Acélszerkezetek II.

3. előadás

Nyomott–hajlított elemek síkbeli viselkedése

Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

Nyomott–hajlított elemeknek nevezzük azokat a szerkezeti elemeket, amelyekre egyidejű hajlítás és nyomás hat. Elvileg minden szerkezeti elem nyomott–hajlított elem, és a gerendák (N = 0), illetve az oszlopok (M = 0) csupán két szélső esetet jelentenek. Attól függően, hogy a terhek pontosan hogyan adódnak át a szerkezeti elemre, milyenek a megtámasztási viszonyok és milyen az elem keresztmetszetének alakja, a szerkezeti elem viselkedése különböző lehet.

Ezek közül a legegyszerűbb az egyik főtengely körüli tiszta hajlítás, amikor a szerkezeti elem kizárólag a nyomatéki igénybevétel síkjában kap hajlítást.

Ha egy különálló nyomott–hajlított elem alakváltozása a hajlítás síkjára korlátozódik *(1. ábra a) része)*, viselkedését a gerenda hajlítása és a nyomott elem kihajlása közötti kölcsönhatás határozza meg *(1 ábra b) része)*.

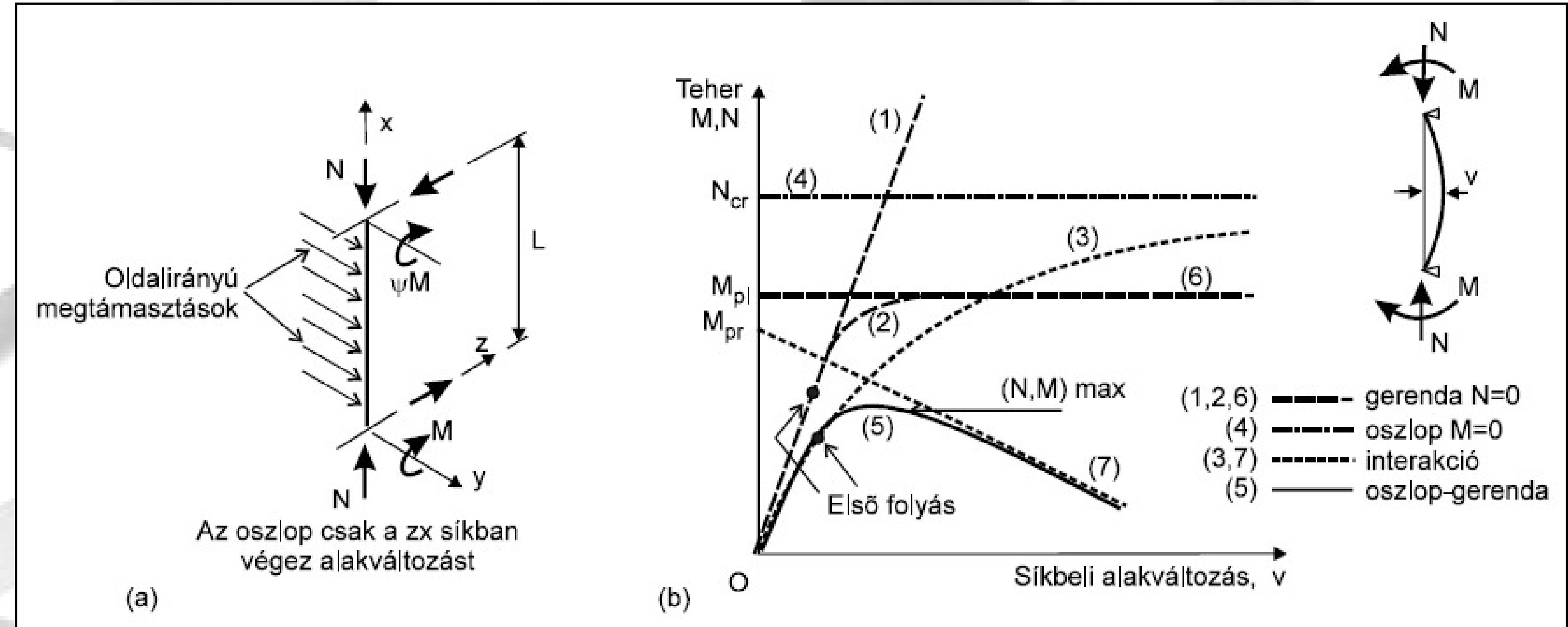
Az ábra 1. görbéje a rugalmas gerenda lineáris viselkedését mutatja, míg a 6. görbe a merev–képlékeny gerenda teljes képlékeny nyomaték *(M_{pl})* melletti viselkedését.

A 2. görbe a valóságos rugalmas–képlékeny gerendák 1. és 6. görbe közötti átmeneti viselkedését mutatja.

A központosan terhelt nyomott elemek N_{cr} rugalmas kritikus terhénél bekövetkező rugalmas kihajlást mutatja a 4. görbe.

A 3. görbe a hajlítás és a kihajlás közötti kölcsönhatást mutatja rugalmas szerkezeti elem esetén, tekintetbe véve a normálerő által okozott $N{\cdot}v$ nyomatékot.

A 7. görbe mutatja a hajlítónyomaték és normálerő közötti kölcsönhatást, amely az elem teljes képlékenyedését okozza. Ez a görbe figyelembe veszi a normálerő által a képlékeny nyomatékban okozott csökkenést (M_{pl} helyett M_{pr}), valamint az $N{\cdot}v$ többletnyomatékot is. A nyomott–hajlított elem tényleges viselkedését az 5. görbe mutatja, amely átmenetet jelent a rugalmas elemekre vonatkozó 3. görbéből a teljes képlékenyedéshez tartozó 7. görbéhez.

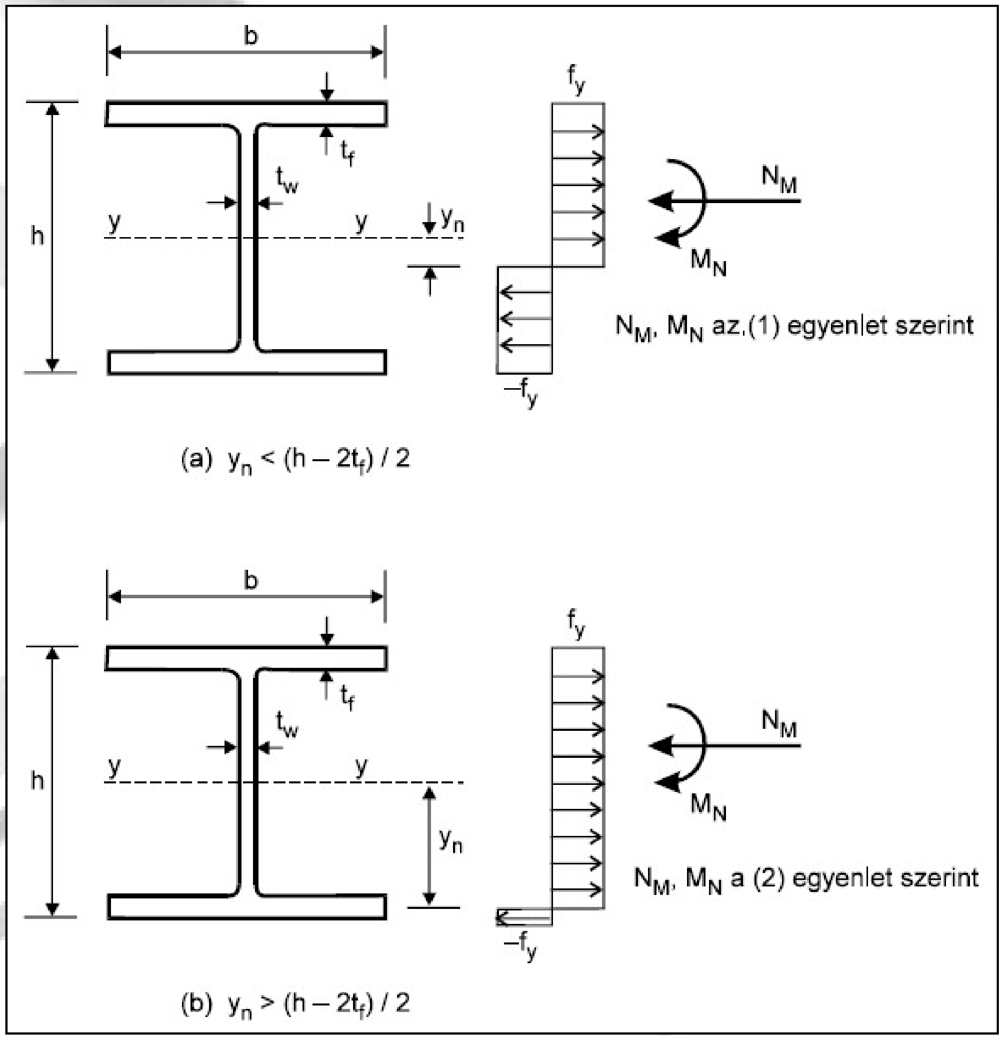


1. ábra. Nyomott–hajlított elemek síkbeli viselkedése [Iványi 2007]

1. A keresztmetszet viselkedése

1.1 Hajlítás és normálerő 1. és 2. osztályú keresztmetszetek esetén

Ha megengedjük a teljes képlékenyedés kialakulását, akkor egyidejű normálerő és hajlítónyomaték esetén a tönkremenetel feltétele az alábbi alakban adható meg. *(2. ábra)*



2. ábra. Teljes képlékenyedés normálerő és nyomaték hatására [Iványi 2007]

(a) eset: Ha $y_n \le (h - t_f)/2$, akkor a semleges tengely a gerincben van és

$$N_M = 2 \cdot f_y \cdot t_w \cdot y_n$$

$$M_N = f_y \cdot b \cdot t_f \cdot (h - t_f) + f_y \cdot \left[\left(\frac{h - 2 \cdot t_f}{2} \right)^2 - y_n^2 \right] \cdot t_w$$

(b) eset: Ha $y_n > (h - t_f)/2$, akkor a semleges tengely az övben van és

$$N_M = f_y \cdot \left[t_w \cdot (h - 2 \cdot t_f) + 2 \cdot b \cdot \left(t_f - \frac{h}{2} + y_n \right) \right]$$

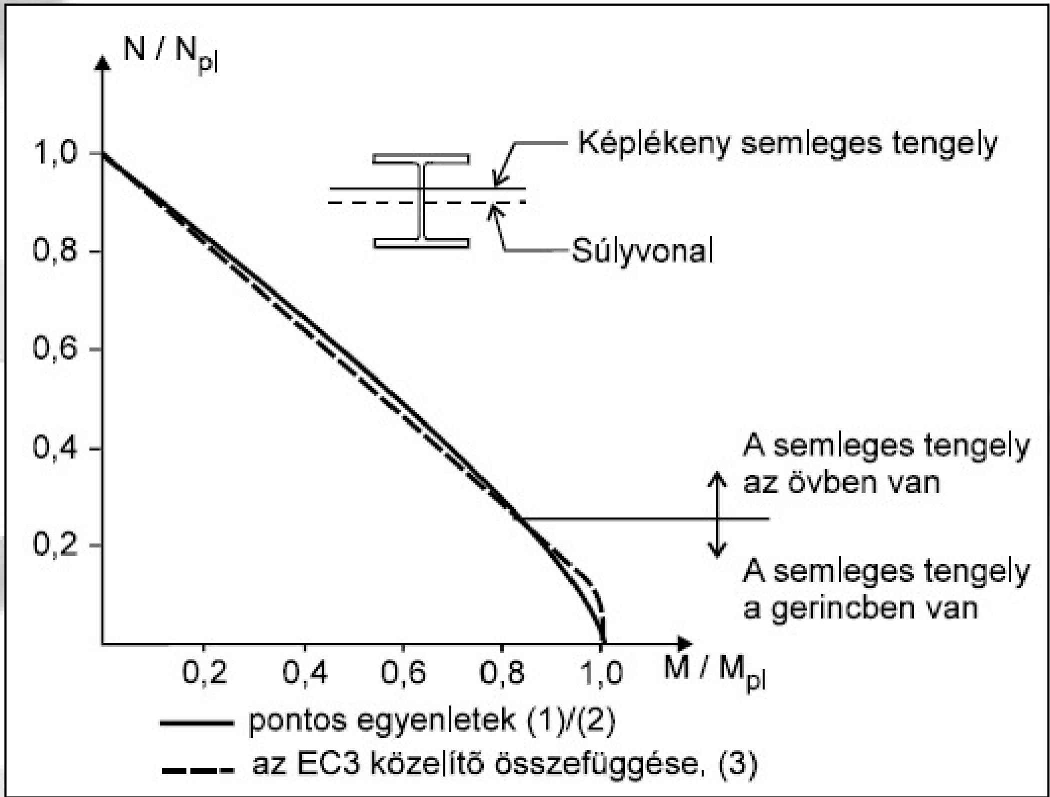
$$M_N = f_y \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_n \right) \cdot (h - y_n) \cdot t_f$$

A *3. ábra* az előző két egyenletet hasonlítja össze az Eurocode 3 által használt közelítő képletekkel:

$$M_{Ny,Rd} = \frac{M_{pl,y} \cdot (1 - n)}{(1 - 0,5 \cdot a)} \quad \text{de} \quad M_{Ny,Rd} \le M_{ply,Rd}$$

ahol: $n = N_{Sd}/N_{pl,Rd}$ a normálerő és az $f_y \cdot A$ nagyságú, teljes képlékenyedést okozó teher hányadosa;

$$a = \frac{(A - 2 \cdot b \cdot t_f)}{A} \leq 0{,}5$$



3. ábra. A teljes képlékenyedéshez tartozó kölcsönhatási görbe – HEA 450 szelvény, erős tengely körüli hajlítás [Iványi 2007]

Azokra a keresztmetszetekre, amelyekben nincsenek csavarlyukak, a *z tengely* körüli hajlítás esetén a következő közelítések alkalmazhatóak:

- ha $n \le a$

$$M_{Nz,Rd} = M_{pl,z,Rd}$$

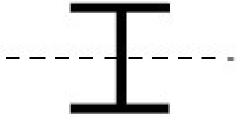
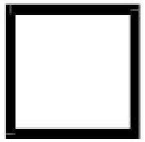
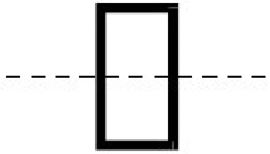
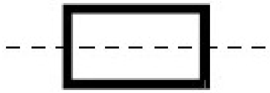
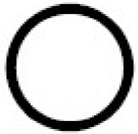
- ha $n > a$

$$M_{Nz,Rd} = M_{pl,z,Rd} \cdot \left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a}\right)^2\right]$$

ahol: $n = N_{Sd}/N_{pl,Rd}$;

$$a = \frac{(A - 2 \cdot b \cdot t_f)}{A} \le \quad \text{de} \quad a \le 0{,}5$$

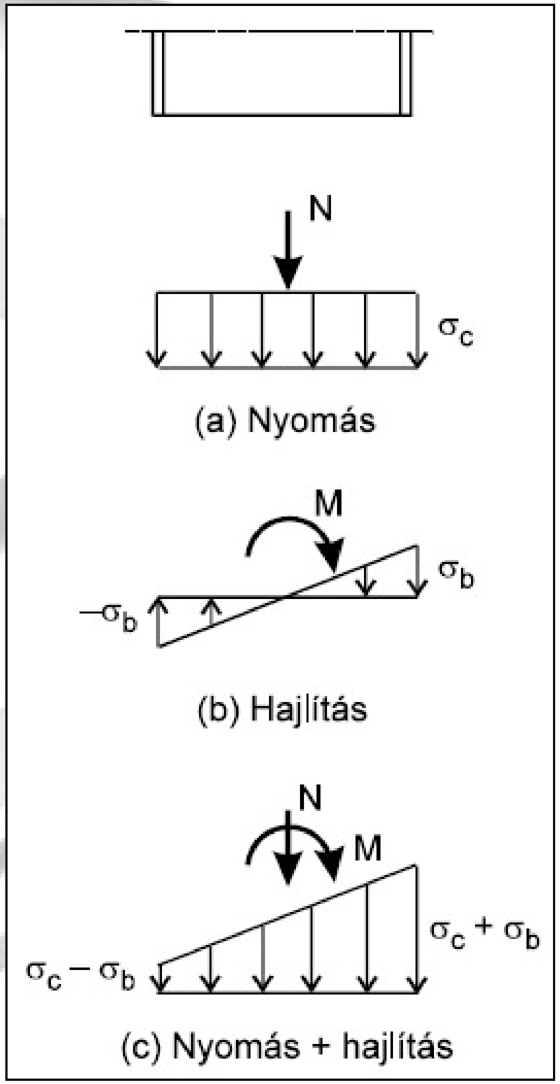
Néhány gyakori keresztmetszeti alakra további közelítő összefüggéseket az *1. táblázat* tartalmaz. M_N értéke természetesen egyik esetben sem haladhatja meg M_{pl} értéket.

Keresztmetszet	Szelvényalak	M_N képlete
Hengerelt H és I		$M_{N,y} = 1{,}11 M_{pl.y}(1-n)$
		$M_{N,z} = 1{,}56 M_{pl.z}(1-n)(0{,}6+n)$
Négyzet alakú zárt szelvény		$M_{N,y} = 1{,}26 M_{pl}(1-n)$
Téglalap alakú zárt szelvény		$M_{N,y} = 1{,}33 M_{pl.y}(1-n)$
		$M_{N,y} = M_{pl.z} \dfrac{1-n}{0{,}5+\dfrac{ht}{A}}$
Kör alakú zárt szelvény		$M_{N,y} = 1{,}04 M_{pl}(1-n^{1,7})$

1. táblázat. Az M_N redukált képlékeny nyomatéki ellenállásra vonatkozó közelítő összefüggések ($n=N_{Sd}/N_{pl,Rd}$) [Iványi 2007]

1.2 Hajlítás és normálerő 3. osztályú keresztmetszetek esetén

A *4. ábra* egy „H” szelvényű oszlop valamely keresztmetszetét mutatja, amelyben a nyomóerő és az „y” tengely körüli hajlítónyomaték a *4. a–b ábrákon* bemutatott egyenletes és változó feszültségeloszlást okozza.



4. ábra. Nyomott–hajlított keresztmetszet rugalmas viselkedése [Iványi 2007]

Rugalmas viselkedés esetén a szuperpozíció elve alkalmazható, így a két feszültségeloszlás egyszerűen összeadható *(4. ábra c. része)*. Az első folyás tehát a keresztmetszet szélső szálában alakul ki, a maximális nyomófeszültség helyén.

A feltétel így írható:

$$f_y = \sigma_c + \sigma_b$$

ahol: f_y – az anyag folyáshatár értéke;

σ_c – a normálerőből származó feszültség;

$$\sigma_c = \frac{N}{A}$$

ahol: N – normálerő;

A – keresztmetszeti felület.

σ_b – a nyomatékból származó maximális feszültség.

$$\sigma_b = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}$$

ahol: M – hajlítónyomaték;

I – az *y* tengelyre vonatkozó inercianyomaték;

h – a szelvény teljes magassága.

A 3. osztályba tartozó keresztmetszet akkor felel meg, ha a $\sigma_{x,Ed}$ maximális normálfeszültség kielégíti az alábbi feltételt:

$$\sigma_{x,Ed} \leq f_{yd}$$

ahol: $\sigma_{x,Ed}$ – maximális normálfeszültség;

$$f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma_{M0}}$$

ahol: f_{yd} – folyáshatár;

f_y – az anyag folyáshatár értéke;

γ_{M0} – parciális tényező keresztmetszeti osztályokra (értéke 1,00).

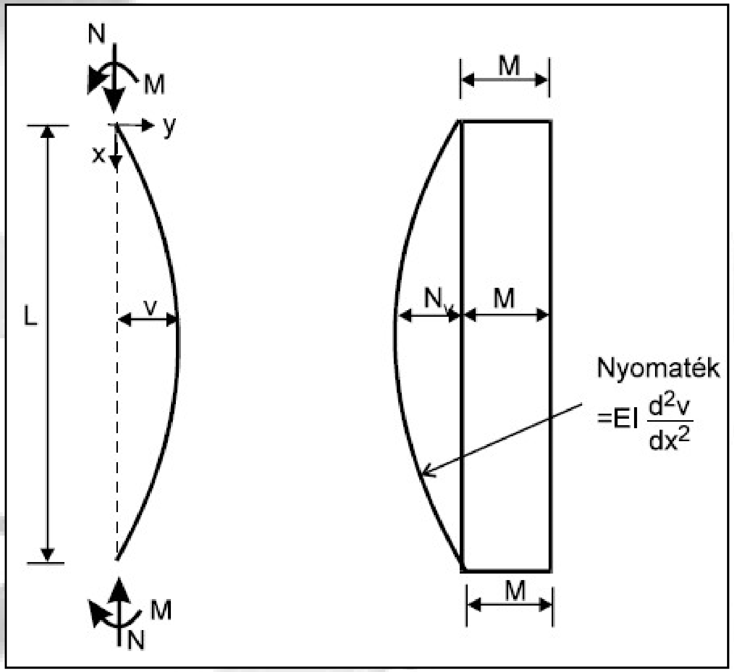
1.3 Hajlítás és normálerő 4. osztályú keresztmetszetek esetén

A 4. osztályba tartozó keresztmetszet akkor felel meg, ha a nyomott lemezelemek hatékony szélességével a számított maximális normálfeszültség kielégíti a következő feltételt:

$$\sigma_{x,Ed} \leq f_{yd}$$

2. Globális stabilitás

Az *5. ábra* a nyomott–hajlított elem oldalirányú alakváltozását mutatja egyidejű nyomás és egyenlő nagyságú, ellentétes előjelű végnyomatékok hatására.



5. ábra. Elsődleges és másodlagos hajlítónyomaték [Iványi 2007]

A hajlító nyomatéki igénybevétel az elem bármely keresztmetszetében két tag összegének tekinthető, ahol:

- az első tag az elsődleges *M* nyomatékból származik,
- a második pedig a másodlagos $N \cdot v$ nyomatékból.

A középpont legnagyobb eltolódása:

$$v_{max} = \frac{M}{N} \cdot \sec\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{P_{ey}} - 1}$$

ahol: P_{ey} – az Euler–féle kritikus teher erős tengely körüli kihajlás esetén;

$$P_{Ey} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{L^2}$$

M_{max} – a legnagyobb nyomaték érték.

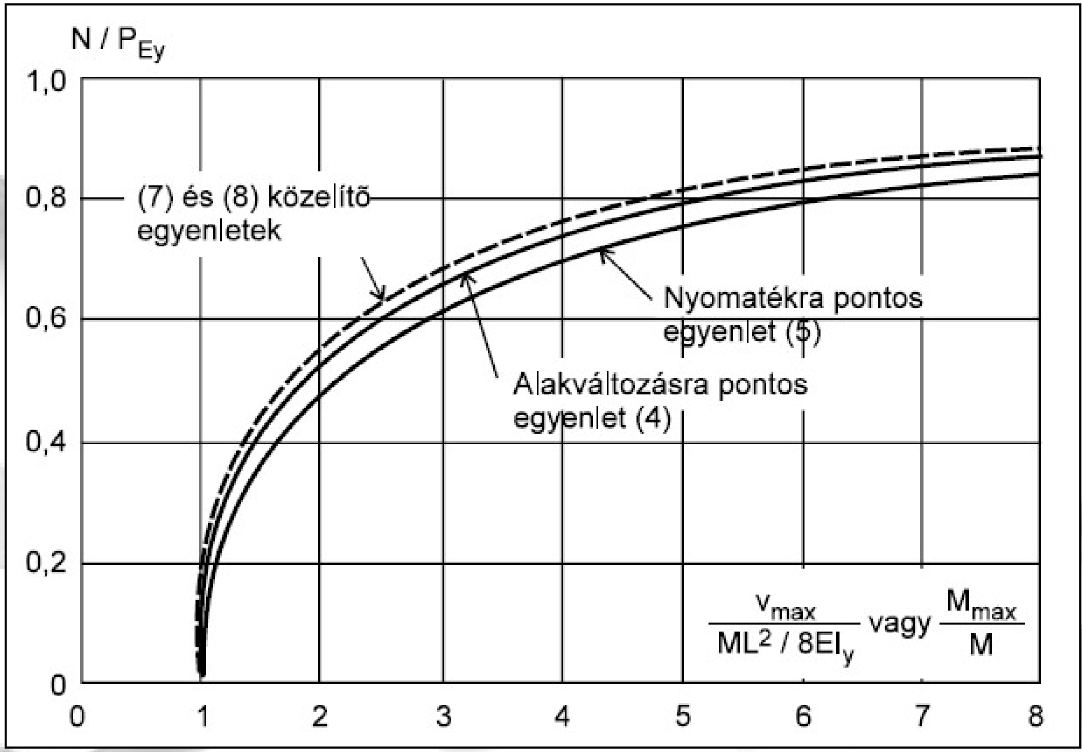
$$M_{max} = M \cdot \sec\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{N}{P_{Ey}}}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

Az *M* nyomaték előzőek szerinti szorzótényezője mindkét egyenletben helyettesíthető, hiszen mind az önállóan működő végnyomatékokból származó elsőrendű eltolódást, mind pedig a klasszikus hajlítási elméletből számítható elsőrendű *M* nyomatékot közelítőleg a következő tényezővel kell szorozni:

$$\frac{1}{1 - \frac{N}{P_{Ey}}}$$

Ezt mutatja a *6. ábra:*



6. ábra. Egyenlő végnyomatékkal terhelt nyomott–hajlított elemek maximális eltolódása és nyomatéka [Iványi 2007]

Ekkor:

$$V_{max} = \frac{M \cdot L^2}{8 \cdot E \cdot I_y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{P_{Ey}}}$$

$$M_{max} = M \cdot \frac{1}{1 - \frac{N}{P_{Ey}}}$$

Mivel a maximális rugalmas feszültség:

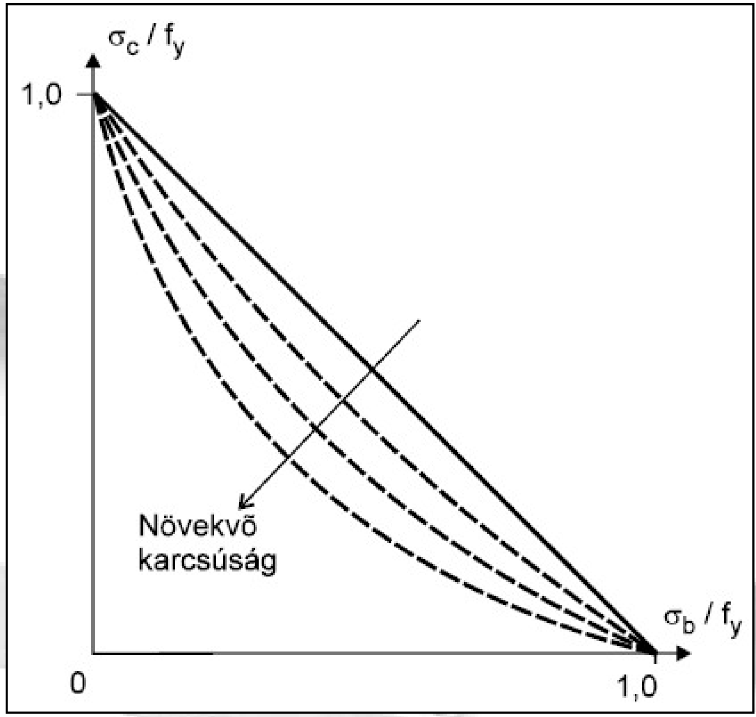
$$\sigma_{max} = \sigma_c + \sigma_b \cdot \frac{M_{max}}{M}$$

így

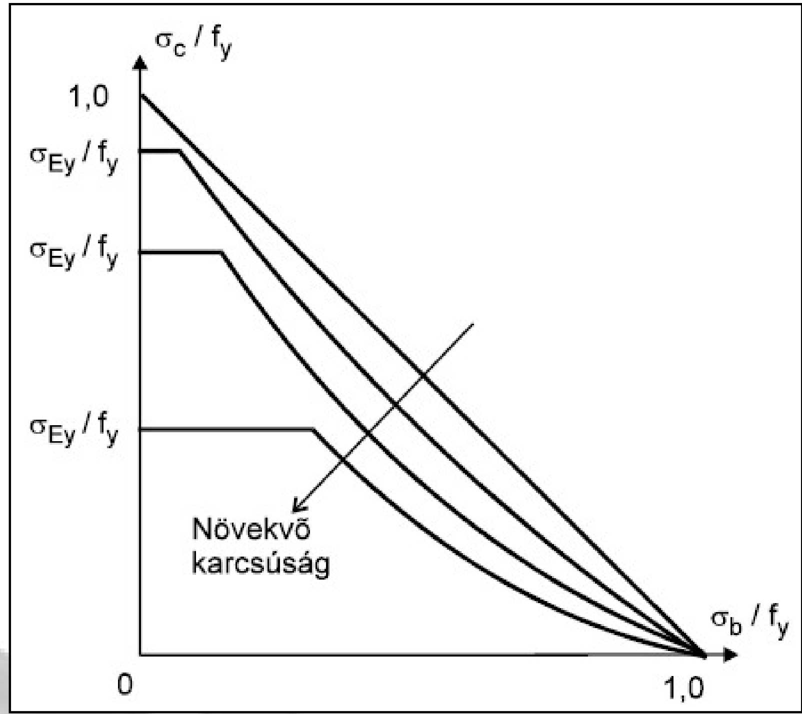
$$\frac{\sigma_c}{f_y} + \frac{\sigma_b}{f_y \cdot \left(1 - \frac{N}{P_{Ey}}\right)} = 1{,}0$$

Az előző egyenletből különböző P_{Ey} értékek esetén meghatározhatók a folyást okozó összetartozó σ_c és σ_b értékek (P_{Ey} az L/r_y karcsúságtól függ). Ez egy görbesereget ad, amelyet a *7. ábra* szemléltet.

Az ábrán látható, hogy amennyiben σ_b zérushoz tart, σ_c az anyag f_y folyási szilárdságához közelít. Ez azt jelenti, hogy az előző egyenlet nem tartalmazza a tiszta nyomás hatására σ_{Ey} feszültségnél bekövetkező kihajlás lehetőségét:



7. ábra. Az előző egyenlet alakja [Iványi 2007]



8. ábra. Az előző két egyenlet kombinációja [Iványi 2007]

$$\sigma_{ey} = \frac{P_{Ey}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{A \cdot L^2} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda_y^2}$$

Az előző két feltétel figyelembevételét az előző két egyenlet együttes alkalmazása biztosítja *(8. ábra)*.

2.1 Az Eurocode 3 eljárása

Az előző két egyenletben feszültségek szerepelnek, és abból a megfontolásból indulnak ki, hogy a tönkremenetelt az első folyás bekövetkezése vagy a tökéletes szerkezeti elem rugalmas kihajlása jelenti.

A határállapotokon alapuló tervezési szabványok, így az Eurocode 3 is, a statikus terheléssel szembeni ellenállás definiálásakor általában a tönkremenetelt okozó teherre adnak meg tervezési feltételt. Ezeket az egyenleteket tehát át kell írni úgy, hogy erők és nyomatékok szerepeljenek bennük. Miközben ezt tesszük, szükséges még azon hatások figyelembevétele is, amelyek a valós szerkezetekben jelen vannak (például kezdeti görbeség, gyártási sajátfeszültségek), de eddig még közvetlenül nem vettük figyelembe.

A tervezés következetessége érdekében természetesen alapvetően fontos, hogy ha a nyomaték vagy a normálerő zérussá válik, a kombinált terhelésre vonatkozó interakciós egyenlet az oszlop, illetve a gerenda tervezési eljárására redukálódjon.

2.1.1 1. és 2. osztályú keresztmetszetekkel rendelkező szerkezeti elemek

Az Eurocode 3 eljárása (*y tengely* körüli hajlítást feltételezve) a következő:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y} + \frac{k_y \cdot M_{y,Sd}}{W_{pl,y} \cdot f_y} \le 1{,}0$$

ahol: N_{Sd} – normálerő;

$M_{y,Sd}$ – hajlítónyomaték;

A – keresztmetszeti felület;

f_y – az anyag folyáshatár értéke;

$W_{pl,y}$ – képlékeny állapothoz tartozó keresztmetszeti modulus;

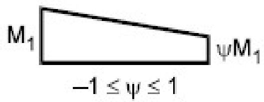
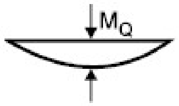
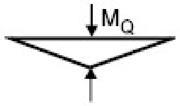
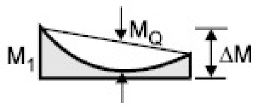
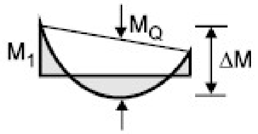
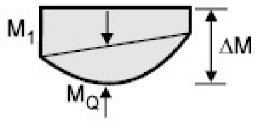
χ_y – az oszlop kihajlás csökkentő tényezője;

k_y – módosító tényező.

$$k_y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y}, \quad \text{de} \quad k_y \le 1{,}5$$

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \cdot \left(2 \cdot \beta_{My} - 4\right) + \frac{W_{pl,y}}{W_{el,y}} - 1, \quad \text{de} \quad \mu_y \le 0{,}90$$

ahol: β_{My} – az egyenértékű állandó nyomatéki tényező, mely azt veszi figyelembe, hogy a nyomatéki ábra nem állandók (lásd a *2. táblázatot, y tengely* körüli hajlítás és *z irányú* megtámasztás esetén.)

Nyomatéki ábra	β_M tényező
Végnyomatékok 	$\beta_{M,\psi} = 1{,}8 - 0{,}7\psi$
Terhelésből származó nyomatékok  	Egyenletesen megoszló teher esetén: $\beta_{M,Q} = 1{,}3$ Koncentrált erő esetén: $\beta_{M,Q} = 1{,}4$
Terhelésből és végnyomatékból származó nyomatékok   	$\beta_M = \beta_{M,\psi} + \frac{M_Q}{\Delta M}(\beta_{M,Q} - \beta_{M,\psi})$ ahol: $M_Q = \lvert \max M \rvert$ csak terhelésből és $\Delta M = \lvert \max M \rvert$ előjelváltás nélküli nyomatéki ábra esetén $\Delta M = \lvert \max M \rvert + \lvert \min M \rvert$ ha a nyomatéki ábra előjelet vált

2. táblázat. A β_M egyenértékű állandó nyomatéki tényező [Iványi 2007]

2.1.2 3. osztályú keresztmetszetekkel rendelkező szerkezeti elemek

Azoknak a nyomott–hajlított elemeknek, amelyek keresztmetszete a 3. osztályba tartozik, ki kell elégíteniük a következő feltételt:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y} + \frac{k_y \cdot M_{y,Sd}}{W_{el,y} \cdot f_y} \leq 1{,}0$$

ahol: $W_{el,y}$ – rugalmas állapothoz tartozó keresztmetszeti modulus;

A többi tényező a 2.1.1 pont szerint, továbbá:

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y \cdot \left(2 \cdot \beta_{My} - 4\right), \quad \text{de} \quad \mu_y \leq 0{,}90$$

2.1.3 4. osztályú keresztmetszetekkel rendelkező szerkezeti elemek

Azoknak a nyomott–hajlított elemeknek, amelyek keresztmetszete a 4. osztályba tartozik, ki kell elégíteniük a következő feltételt:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_y \cdot A_{eff} \cdot f_y} + \frac{k_y \cdot \left(M_{y,Sd} + N_{SD} \cdot e_{N,z}\right)}{W_{eff,y} \cdot f_y} \leq 1{,}0$$

ahol: k_y és μ_y ugyanaz, mint 1., 2. és 3. osztályú keresztmetszet esetén;

A_{eff} – a tiszta nyomáshoz tartozó keresztmetszeti terület;

$W_{eff,y}$ – a tiszta hajlításhoz tartozó hatékony keresztmetszeti modulus;

$e_{N,z}$ – a semleges tengely elmozdulása, azaz a teljes keresztmetszet és a horpadás miatti (tiszta nyomás feltételezésével számított) hatékony keresztmetszet semleges tengelyei közötti távolság.

2.2 A k_y tényező szerepe

A k_y tényező értéke a következő tényezőktől függ:

- a normálerő nagyságától, melyet a következő hányadossal lehet kifejezni:

$$\frac{N_{Sd}}{\chi_y \cdot A \cdot f_y}$$

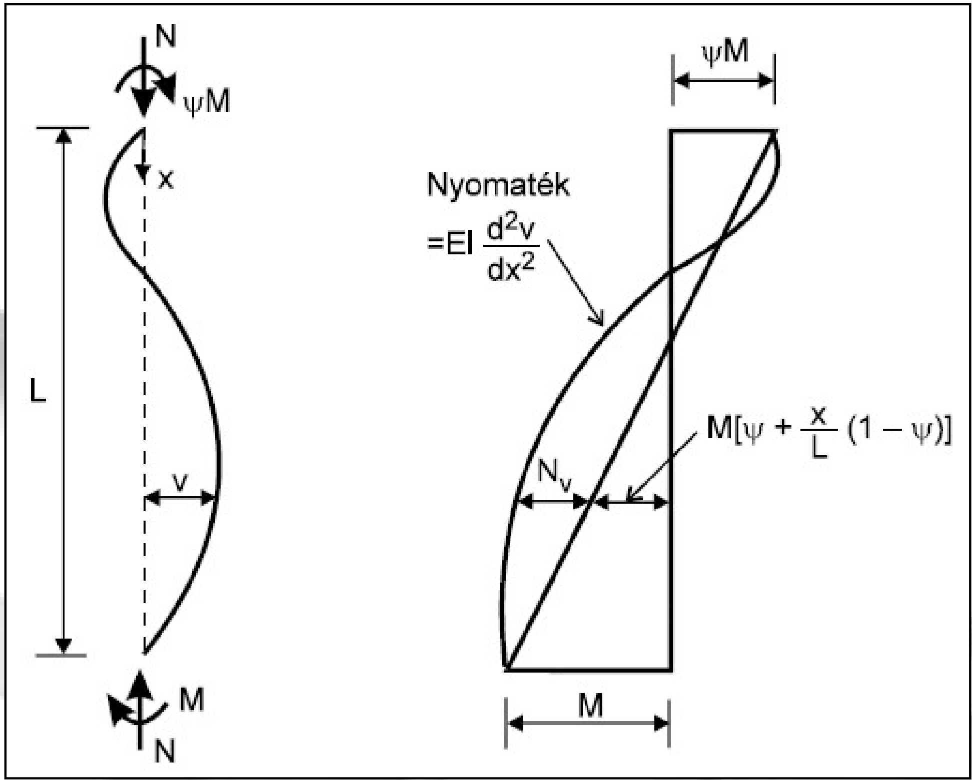
- a szerkezeti elem λ_y karcsúságától,
- a keresztmetszet W_{pl} képlékeny és W_{el} rugalmas keresztmetszeti tényezője közötti eltéréstől (csak 1. és 2. osztályú keresztmetszetek esetén,

- az elsődleges nyomatékok eloszlásától.

Amikor mindezek a legkedvezőtlenebb módon kombinálódnak, k_y biztonságos értéke 1,5. A k_y szerepe az, hogy figyelembe vegye a korábban leírt másodlagos nyomaték hatását, a nyomaték változásának hatásait és a folyás terjedését.

Az *5. ábra* bemutatta, hogy abban a speciális esetben, amikor a gerendára egyenlő, de ellentétes értelmű végnyomatékok működnek, hogyan növekszik az elsődleges nyomaték az N normálerő és a v oldalirányú elmozdulás hatására. Ha az elsődleges nyomatékok eloszlása különböző, a két hatás nem adódik össze közvetlenül, hiszen az elsődleges és a másodlagos nyomaték maximuma nem szükségszerűen jelentkezik ugyanazon a helyen.

A *9. ábra* mutatja az M és $\psi \cdot M$ végnyomatékok esetét, ahol a ψ *tényező* +1 (állandó görbület) és -1 (kettős görbület) közötti értékeket vehet fel. A bemutatott eset $\psi \cong -0{,}5$ értéknek felel meg.



9. ábra. Változó nyomaték esete [Iványi 2007]

A bemutatott esetben a maximális nyomaték még mindig az elem hosszán belül lép fel, ám – feltételezve, hogy ψ értékétől eltekintve minden más feltétel azonos – a helyzet nyilvánvalóan kedvezőbb az *5. ábrán* szereplőnél. Ezt a gyakorlati tervezés során is figyelembe vesszük azáltal, hogy az interakciós összefüggésben a nyomatéki tag súlyát csökkentjük. Az Eurocode 3 k_y tényezője tehát függ a ψ nyomatékaránytól.

Minthogy az állandó egyszeres görbületű eset a legkedvezőtlenebb, biztonságos egyszerűsítés, ha az eljárásban mindig $\psi = 1{,}0$ értéket használunk.

Elfőrordulhat, hogy a maximális nyomaték az elemnek azon a végén keletkezik, amelyiken a nagyobb elsődleges nyomaték működik. Ez az eset általában akkor áll elő, ha a normálerő és/vagy a karcsúság kicsi – ilyenkor csekélyek ugyanis a másodlagos nyomatéki hatások. Ekkor a mértékadó feltétel az lesz, hogy megfelelő keresztmetszeti ellenállást biztosítsunk az elemvégnél. Következésképpen a *2. táblázatnak* az adott szelvényalakhoz tartozó képletét kell használni.

Azokban az esetekben, ha csak az állandó nyomatéki eloszlást ($\psi = 1{,}0$) vesszük figyelembe, a globális kihajlási ellenőrzés mindig kedvezőtlenebb lesz a keresztmetszeti ellenőrzésnél (vagy szélső esetben megegyezik vele), tehát ez utóbbit nem szükséges külön elvégezni.

Felhasznált irodalom

Dr. Iványi Miklós: *Acélszerkezetek I-II. Oktatási segédlet.* Elektronikus jegyzet, Pécs, 2007