vizsgálatát. Továbbá ilyenkor a szerkezeti elemek keretsíkban való stabilitását sem kell vizsgálni, amennyiben a szerkezeti elemek imperfekcióit szükség szerint figyelembe vettük az analízis során (de lásd a másodrendű rugalmas analízisen alapuló tervezés kapcsán tett megjegyzést).

Nyilvánvaló, hogy a rugalmas (elsőrendű vagy másodrendű) elmélethez képest jelentősen csökkent az elvégzendő ellenőrzések száma.

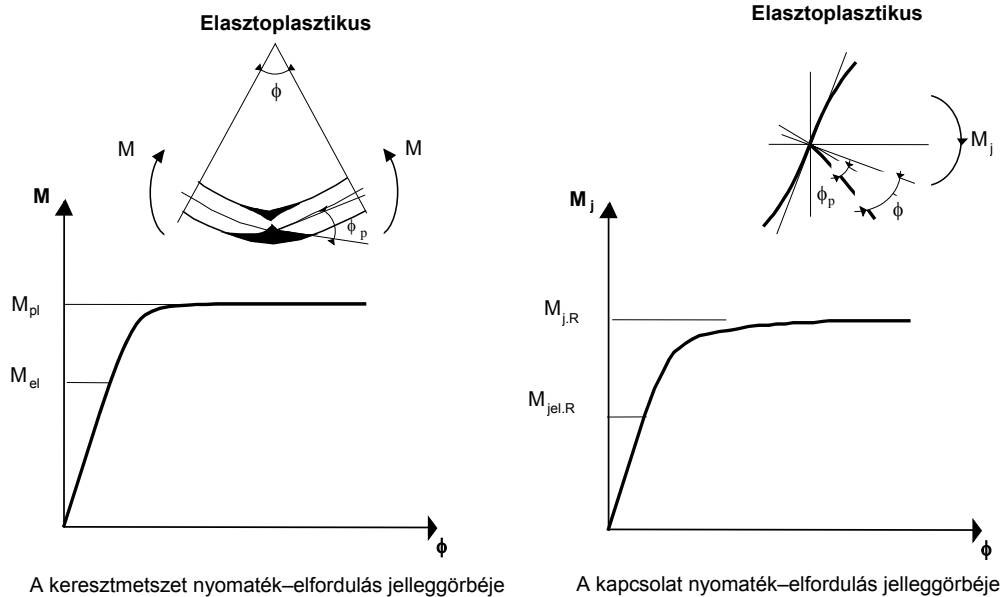
### A.23.5.3. Elasztó-plasztikus analízis (másodrendű elmélet)

#### **A.23.5.3.1. Feltételezések, megszorítások, a keresztmetszetekkel és a kapcsolatokkal szemben támasztott követelmények**

A másodrendű elasztó-plasztikus analízis segítségével jobb becslést kapunk a szerkezet viselkedésére (például az elsőrendű, vagy akár a másodrendű rugalmas–tökéletesen képlékeny analízisből kapott eredményhez képest)

A szerkezeti elemek és a kapcsolatok fokozatosan kerülnek képlékeny állapotba, ennek megfelelően a rugalmas állapotból a képlékeny állapotba való átmenet is fokozatosan következik be. A folyás megindulása után a szerkezeti elem keresztmetszetében érvényes hajlító nyomaték további növelésével párhuzamosan a képlékeny zóna kiterjed egyrészt a szerkezeti elem hossza, másrészt pedig a keresztmetszet magassága mentén. Az elméletet, amely ezt figyelembe veszi, a képlékeny zónák elméletének hívjuk [8, 10].

A A.23.12. ábra bemutatja a szerkezeti elemeknek és a kapcsolatoknak az elasztó-plasztikus analízis során általában feltételezett nyomaték–elfordulás jelleggörbéjét. Ezek a modellek nem tartalmazzák a felkeményedés és a kapcsolatokban fellépő membránszerű viselkedés kedvező hatásait.



A.23.12. ábra: A szerkezeti elem és a kapcsolat nyomaték–elfordulás jelleggörbéje

A szerkezeti elemek és a kapcsolatok alakváltozási képességével szemben támasztott követelmények, továbbá az analízis és az ellenőrzés lépései megegyeznek a másodrendű rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis kapcsán megfogalmazottakkal.

Tekintettel arra, hogy túlságosan bonyolult eljárásról van szó, az elasztó-plasztikus analízist a gyakorlati tervezésben nem alkalmazzák; felhasználása számítógépes kutatási feladatokra korlátozódik.

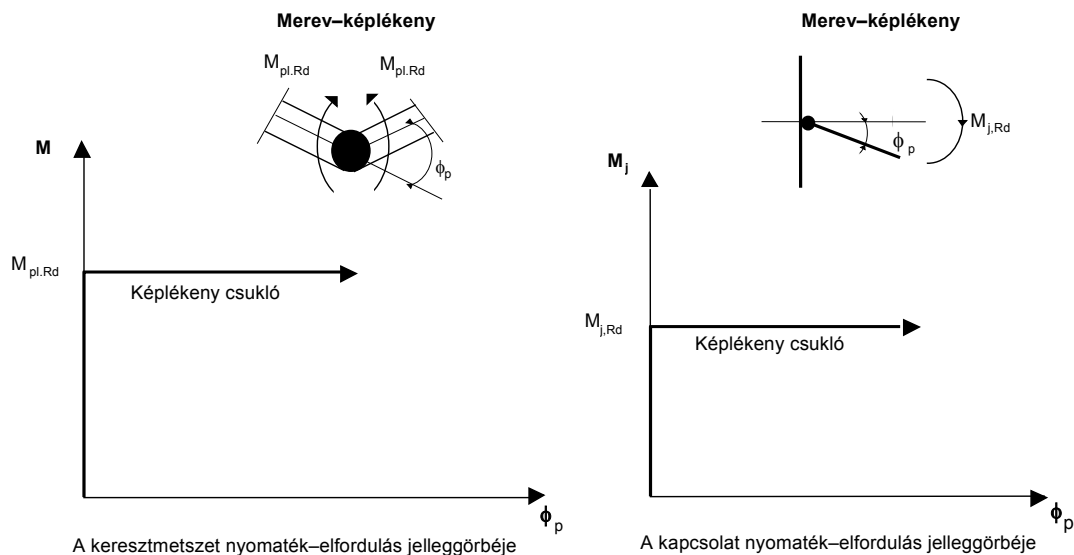
#### A.23.5.4. Merev–képlékeny analízis (elsőrendű elmélet)

##### **A.23.5.4.1. Feltételezések, megszorítások, a keresztmetszetekkel és a kapcsolatokkal szemben támasztott követelmények**

Szemben az elasztó-plasztikus analízissel, a merev–képlékeny analízis során a képlékeny alakváltozásokhoz képest elenyésző mértékű rugalmas alakváltozásokat (a szerkezeti elemek, a kapcsolatok, az alapozás rugalmas alakváltozásait) elhanyagoljuk. Hasonlóan a rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis esetéhez, a képlékeny alakváltozásokról feltételezzük, hogy azokban a keresztmetszetekben és kapcsolatokban koncentrálnak, amelyekben a képlékeny csuklók kialakulását várjuk. Feltételezzük továbbá, hogy ezek a keresztmetszetek és kapcsolatok végtelen nagy elfordulási képességgel rendelkeznek.

A *A.23.13. ábrán* látható a keresztmetszeteknek a merev–képlékeny analízis során feltételezett idealizált merev–képlékeny viselkedése. A feltételezésekből következik, hogy a merev–képlékeny analízis során paraméterként csak a keresztmetszetek és a kapcsolatok nyomatéki ellenállását, a szerkezet elrendezését és a terheket kell figyelembe venni.

A szerkezeti elemek és a kapcsolatok alakváltozási képességével szemben támasztott követelmények megegyeznek a másodrendű rugalmas–tökéletesen képlékeny analízis kapcsán megfogalmazottakkal. Az elsőrendű merev–képlékeny analízis alapján végrehajtott tervezés esetén betartandó minimális követelményekkel kapcsolatban hasznos információkat tartalmaz a [9] irodalom. A merev–képlékeny eljárások általában nem alkalmasak a másodrendű analízisben való felhasználásra.



A.23.13. ábra: A szerkezeti elemek és a kapcsolatok nyomaték–elfordulás jelleggörbéje

#### A.23.5.4.2. A keret analízise

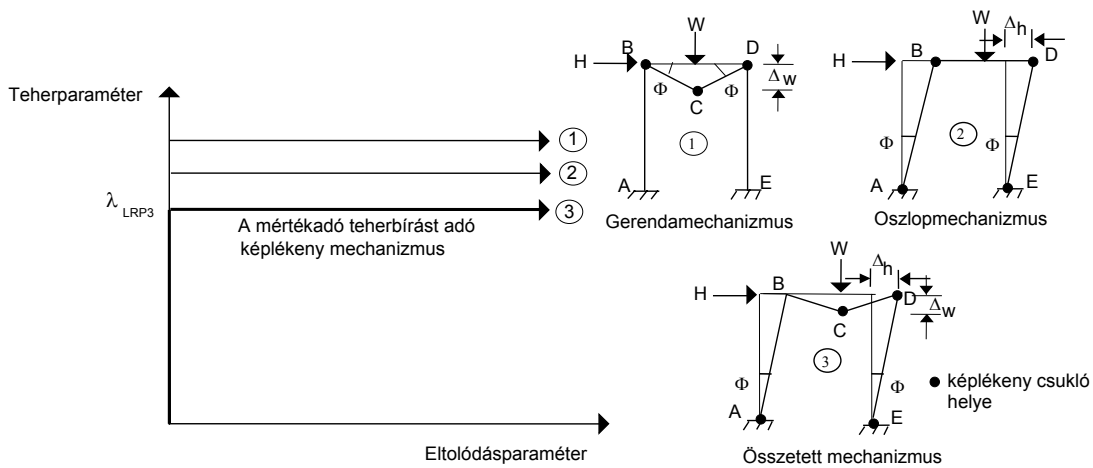
Abból a megfontolásból, hogy az a legnagyobb teher, amelyet egy adott szerkezet képes viselni, megegyezik azzal a teherrel, amelynél a teljes szerkezet tönkremenetele a képlékeny mechanizmus kialakulásának hatására bekövetkezik, a merev–képlékeny analízis tulajdonképpen a mértékadó képlékeny mechanizmus megkeresését jelenti.

A legnagyobb teher (vagyis a szerkezet tönkremeneteléhez tartozó teher) az egyszerű képlékeny tervezés alaptételeinek közvetlen alkalmazásával határozható meg. Ezek az alaptételek a teherbírás alsó és felső korlátjára vonatkoznak, és **statikai tételnek**, illetve **kinematikai tételnek** nevezzük őket. Egy harmadik tétel, az **egyértelműségi tétel** pedig azt mondja ki, hogy ha a statikai tétel és a kinematikai tétel kiindulási feltételezéseit egy mechanizmus egy adott teheresetre vonatkozóan egyaránt kielégíti, akkor az ehhez tartozó teher egyben a tönkremenetelhez tartozó terhet is jelenti [11].

A következőkben összefoglalunk egy olyan eljárást, amely alkalmas a kinematikai tétel kézi alkalmazására. A tétel szerint adott szerkezet és teherrendezés esetén bármely tetszőlegesen felvett képlékeny mechanizmushoz tartozó teherparaméter legalább akkora, mint a tönkremenetelhez tartozó teherparaméter. A különböző lehetséges mechanizmusok vizsgálatával kikeressük azt, amelyhez a legkisebb teherparaméter tartozik, és kimutatjuk róla, hogy statikailag lehetséges és szilárdságilag elérhető.

Az egyes mechanizmusokhoz tartozó teherparamétert a virtuális munkák tételéből lehet meghatározni, vagyis abból a feltételből, hogy a mechanizmus kialakulása során elvégzett külső munkák és belső munkák egyenlőek.

A A.23.14. ábrán látható egy egyszerű portálkeret „1.” és „2.” jelű egyszerű, valamint „3.” jelű összetett mechanizmusa.



A.23.14. ábra: Teher-eltolódás viselkedések a merev-képlékeny analízis szerint

A A.23.14. ábrán látható egyszerű keret tervezési egyenleteinek felírásához a következő feltételezéseket tesszük.

- A gerenda középső keresztmetszetében működő függőleges teher  $W_{sd}$  tervezési értékének, illetve a keretsaroknál működő vízszintes teher  $H_{sd}$  tervezési értékének egymáshoz viszonyított arányát a teherkombinációk meghatározása során rögzítettük.
- A  $h$  magasságú AB és DE oszlopok keresztmetszetének tervezési ellenállása megegyezik.
- Az A és az E csomópontokban lévő kapcsolatok tervezési ellenállása megegyezik.
- A B és a D csomópontokban lévő kapcsolatok tervezési ellenállása megegyezik.
- Az A és az E pontban érvényes tervezési nyomatéki ellenállás, amelyet a továbbiakban  $M_{pl,Rd,1}$ -gyel jelölünk, az oszlopkeresztmetszet és a kapcsolat nyomatéki ellenállása közül a kisebbikkel egyezik meg.
- A B és a D pontban érvényes tervezési nyomatéki ellenállás, amelyet a továbbiakban  $M_{pl,Rd,2}$ -vel jelölünk, az oszlopkeresztmetszet, a gerenda-keresztmetszet és a kapcsolat nyomatéki ellenállása közül a legkisebbikkel egyezik meg.
- A C pontban érvényes tervezési nyomatéki ellenállás, amelyet a továbbiakban  $M_{pl,Rd,3}$ -mal jelölünk, az  $L$  hosszúságú gerenda keresztmetszetének nyomatéki ellenállásával egyezik meg.
- Az egyes keresztmetszetekben és kapcsolatokban a pozitív és a negatív nyomatékokra vonatkozó ellenállások megegyeznek.

Az egyes mechanizmusokhoz tartozó egyenleteket ezek után a virtuális munkák tételének alkalmazásával írjuk fel.

### 1. mechanizmus:

$$W_{Rd,1} \Delta_{w1} = 2M_{pl,Rd,2} \phi_1 + 2M_{pl,Rd,3} \phi_1 ;$$

mivel  $\Delta_{w1} = (\phi_1)L / 2$ , a következőt kapjuk:

$$W_{Rd,1} = \frac{4(M_{pl,Rd,2} + M_{pl,Rd,3})}{L},$$

amelyből  $\lambda_{LRP1} = W_{Rd,1} / W_{sd}$  adódik, amelynek legalább 1-nek kell lennie.



## 2. mechanizmus:

$$H_{Rd,2}\Delta_{h2} = 2M_{pl,Rd,1}\phi_2 + 2M_{pl,Rd,2}\phi_2;$$

mivel  $\Delta_{h2} = (\phi_2)h$  , a következőt kapjuk:

$$H_{Rd,2} = \frac{2(M_{pl,Rd,1} + M_{pl,Rd,2})}{h},$$

amelyből  $\lambda_{LRP2} = H_{Rd,2} / H_{Sd} = W_{Rd,2} / W_{Sd}$  adódik, amelynek legalább 1-nek kell lennie.

## 3. mechanizmus:

$$H_{Rd,3}\Delta_{h3} + W_{Rd,3}\Delta_{w3} = 2M_{pl,Rd,1}\phi_3 + 2M_{pl,Rd,2}\phi_3 + 2M_{pl,Rd,3}\phi_3;$$

mivel  $\Delta_{h3} = (\phi_3)h$  és  $\Delta_{w3} = (\phi_3)L/2$  , a következőt kapjuk:

$$H_{Rd,3} + W_{Rd,3}(L/2h) = H_{Rd,3}[1 + \alpha(L/2h)] = \frac{2(M_{pl,Rd,1} + M_{pl,Rd,2} + M_{pl,Rd,3})}{h},$$

amelyből  $\lambda_{LRP3} = H_{Rd,3} / H_{Sd} = W_{Rd,3} / W_{Sd}$  adódik, amelynek legalább 1-nek kell lennie.–

Valamennyi teher–eltolódás görbe egyetlen vízszintes egyenesből áll, amelynek ordinátája az adott mechanizmushoz tartozó teherparaméterrel egyezik meg. A kinematikai tétellel összhangban minket a görbék közül a legelső érdekel, amelyről jelen esetben feltételezzük, hogy a 3. mechanizmushoz tartozik. Ez tehát azt jelenti, hogy a tönkremenetelhez tartozó, a merev–képlékeny analízis által szolgáltatott teherparaméter a 14. ábrán jelölt  $\lambda_{LRP3}$ -mal egyezik meg.

Az egyszerű, egymásra merőleges oszlopokkal és gerendákkal kialakított keretszerkezetek esetén a merev–képlékeny módszer alkalmazása többnyire nem okoz különösebb nehézséget. A többszintes, illetve a többhajtós keretekkel azonban, ahol külön figyelni kell azokra a képlékeny csuklókra, amelyek a terhelés folyamata során kialakulnak, majd tehermentesülnek (tehát a végső tönkremeneteli mechanizmusban nem szerepelnek), általában csak számítógép segítségével boldogulunk. Ilyenkor figyelembe kell venni a **részleges tönkremeneteli mechanizmusok** kialakulásának lehetőségét is, valamint azt, hogy előfordulhat, hogy két vagy több mechanizmushoz ugyanakkora teherparaméter-érték tartozik. Ilyenkor a ténylegesen kialakuló mechanizmus e kettő (vagy több) kombinációja lesz, amelyet a szakirodalom **túlhatározott mechanizmusnak** nevez. A 14. ábra kapcsán például nem foglalkoztunk a túlhatározott mechanizmusok kialakulásának lehetőségével, amelyek egy adott szerkezetben csak meghatározott teherarányok mellett alakulnak ki [11].

A legtöbb szokványos kialakítású keret vizsgálata során elegendő csak a teljes (ezekre példa a A.23.14. ábra 2. és 3. mechanizmusa) és a részleges (ezekre példa a A.23.14. ábra 1. mechanizmusa) mechanizmusokkal foglalkozni. A teljes mechanizmus esetén a tönkremenetel pillanatában a keret egészében mindig statikailag határozott. Ha egy keret  $r$ -szeresen statikailag határozatlan, akkor a teljes képlékeny mechanizmusban  $r + 1$  képlékeny csukló szerepel. A részleges mechanizmusokban ennél az értéknél kevesebb, a túlhatározott mechanizmusokban ennél több képlékeny csukló van. A szerkezet összes lehetséges független teljes mechanizmusainak száma  $h - r$ , ahol  $h$  a képlékeny csuklók lehetséges helyeinek száma.

A ferde gerendájú egyszintes portálkeretek vizsgálata is elvégezhető az előzőekben ismertetett eljárással, bár kézi számítás esetén egy részben grafikus, „próbálgatásos” módszert is elterjedten alkalmaznak [11]. Ez utóbbi eljárásban egy feltételezett teljes mechanizmus teljes statikai analízisét hajtjuk végre (azaz alkalmazzuk a kinematikai tételt). Ekkor a teljes keret statikailag határozott, rá a tönkremenetelhez tartozó teherparaméter működik, és a képlékeny csuklók feltételezett helyén a hajlító nyomaték megegyezik az adott hely tervezési

képlékeny nyomatéki ellenállásával. A teljes keretre meghatározott nyomatéki ábra alapján ekkor ellenőrizzük, hogy a nyomaték sehol sem haladja meg a képlékeny nyomatéki ellenállás értékét (azaz alkalmazzuk a statikai tételt). Ha ez fennáll, akkor az egyértelműségi tétel alapján megtaláltuk a tönkremenetelhez tartozó teherparamétert. Ha nem, akkor másik teljes mechanizmusokat kell megvizsgálni egészen addig, amíg meg nem találjuk a helyes tönkremeneteli mechanizmust. A szokásos kialakítású egyszintes, ferde gerendájú portálkeretek méretezése speciális grafikonok alapján is elvégezhető [12]. Az ilyen keretek általában kétcsuklós kialakításban készülnek, és az oszlop–gerenda kapcsolatnál kiékelés alkalmazásával megakadályozzuk a képlékeny csukló kialakulását.

#### **A.23.5.4.3. A keret tervezése**

A merev–képlékeny analízis közvetlenül megadja a keret tervezési ellenállását. A vizsgált szerkezet akkor megfelelő, ha a mértékadó mechanizmushoz tartozó teherparaméter legalább egységnyi. A keret síkjában érvényes stabilitásvesztés megakadályozása és a másodrendű hatások figyelembevétele miatt szükséges lehet, hogy a teherparaméter értékét csökkentjük (lásd a „Hagyományos és korszerű tervezési eljárások” című előadást).

El kell végezni azonban néhány további vizsgálatot is, elsősorban a keresztmetszetekre és a kapcsolatokra vonatkozóan, hiszen előfordulhat, hogy a normálerőknek, illetve a nyíróerőknek a tervezési nyomatéki ellenállásra gyakorolt hatása nem hanyagolható el. Mivel a módszer alkalmazása során feltételezzük, hogy a képlékeny csuklók helyén az elfordulások végtelen nagyok, és szükséges értéküket nem határozzuk meg, olyan keresztmetszeteket (illetve adott esetben kapcsolatokat) kell választani, amelyek kellően nagy elfordulási képességgel rendelkeznek.

Ez az analízis nem ad iránymutatást arra nézve, hogy a tartószerkezetben a terhek hatására mekkora alakváltozások következnek be. Ezért általában kiegészítésként el kell végezni egy rugalmas analízist is a használhatósági határállapotban érvényes teherszintekre.

Az előzőekben elmondottaktól eltekintve a tervezés feladataiban nincs nagy eltérés a lineárisan rugalmas analízishez képest (például a stabilitásvizsgálatokat tekintve).