Mechanika II. (szilárdságtan)

1. előadás

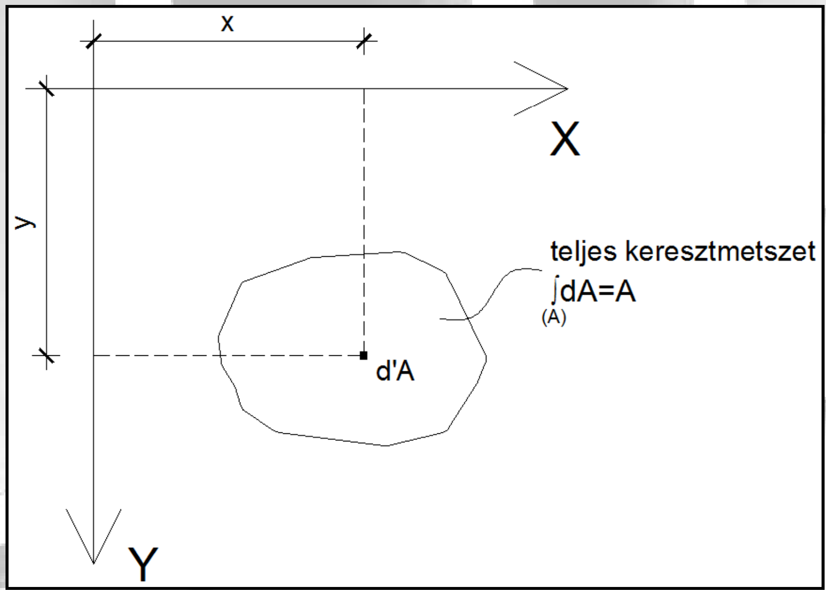
Tartószerkezetek keresztmetszeti jellemzői, a feszültség, központos húzás és nyomás

Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

1. Tartószerkezetek keresztmetszeti jellemzői

1.1 Statikai nyomaték

A statikai nyomaték előjeles mennyiség, előjele a távolság irányának függvénye.



1. ábra. Általános helyzetű keresztmetszet elhelyezése a koordináta−rendszerben

$$S_x = \int y \cdot dA$$

$$S_y = \int x \cdot dA$$

ahol: d – keresztmetszet;

A – a keresztmetszet felülete;

x; y – távolságok.

A pontos megnevezése: elsőrendű statikai nyomaték, mivel a kitevő értéke egy.

$$S_x = \int y^1 \cdot dA$$

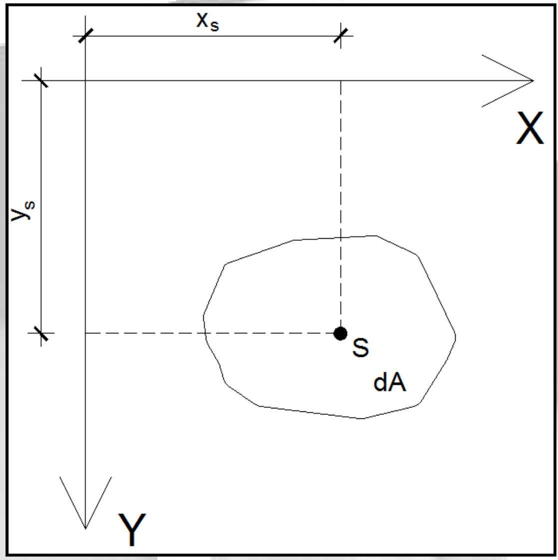
$$S_y = \int x^1 \cdot dA$$

1.2 Súlypont

A súlypont számítása a megfelelő statikai nyomaték és a teljes keresztmetszeti felület hányadosával lehetséges.

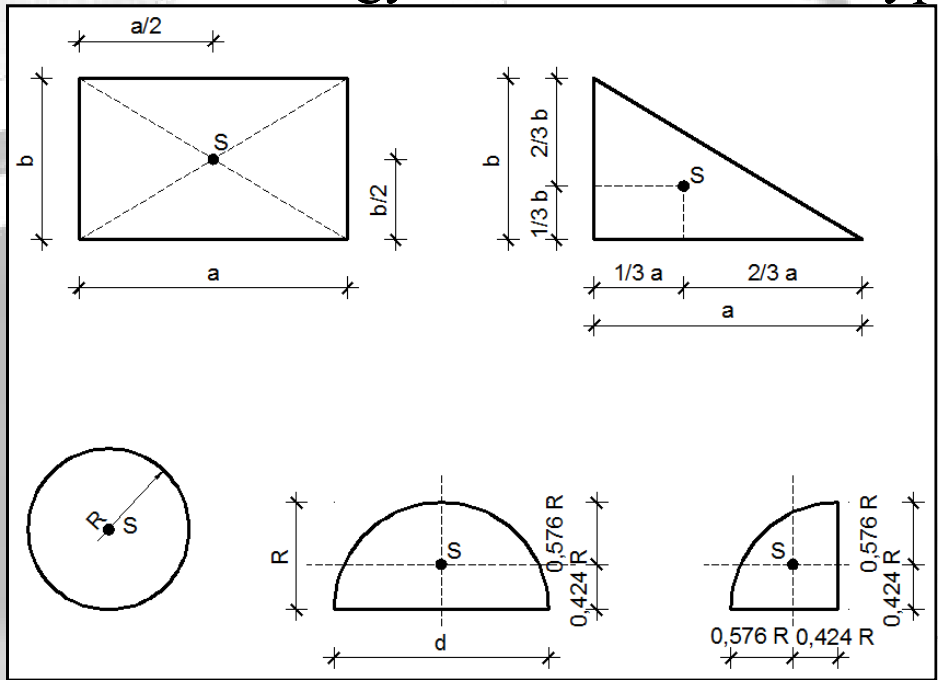
$$x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\int\limits_{(A)} x \cdot dA}{\int\limits_{(A)} dA}$$

$$y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{\int\limits_{(A)} y \cdot dA}{\int\limits_{(A)} dA}$$



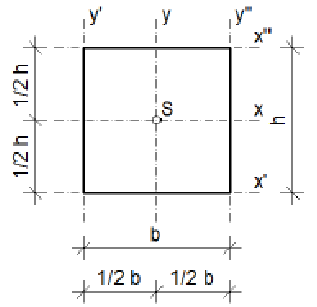
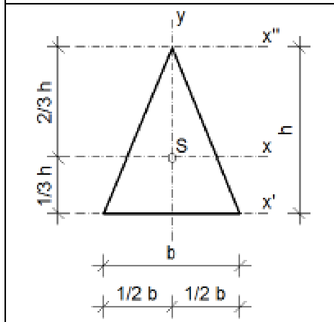
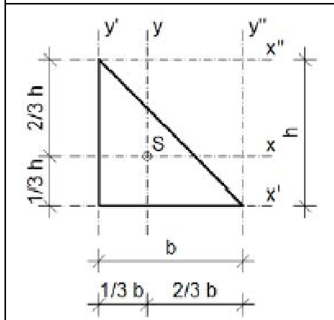
2. ábra. A súlypont helye általános esetben

A *3 – 4. ábra* egyszerű síkidomok súlypontjának helyét mutatja:



3. ábra. A súlypont helye

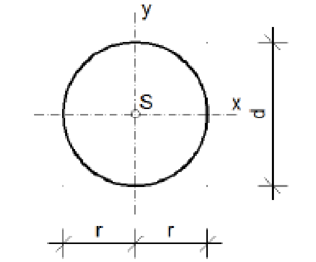
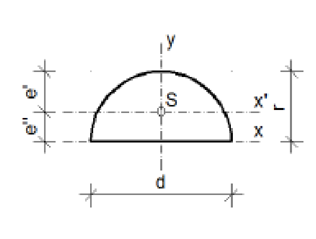
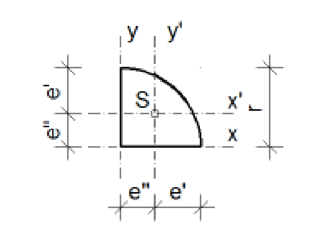
Inercia táblázat

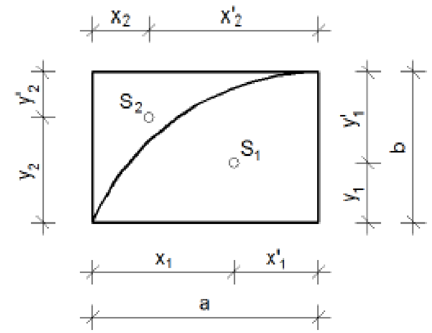
Keresztmetszet	Terület Súlypont	Inercia (x)	Inercia (y)
	$A = b \cdot h$	$I_{x''} = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{3}$	$I_{y''} = \frac{b^3 \cdot h}{3}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ $I_{y'} = \frac{b^3 \cdot h}{3}$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$I_{x''} = \frac{b \cdot h^3}{4}$ $I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{48}$
	$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$I_{x''} = \frac{b \cdot h^3}{4}$ $I_x = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_{x'} = \frac{b \cdot h^3}{12}$	$I_{y''} = \frac{b^3 \cdot h}{4}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{36}$ $I_{y'} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$

ADDICIÓS TÉTEL: $I_x = \sum_{i=1}^{n} I_{ix}$

STEINER TÉTEL: $I_a = I_x + A \cdot t^2$

Keresztmetszeti adatok

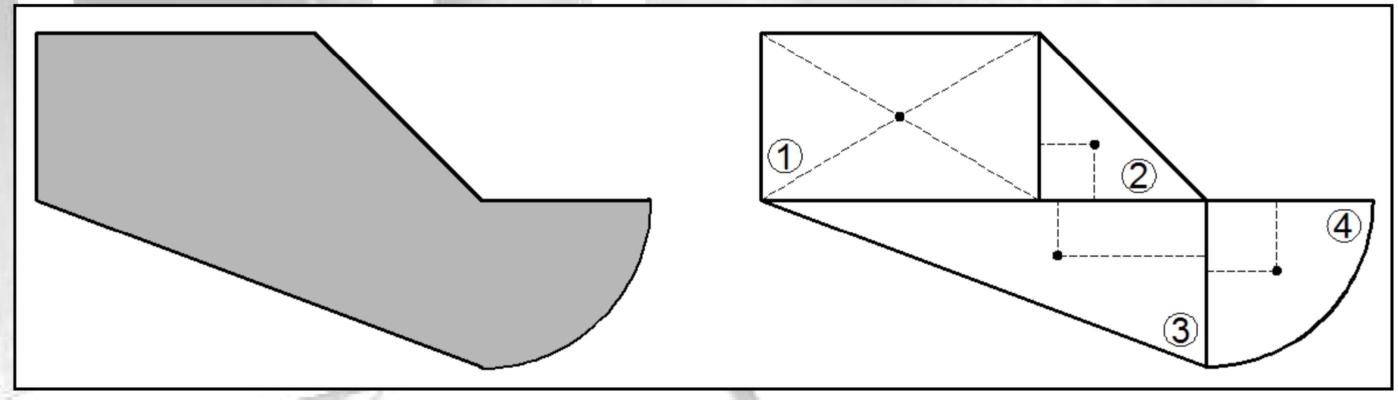
Keresztmetszet	Terület Súlypont	Inercia (x)	Inercia (y)
	$A = r^2 \cdot \pi$ $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$	$I_x = \frac{r^4 \cdot \pi}{4}$ $I_x = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$	$I_x = \frac{r^4 \cdot \pi}{4}$ $I_x = \frac{d^4 \cdot \pi}{64}$
	$A = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$ $e' = 0{,}5756 \cdot r$ $e'' = 0{,}4244 \cdot r$	$I_x = \frac{r^4 \cdot \pi}{8}$ $I_{x'} = 0{,}1098 \cdot r^4$	$I_y = \frac{r^4 \cdot \pi}{8}$
	$A = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$ $e' = 0{,}5756 \cdot r$ $e'' = 0{,}4244 \cdot r$	$I_x = \frac{r^4 \cdot \pi}{16}$ $I_{x'} = 0{,}055 \cdot r^4$	$I_y = \frac{r^4 \cdot \pi}{16}$ $I_{y'} = 0{,}055 \cdot r^4$

	$A_1 = \frac{2 \cdot a \cdot b}{3}$ $A_2 = \frac{a \cdot b}{3}$	$x_1 = \frac{5}{8} \cdot a \quad x_1' = \frac{3}{8} \cdot a$ $y_1 = \frac{2}{5} \cdot b \quad y_1' = \frac{3}{5} \cdot b$ $x_2 = \frac{1}{4} \cdot a \quad x_2' = \frac{3}{4} \cdot a$ $y_2 = \frac{7}{10} \cdot b \quad y_2' = \frac{3}{10} \cdot b$

4. ábra. A súlypont és inercia táblázat

1.2.1 Összetett síkidom súlypontja

Az összetett síkidomokat fel kell bontani egyszerű síkidomokra, majd ezek súlypontjait külön−külön már meg lehet határozni, ezután már ki lehet számolni a teljes síkidom súlypontjának helyét.



5. ábra. Összetett síkidom súlypontja

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} S_{ix} \rightarrow y_s = \frac{\sum S_x}{\sum A}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_{iy} \rightarrow x_s = \frac{\sum S_y}{\sum A}$$

1.3 Inercia − másodrendű statikai nyomaték (tehetetlenségi nyomaték)

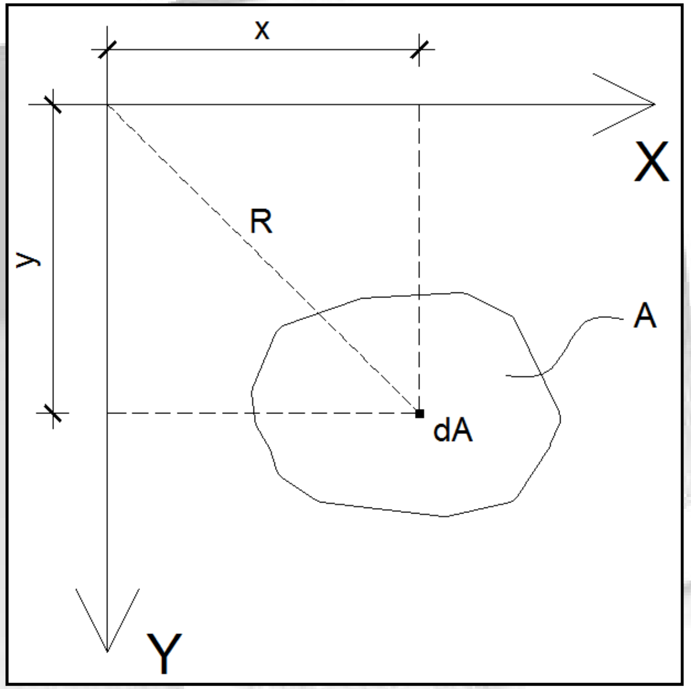
Az inercia előjel nélküli mennyiség, mindig pozitívnak tekintendő, mivel ha fizikailag létezik a keresztmetszet, van felülete, akkor van inercianyomatéka is.

Mértékegysége: mm^4, cm^4, stb.

Általában az „X” és „Y” főirányokhoz tartozó inercianyomatékokat szoktuk meghatározni. A síkidomok súlypontján keresztül végtelen számú tengelykereszt rajzolható, azonban ezek közül egy tengelykereszt a „kitüntetett”. Ezek a főtengelyek. Ha a keresztmetszet legalább egyszeresen szimmetrikus, akkor a szimmetriatengelye az egyik főtengely, a másik pedig erre merőleges. E tengelyekre szoktuk számolni az inercianyomatékot, mivel ebben a két irányban a legkisebb, illetve a legnagyobb egy keresztmetszet inercianyomatéka.

$$I_x = \int_{(A)} y^2 \cdot dA$$

$$I_y = \int_{(A)} x^2 \cdot dA$$



6. ábra. Inercia, másodrendű statikai nyomaték

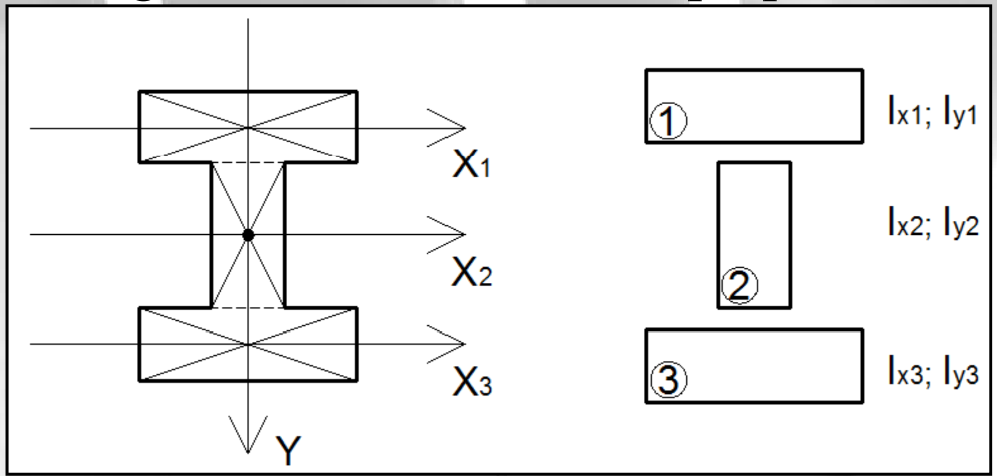
Poláris tehetetlenségi nyomaték:

$$I_0 = \int_{(A)} r^2 \cdot dA$$

mivel:

$$r^2 = x^2 + y^2 \text{ így} \rightarrow I_0 = I_x + I_y$$

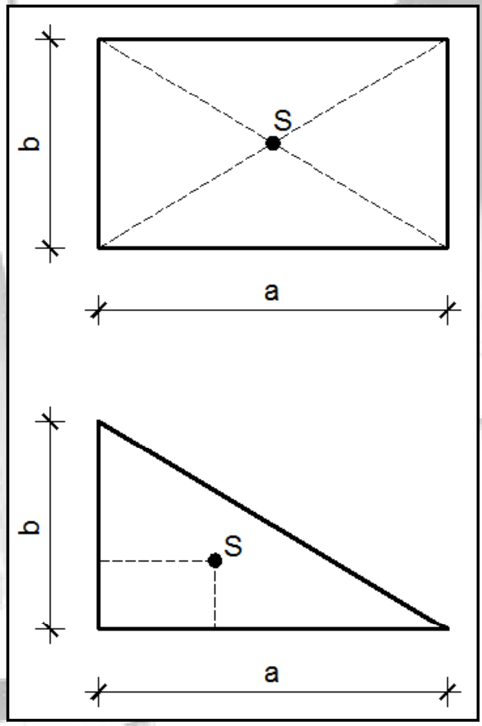
Egy síkidom valamely tengelyre vagy pontra vonatkozó másodrendű nyomatéka a síkidomot alkotó egyes részek ugyanazon tengelyre vagy pontra vonatkozó másodrendű nyomatékainak összegeként számítható a szuperpozíció elve alapján.



7. ábra. Inerciák egymásra halmozása

1.3.1 Egyszerű síkidomok inerciája

Részletesen lásd *4. ábra*.



$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{12}$$

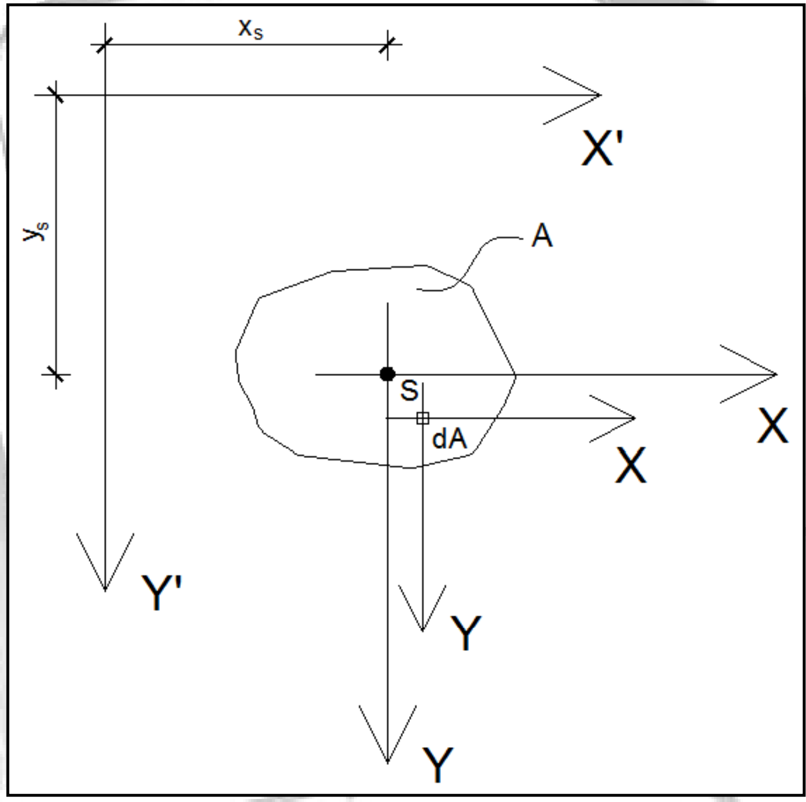
$$I_x = \frac{a \cdot b^3}{36}$$

$$I_y = \frac{b \cdot a^3}{36}$$

8. ábra. Egyszerű síkidomok inercianyomatéka

1.3.2 Koordináta-rendszer eltolása, Steiner-tétel

Ha ismerjük egy síkidom inercia nyomatékát a saját súlyponti tengelyére, akkor a súlyponti tengellyel párhuzamos bármelyik tengelyre meghatározható az inercianyomaték.



9. ábra. Steiner – tétel

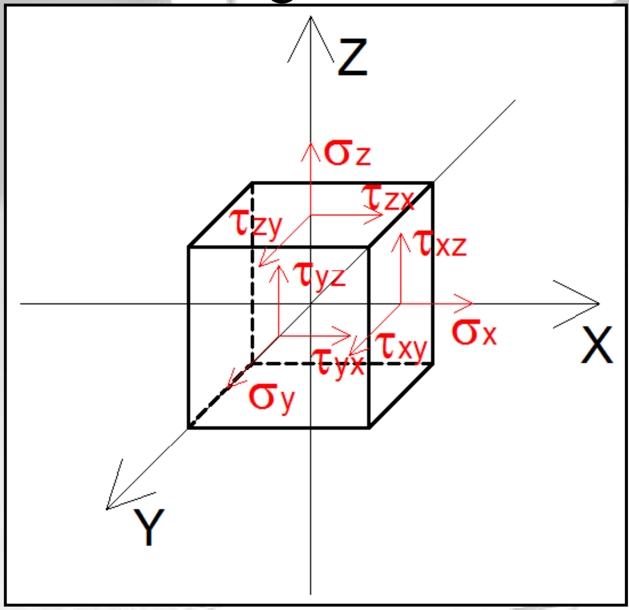
$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{xi} + A_i \cdot t_i^2 \right)$$

ahol: A – a keresztmetszet felülete;

t – a két súlypont (tengely) közötti távolság.

2. Feszültségek

A feszültségek elemi kockán való ábrázolása:



10. ábra. Elemi kocka feszültségei

A feszültség vektormennyiség.

Két félét különböztetünk meg:

σ (normálfeszültség) – a keresztmetszet síkjára merőleges

τ (nyírófeszültség) – a keresztmetszet síkjában hat.

Mértékegysége: [kN/cm^2], [N/mm^2 = MPa]

Igénybevételek típusai:

1. Egyszerű igénybevételek:

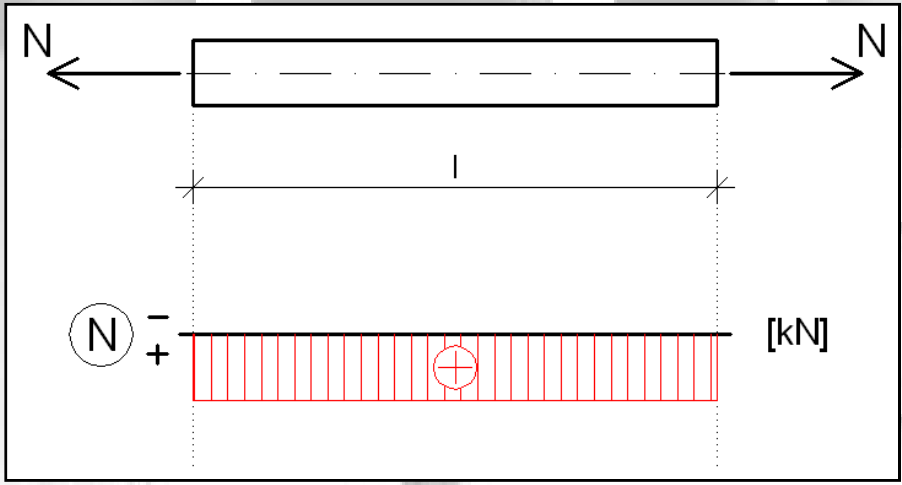
- központos húzás (a keresztmetszetben csak normál igénybevétel van, az előjele pozitív) N (+)
- központos nyomás (a keresztmetszetben csak normál igénybevétel van, az előjele negatív) N (−)
- tiszta nyírás (a keresztmetszetben csak nyíró igénybevétel van) T
- tiszta, egyenes hajlítás (a keresztmetszetben csak nyomatéki igénybevétel van) M

2. Összetett igénybevételek:

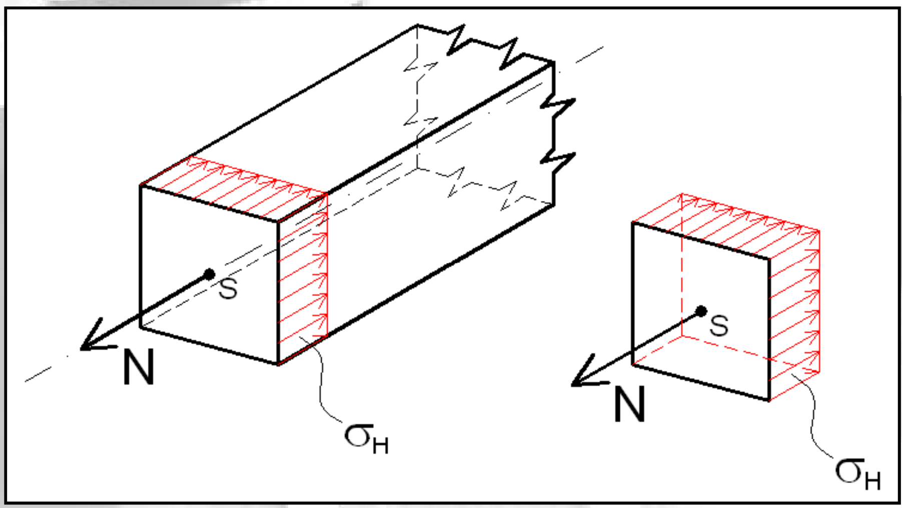
- ferde hajlítás (a keresztmetszetben csak nyomatéki igénybevétel van, de kétirányú) M_x, M_y
- összetett hajlítás vagy más néven hajlítással egyidejű nyírás (a keresztmetszetben nyíró és nyomatéki igénybevétel is van) T, M
- külpontos húzás vagy nyomás (a keresztmetszetben normál és nyomatéki igénybevétel is van, a normál igénybevétel lehet pozitív és negatív is) N (+ vagy −), M

3. Központos húzás

Központos húzásról beszélünk akkor, ha valamely rúdon a terhelő erő a rúd keresztmetszetére merőleges, elmutat a keresztmetszettől (húzza a keresztmetszetet), és az erő hatásvonala egybeesik a rúd hossztengelyével.



11. ábra. Tengelyirányú húzóerő és a belőle kapott normálerő ábra



12. ábra. Húzófeszültségek keletkezése

A keresztmetszet minden pontján ugyanakkora nagyságú, a húzóerővel ellentétes irányú húzófeszültség keletkezik. A külső erővel a normálfeszültségek eredője tart egyensúlyt.

Hooke – törvény:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

ahol: σ – normálfeszültség;

E – rugalmassági modulus (anyagjellemző) [kN/cm^2];

ε – alakváltozás.

A normálfeszültség számítása:

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A}\left[\mathrm{kN/cm^2}\right]}$$

ahol: σ – normálfeszültség;

N – normálerő;

A – a keresztmetszet felülete.

Az alakváltozás számítása:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

ahol: ε – a rúd alakváltozása;

Δl – a rúd megnyúlása;

l – a rúd eredeti hossza.

A rúd megnyúlásának számítása:

$$\sigma = \frac{N}{A} = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \boxed{\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}}$$

Harántkontrakció:

$$\Delta d = \mu \cdot \frac{N \cdot d}{E \cdot A}$$

ahol: Δd – a rúd megváltozott átmérője;

μ – Poisson–féle szám (anyagjellemző);

N – normálerő;

d – a rúd eredeti átmérője;

E – rugalmassági modulus (anyagjellemző);

A – a keresztmetszet felülete.

Poisson – féle szám:

$$\mu = \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}$$

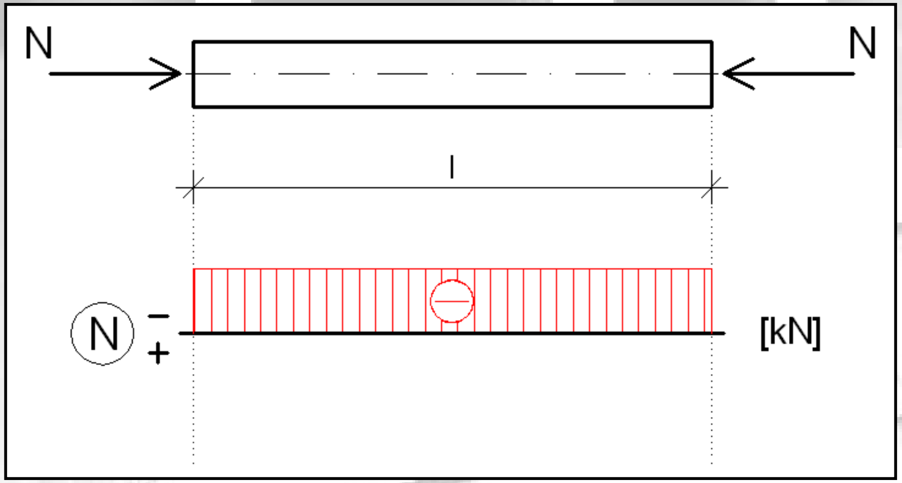
Értéke mindig kisebb, mint egy. $\mu < 1$

Például: acél: 0,3

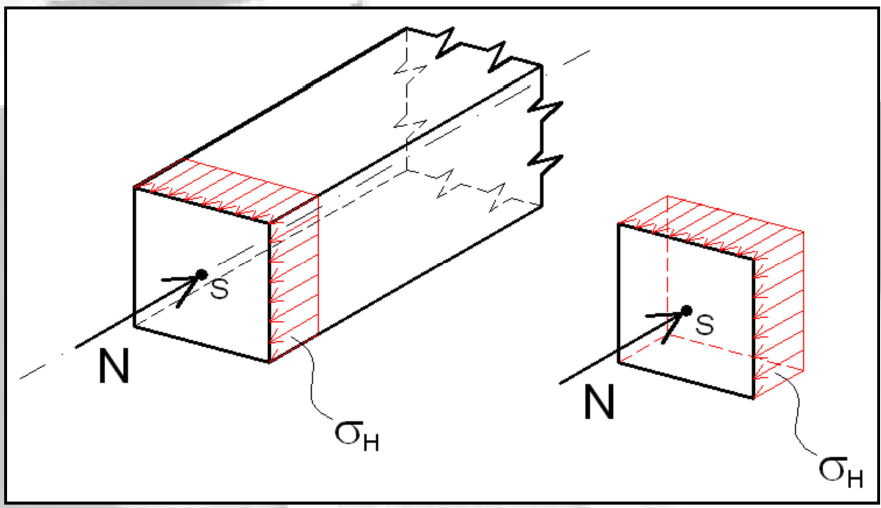
beton: 0,2

4. Központos nyomás

Központos nyomásról beszélünk akkor, ha valamely rúdon a terhelő erő a rúd keresztmetszetére merőleges, rámutat a keresztmetszetre (nyomja a keresztmetszetet) és az erő hatásvonala egybeesik a rúd hossztengelyével.



13. ábra. Tengelyirányú nyomóerő és a belőle kapott normálerő ábra



14. ábra. Nyomófeszültségek keletkezése

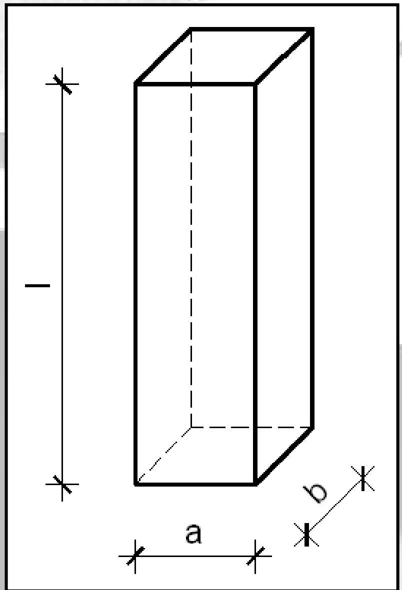
A keresztmetszet minden pontján ugyanakkora nagyságú, a nyomóerővel ellentétes irányú nyomófeszültség keletkezik. A külső erővel a normálfeszültségek eredője tart egyensúlyt.

A rúd viselkedés és tönkremeneteli módja:

A rúd tönkremeneteli módja függ a rúd alakjától és méretarányaitól.

1. Zömök szerkezetek:

$$\text{zömök szerkezet} = \frac{\text{rúdhossz}\,(l)}{\text{keresztmetszet mérete}\,(\mathrm{a}\cdot\mathrm{b})} << 5$$



15. ábra. Zömök szerkezet

A feszültségek és az alakváltozások számítása ugyanúgy történik, mint a központos húzás esetében.

$$\sigma = -\frac{N}{A}$$

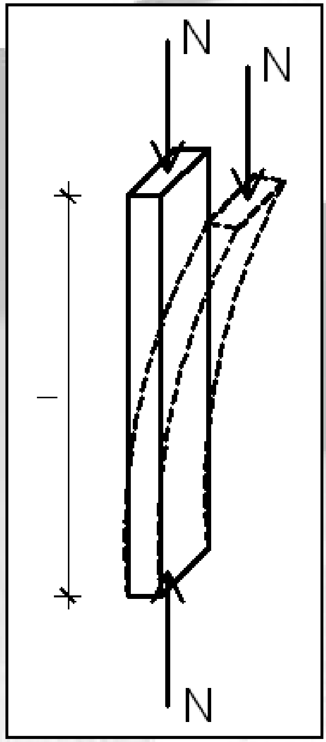
$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}$$

Összenyomódás keletkezik. A feszültség előjele negatív lesz.

2. Karcsú szerkezetek:

Karcsú szerkezet: rúd hossz (l) >> keresztmetszet mérete $(a \cdot b)$

A karcsú szerkezetek alakváltozása központos nyomás hatására: a rúd meggörbül, kihajlik.



16. ábra. Karcsú szerkezet

Felhasznált irodalom

ARNOLD ILDIKÓ, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER: *Mechanika 2. – szilárdságtan −*. Janus Pannonius Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Pécs, 1998.

DR. SALÁT GÉZA: *Szilárdságtani példatár*. Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Építőipari Kar Tartószerkezetek Tanszék, Pécs, 1974.

SZAKÁCS JÓZSEF, NAGY ZOLTÁN: *Mechanika. Módszertani útmutató és példatár II. évfolyam Magas− és Mélyépítő szakos levelezős hallgatók részére 2−3−4. konzultáció*. Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, é.n.