Mechanika II. (szilárdságtan)

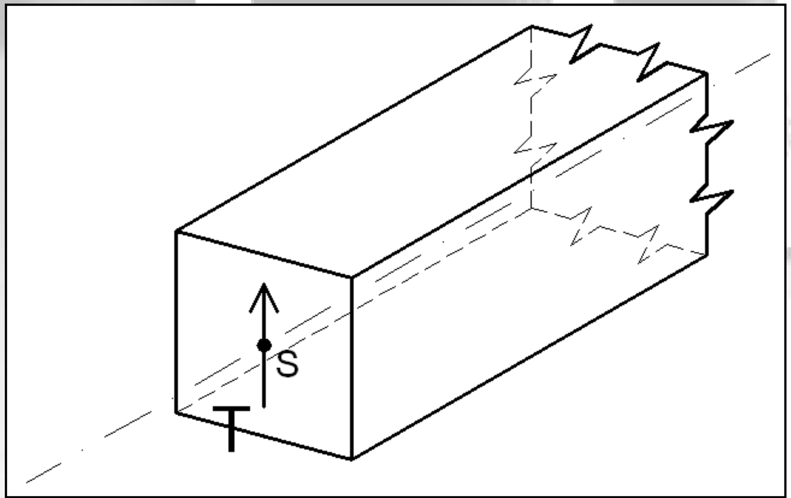
3. előadás

Tiszta nyírás, tiszta csavarás, egyenes hajlítás rugalmas és képlékeny állapotban, ferde hajlítás

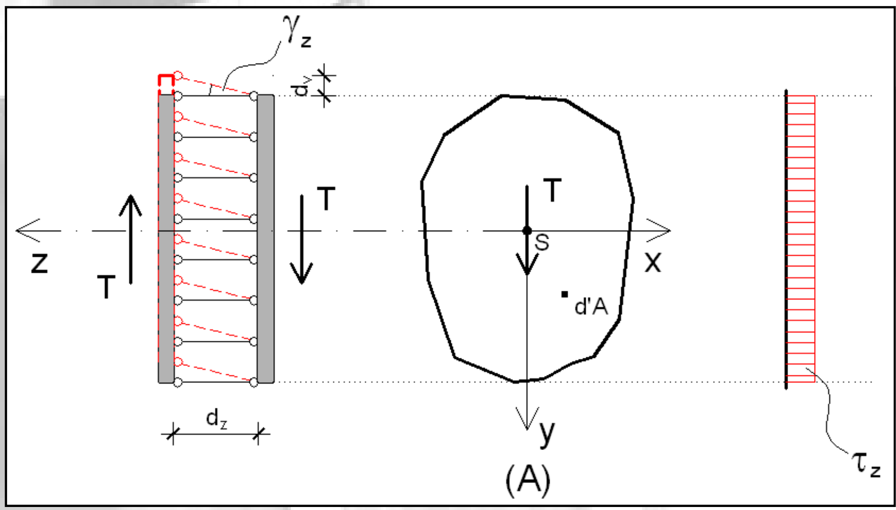
Szabó Imre Gábor
Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar
Építőmérnök Tanszék

1. Tiszta nyírás

Ha egy rúdelemre a határoló keresztmetszetek síkjában fekvő és a súlyponton átmenő erők működnek, akkor a rúdelem tiszta nyírásra van igénybe véve.



1. ábra. A nyíróerő elhelyezkedése



2. ábra. Nyírófeszültség keletkezése

Ha a terhelés után az egymáshoz végtelenül közel lévő keresztmetszeti síkok, síkok is maradnak, akkor mindkét keresztmetszet a rúd tengelyére merőleges irányú elmozdulást (eltolódást) végez. γ_z fajlagos szögtorzulás keletkezik.

A nyírófeszültségek eredője egyenlő a keresztmetszetre ható nyíróerővel:

$$T = \int_0^A \tau_z \cdot dA = \tau_z \cdot \int_0^A dA = \tau_A \cdot A$$

A rugalmas állapotban érvényes Hooke−törvény alapján (a feszültség egyenesen arányos a fajlagos alakváltozással):

$$\tau_z = G \cdot \gamma_z$$

ahol: τ – nyírófeszültség;

G – nyírási modulus (anyagjellemző) [kN/cm^2];

γ_z – fajlagos szögtorzulás.

A nyírófeszültség számítása:

$$\tau = \frac{T}{A} \left[kN/cm^2 \right]$$

ahol: τ – nyírófeszültség;

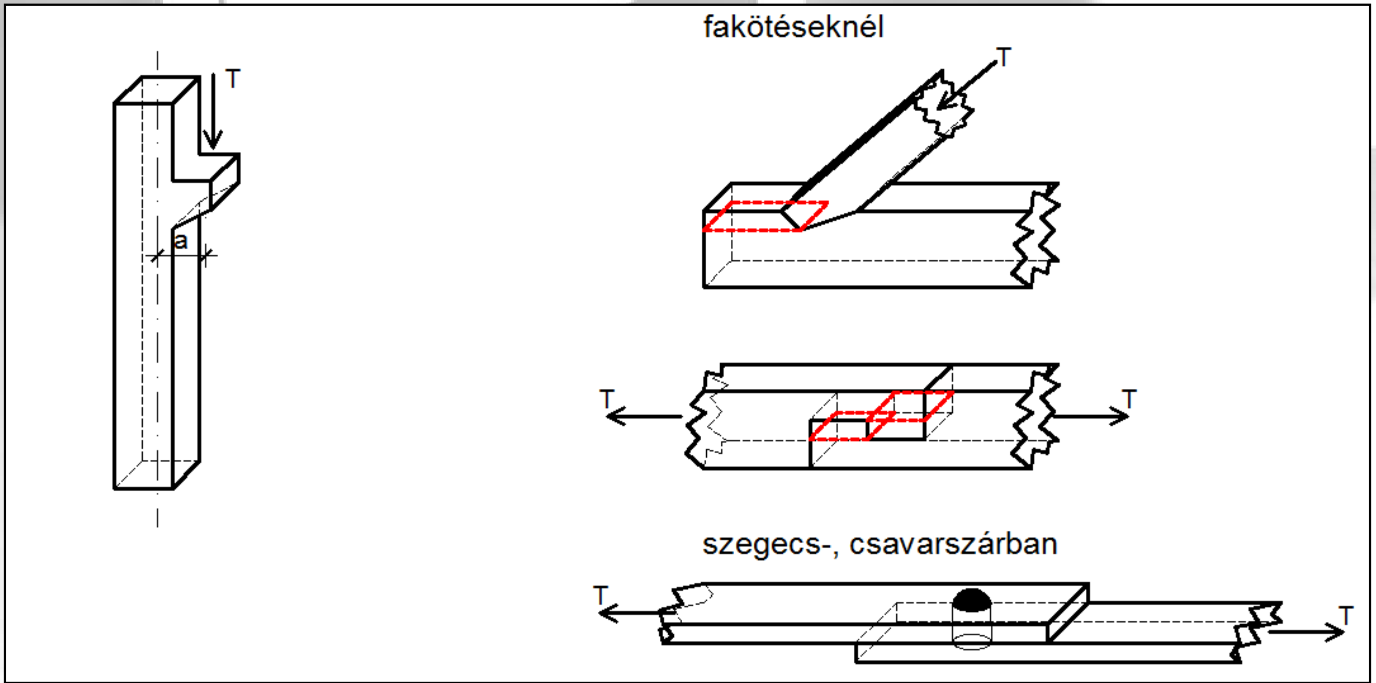
T – nyíróerő;

A – a keresztmetszet felülete.

Tiszta nyíró igénybevétel építmények tartószerkezeteiben ritkán fordul elő, a nyíróerő általában hajlító igénybevétellel együtt lép fel.

Fontos, hogy a fenti összefüggések a hajlítással egyidejűleg fellépő nyírófeszültségek meghatározására nem alkalmasak! A tiszta nyírás leggyakrabban a kapcsolóelemeknél lép fel, melyek feladata a kapcsolati erők nyíróerő útján való leadása.

Jellemző gyakorlati példák a tiszta nyírás előfordulására (pl. rövidkonzol és kapcsolóelemek esetén):



3. ábra. Tiszta nyírás előfordulása

1. kép. Szegecsek különböző méretben

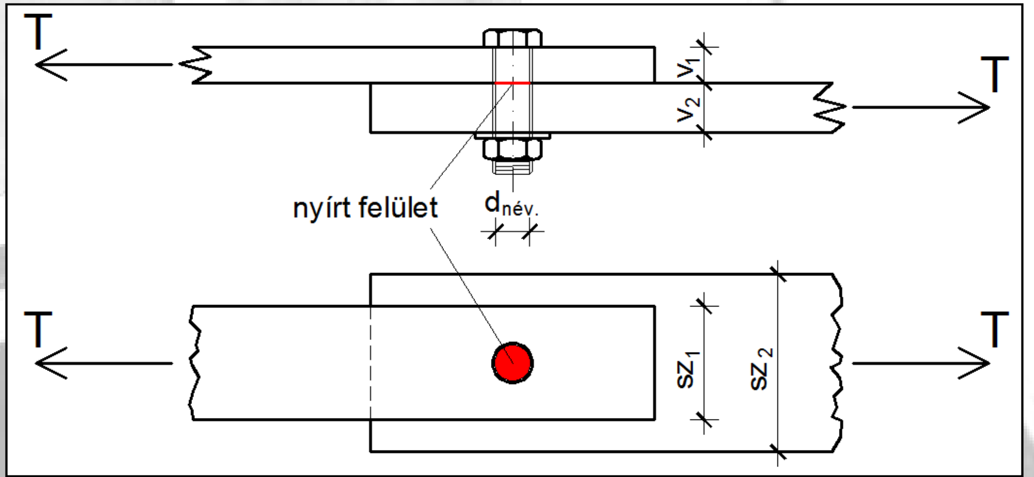
2. kép. M24-es, M17-es és M13-as csavarok alátéttel és anyával

1.1 Szegecs– csavarkötés

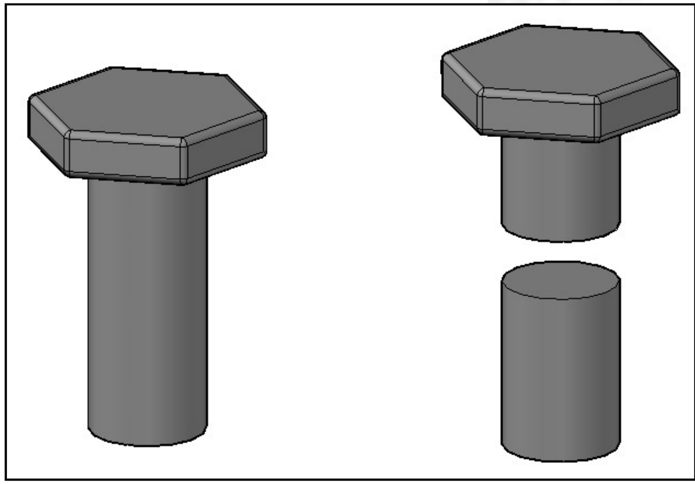
A szegecseket (vagy csavarokat) nyírásra, a szegecs (vagy csavar) és lemez közös felületét palástnyomásra, a húzott lemezt húzó igénybevételre (szakadásra) kell megvizsgálni.

Nyírás:

Ott keletkezik, ahol a két lemez igyekszik elcsúszni egymáson, próbálja elnyírni (elvágni) a szegecs (vagy csavar) szárát.



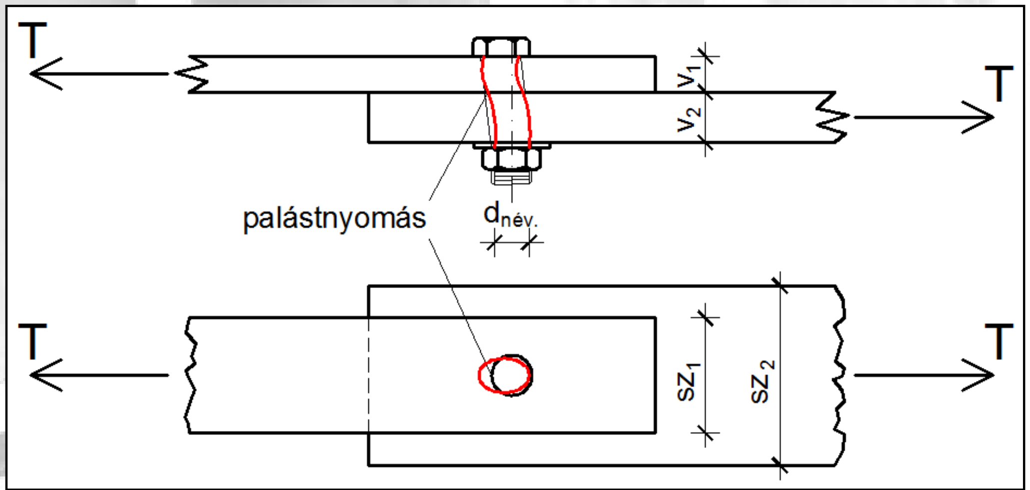
4. ábra. Nyírt felület keletkezése I.



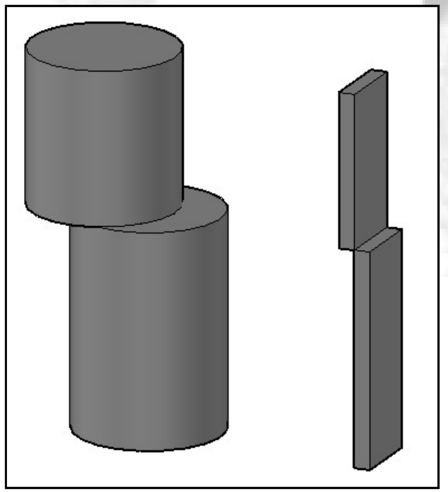
5. ábra. Nyírt felület keletkezése II.

Palástnyomás:

Ott keletkezik, ahol a két lemez elmozdulása következtében a szegecs (vagy csavar) szára nekiszorul a lemeznek. Vagy a szegecsszár (csavarszár) meggörbül, vagy a szegecs (vagy csavar) berágódik a lemezbe. A palástnyomás számolása során helyettesítő téglalap felülettel kell számolni.



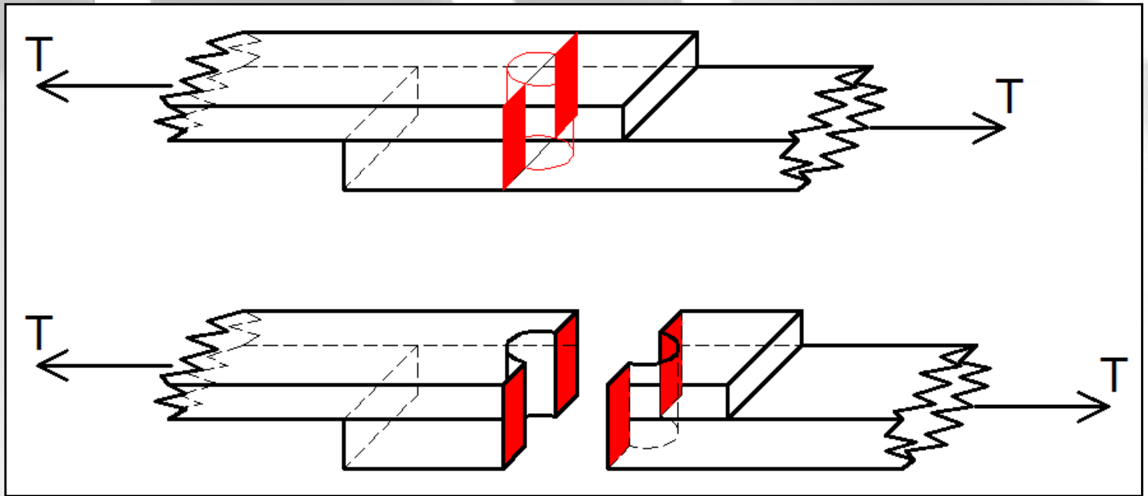
6. ábra. Palástnyomás keletkezése I.



7. ábra. Palástnyomás keletkezése II.

Húzás (szakadás):

Ott keletkezik, ahol az úgynevezett gyengített keresztmetszet van, tehát abban a keresztmetszetben, ahol a szegecs (vagy csavar) lyuk található.



8. ábra. A gyengített keresztmetszet helye

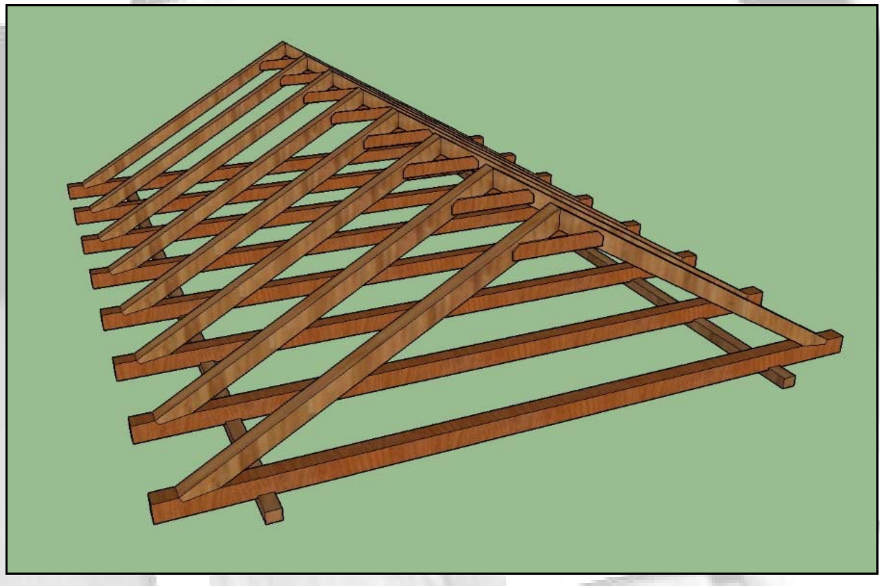
1.2 Fakötések

A fakötéseknél is minden tönkremeneteli lehetőséget meg kell vizsgálni:

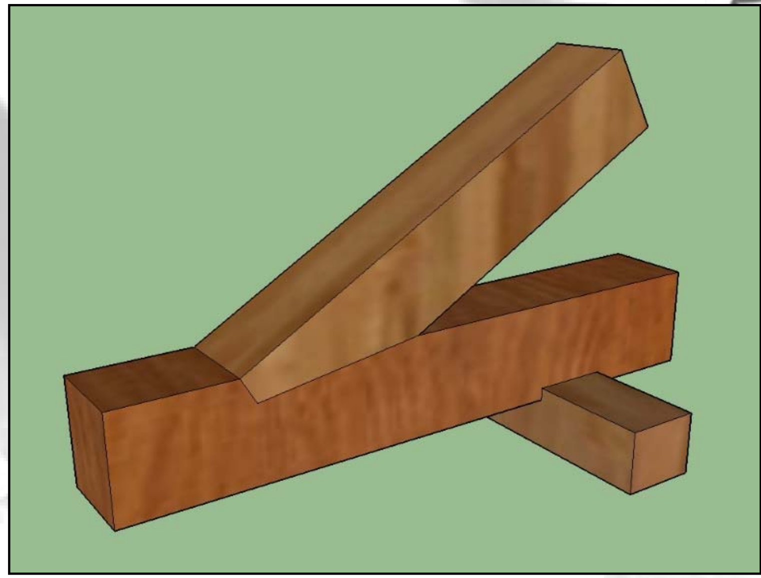
- nyírt felületeket,
- a húzásra igénybevett (gyengített) keresztmetszeteket,
- a helyi nyomásra igénybevett felületeket.

A méretezés szempontjából lényeges körülmény, hogy a természetes építőfa nem izotróp anyag, mechanikai tulajdonságai az iránytól függően változnak. A határfeszültségek értékeit a feszültség és a rostok iránya között „α" szög függvényében adja meg a szabályzat.

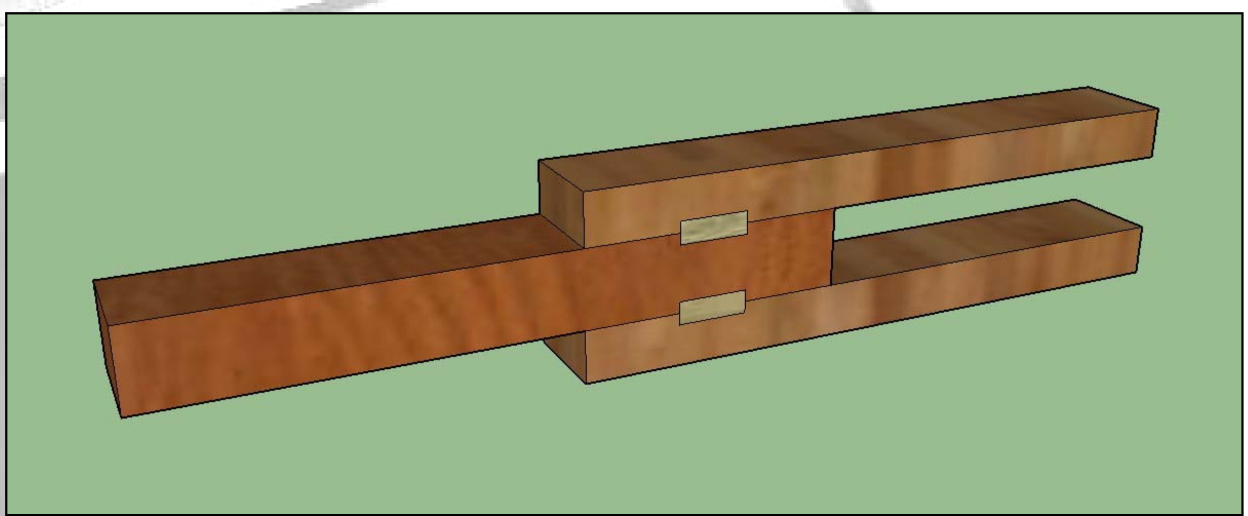
A húzási, nyomási és palástnyomási határfeszültség a rostokkal párhuzamos irányban a legnagyobb. A nyírási határfeszültség a rostokra merőleges síkban a legnagyobb.



9. ábra. Tetőszerkezet fakötései



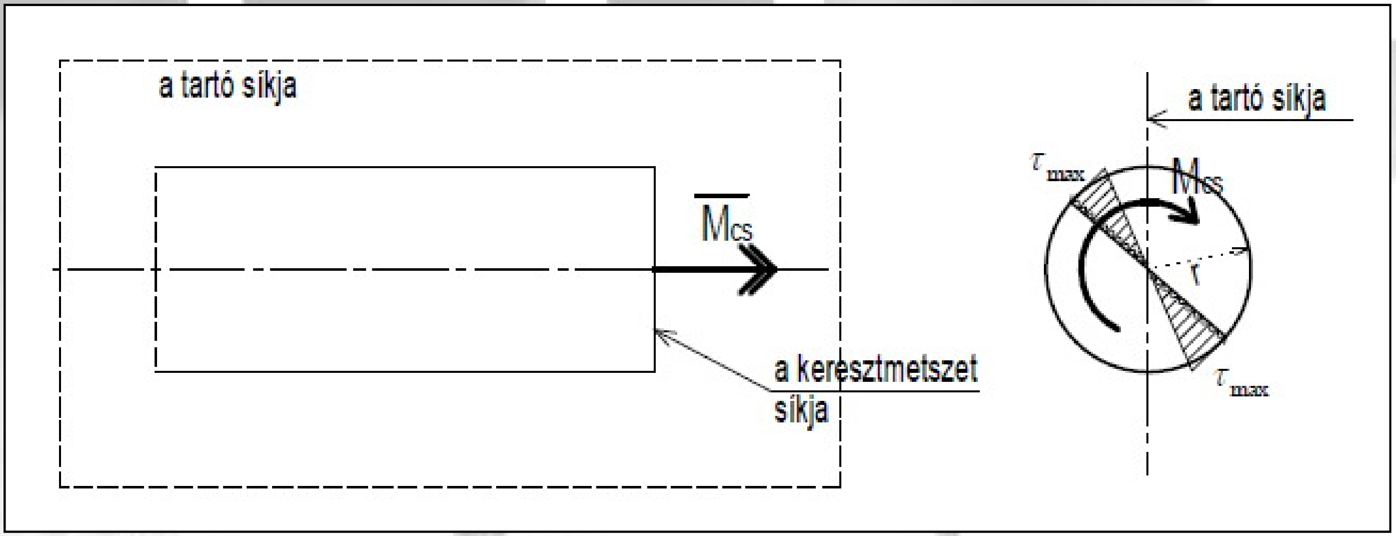
10. ábra. Talpszelemen-kötőgerenda-szarufa kapcsolata



11. ábra. Fagerendák toldása keményfabetéttel

2. Tiszta csavarás

Csavarást a keresztmetszet síkjában vagy a keresztmetszet síkjával párhuzamos síkban működő erőpár okoz.



12. ábra. Csavarónyomaték ábrázolása

A csavarásból a keresztmetszet síkjában nyírófeszültség ébred.

$$\tau = \frac{M_{cs}}{I_p} \cdot r$$

$$I_p = \int_0^A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = \int_0^A x^2 \cdot dA + \int_0^A y^2 \cdot dA$$

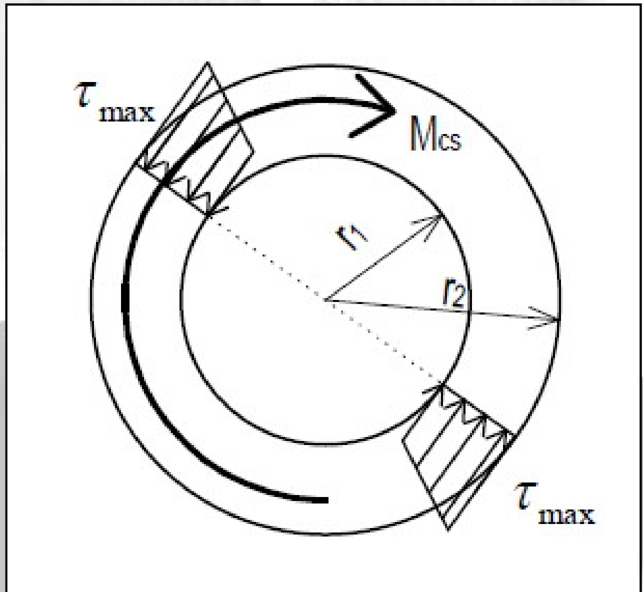
$$I_p = I_x + I_y = \frac{r^4 \cdot \pi}{4} + \frac{r^4 \cdot \pi}{4} = \frac{r^4 \cdot \pi}{2}$$

ahol: τ – nyírófeszültség;

I_p – poláris inercianyomaték;

I_x, I_y – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „X” és „Y” tengelyekre.

Körgyűrű esetén:



13. ábra. Csavarónyomaték ábrázolása körgyűrű esetén

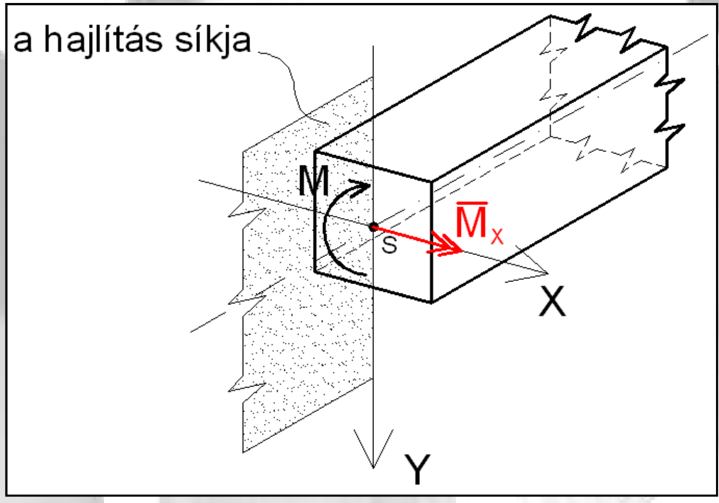
3. Tiszta (egyenes) hajlítás

Ha egy rúd valamely szakaszán olyan erőpár működik, amelynek síkja merőleges a keresztmetszetre, vagyis a nyomatékvektora a keresztmetszet síkjába esik, akkor a rúd hajlításra van igénybe véve.

A hajlítás vizsgálata több módon történhet:

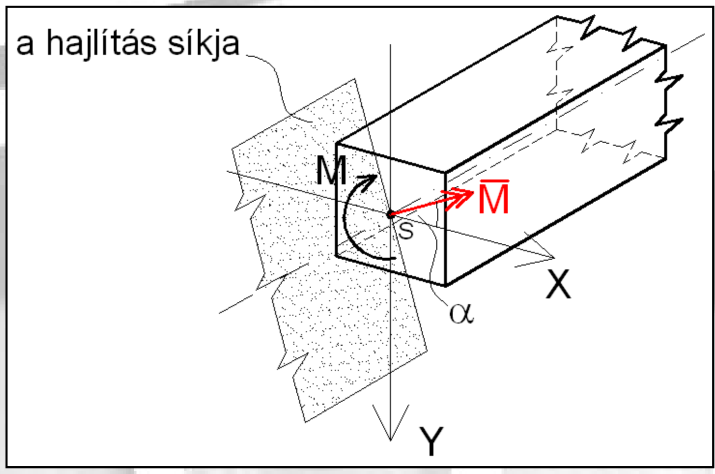
1. Az igénybevétel módja szerint:
   - Tiszta hajlítás: egyszerű igénybevétel, a keresztmetszetben csak nyomatéki igénybevétel van. M
   - Összetett hajlítás vagy más néven hajlítással egyidejű nyírás: a keresztmetszetben nyíró és nyomatéki igénybevétel is van. T, M

2. A hajlítónyomaték síkja szerint:
   - Egyenes hajlítás: merőleges hajlítás, a nyomaték vektora egybevág a keresztmetszet valamely főtengelyével.



14. ábra. Egyenes hajlítás

- Ferde hajlítás: a nyomatékvektor nem esik egybe egyik főtengellyel sem.



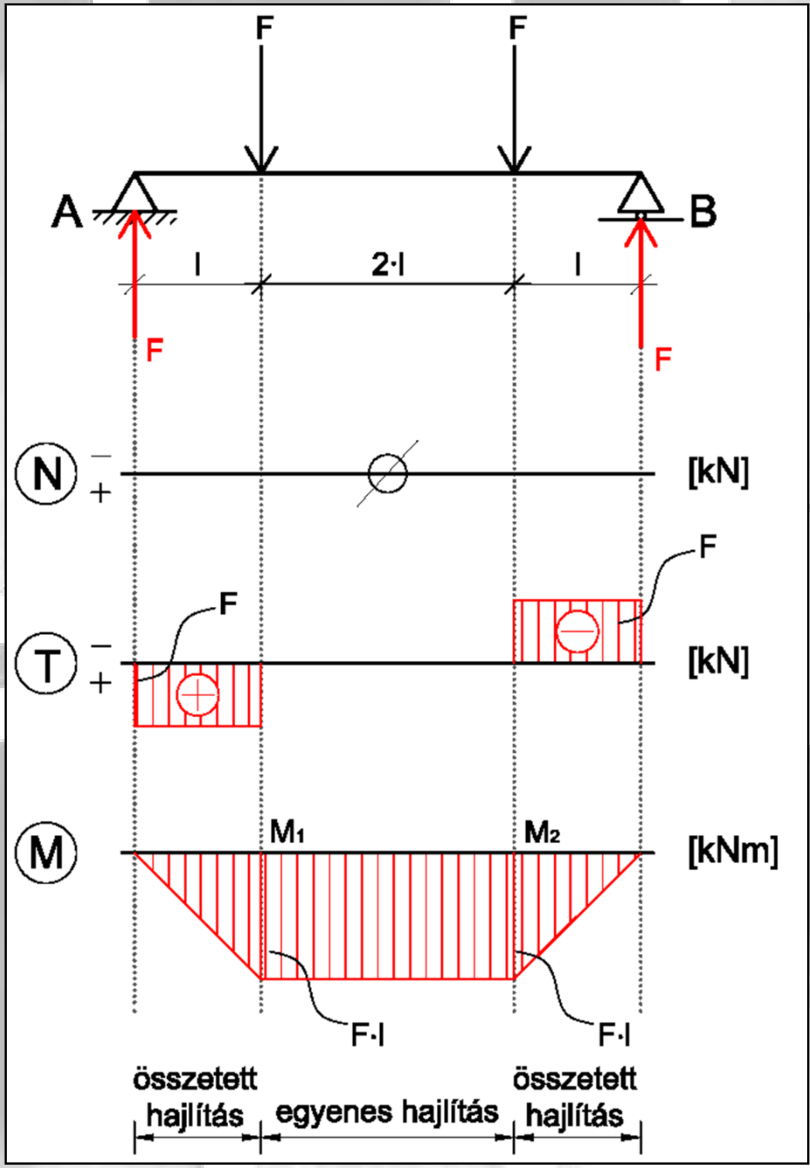
15. ábra. Ferde hajlítás

3. A rúd anyagának állapota szerint:

- rugalmas állapotú,
- rugalmas−képlékeny állapotú,
- képlékeny állapotú.

3.1 Egyenes hajlítás rugalmas állapotban

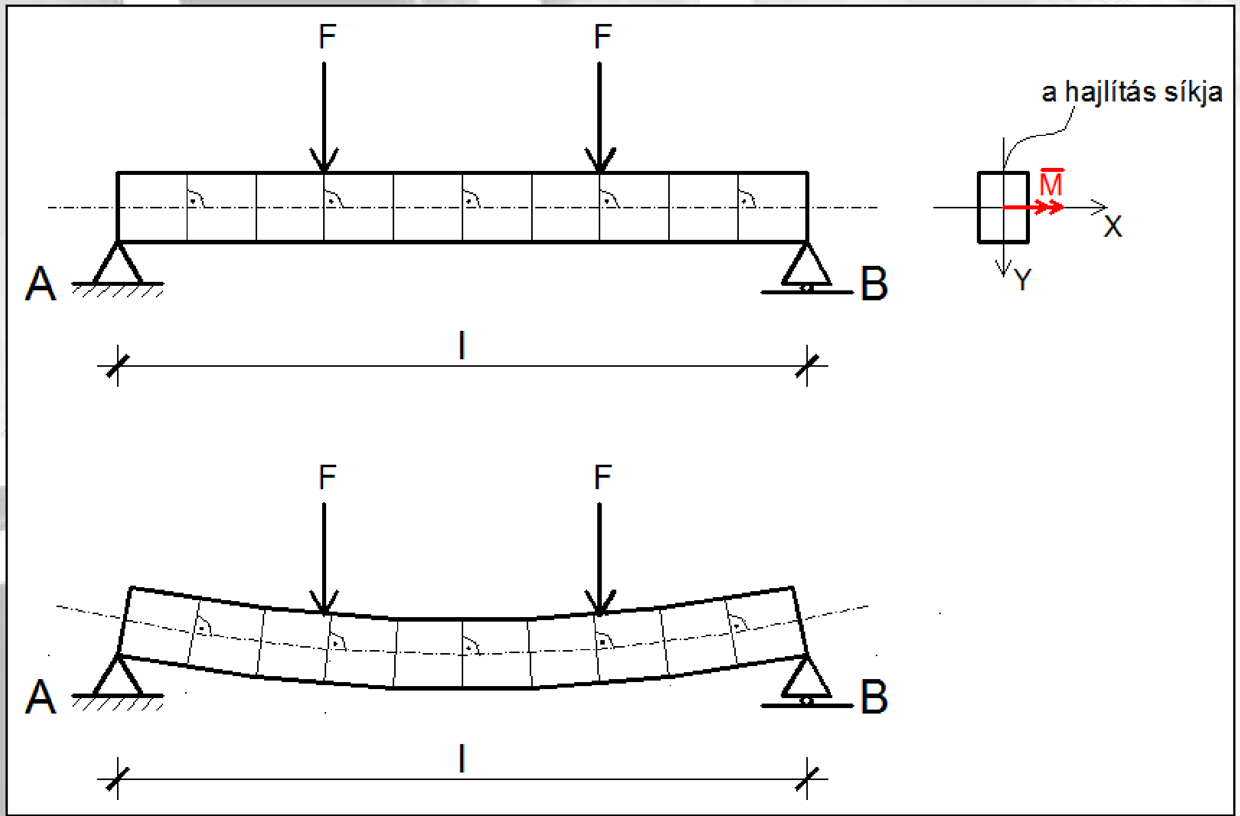
Egyenes hajlításról beszélünk, ha a hajlított tartó keresztmetszete szimmetrikus és a hajlítás síkja a szimmetriasík:



16. ábra. Egyenes hajlítás keletkezése

Bernoulli−Navier hipotézis:

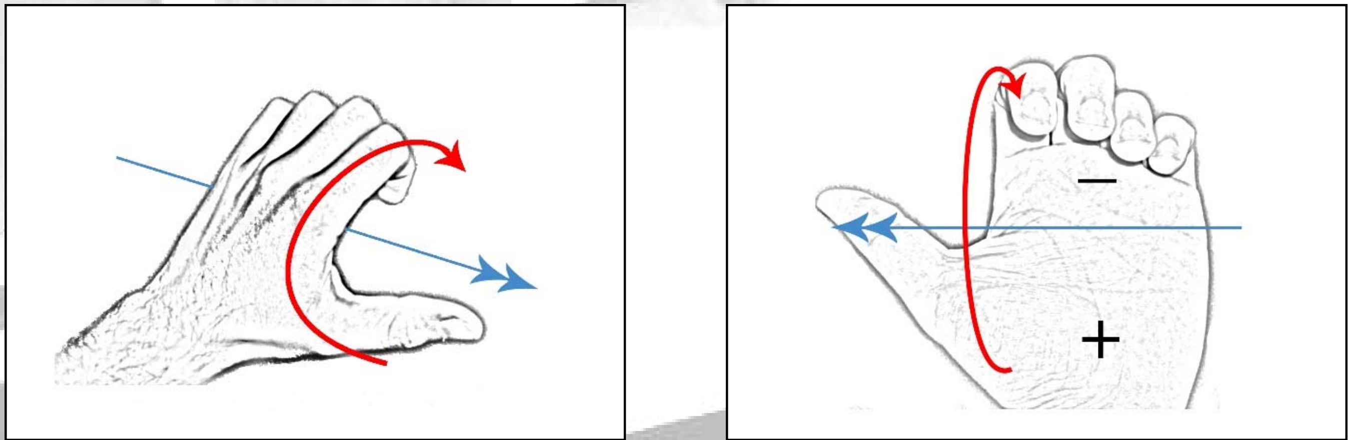
1. A rúd eredeti sík keresztmetszetei az alakváltozás után is síkok maradnak.
2. A rúd keresztmetszetei a rúdtengelyre merőlegesek és az alakváltozás után is merőlegesek maradnak.



17. ábra. Bernoulli−Navier hipotézis

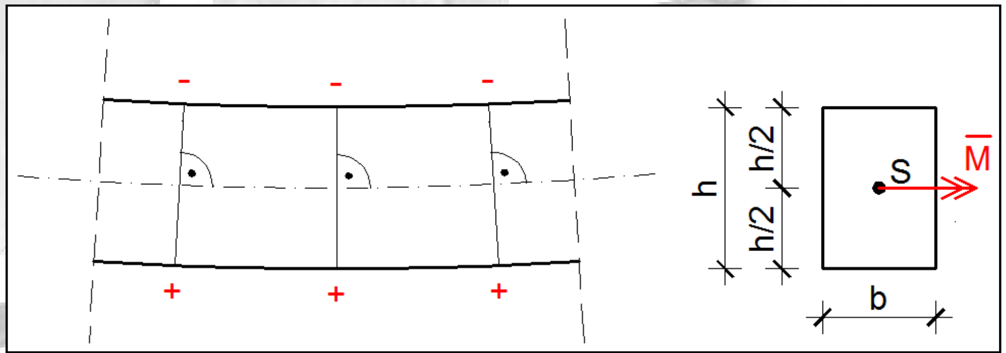
A nyomatékvektor irányának meghatározása a balkézszabály alapján:

A nyomatékvektor mindig merőleges a hajlítás tengelyére. A műveletet mindig bal kézzel, és mindig tenyérrel lefelé kell végezni. A tenyér alsó része húzott (+), míg a felső része a nyomott (−) előjelű lesz. A kéz forgásirányát a keresztmetszet síkjára merőleges síkban keletkező nyomaték, hajlítás nyila szemlélteti. A hüvelykujj iránya fogja megadni a nyomatékvektor irányát.



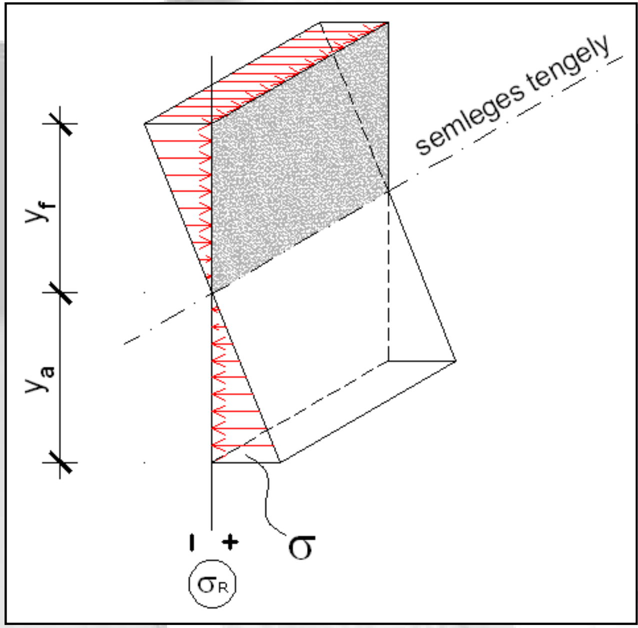
18-19. ábra. A nyomatékvektor irányának meghatározása a balkézszabály alapján

A *17. ábra* alapján a húzott öv a tartó alsó részén van, emiatt például a tartó középső keresztmetszetében keletkező normálfeszültség alól lesz pozitív (+), míg felül lesz negatív (−) előjelű. Természetesen egy tartón belül változhat, hogy a keresztmetszet melyik oldala lesz húzott és nyomott. Ez a nyomatéki ábra, illetve tulajdonképpen a terhelés függvénye. (A nyomatéki ábra mindig a húzott oldalra kerül, de a teher alapján változhat, hogy melyik a húzott és nyomott oldal. Emiatt nem szoktunk a nyomatéki ábrának előjelet adni.)



20. ábra. A nyomatékvektor irányának megállapítása

Rugalmas hajlítás esetén a semleges tengely helye egybeesik a súlyponti tengellyel. Ha feltételezzük, hogy a tartó rugalmas, azaz követi a Hooke−törvényt, akkor a vizsgált keresztmetszet alakváltozási, illetve feszültségi ábrája egy lineáris térbeli függvény lesz.



21. ábra. A hajlításból kapott normálfeszültségi ábra alakja

A hajlításból keletkező normálfeszültség számítása:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \left[\mathrm{kN/cm^2}\right]$$

ahol: σ – tiszta, egyenes hajlításból számított normálfeszültség;

M_x – hajlítónyomaték;

I_x – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „X" tengelyre;

y – a hajlítás tengelyétől a keresztmetszet valamely pontjának távolsága.

A legnagyobb húzó− illetve nyomófeszültség az alsó és felső szélső−szálakban keletkezik:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot y_{max} \left[kN/cm^2\right]$$

A tartó ellenőrzése és tervezése:

A hajlított tartón keletkező legnagyobb feszültséget hasonlítjuk össze a tartó anyagának szilárdsági határértékével:

$$\left|\sigma_M\right| \le \sigma_H$$

A méretezés és ellenőrzés történhet igénybevétel−összehasonlítással is:

$$M_{HR} = \frac{\sigma_H \cdot Ix}{y_{max}}$$

$$M_{HR} \ge M_M$$

ahol: M_{HR} – rugalmas állapotú határnyomaték;

σ_H – a normálfeszültség határértéke;

I_x – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „X” tengelyre;

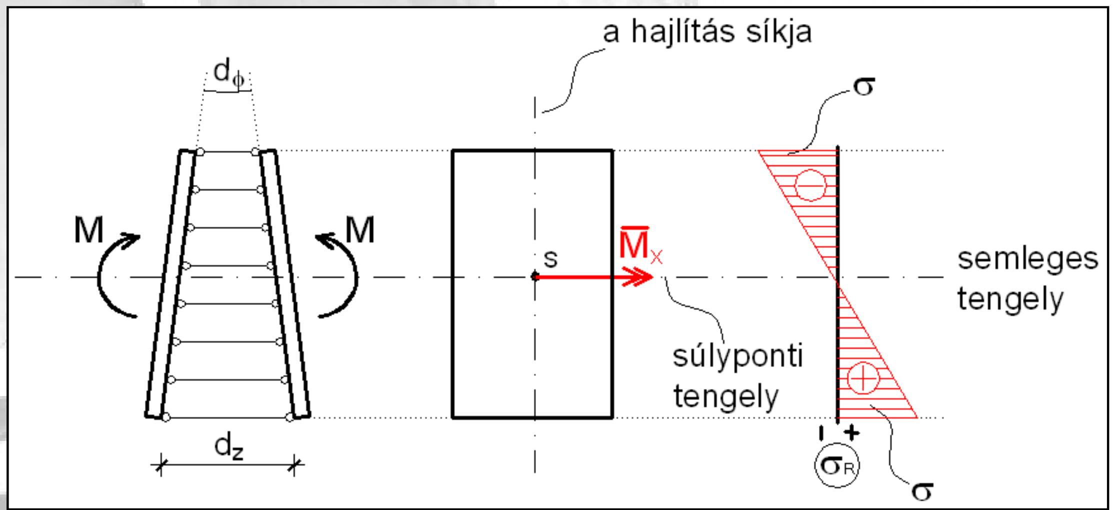
y_{max} – a hajlítás tengelyétől a keresztmetszet legtávolabbi pontjának távolsága.

Méretezésnél a keresztmetszet valamely méretét kell meghatározni úgy, hogy a legnagyobb hajlítónyomaték helyén keletkező feszültség ne haladja meg a szilárdsági határértéket.

3.2 Egyenes hajlítás képlékeny állapotban

Egy adott tartón lévő teher folyamatos növekedésével (lásd *16. ábra*) a tartón keletkező belső igénybevételek is növekednek. A vizsgált keresztmetszet viselkedésében átmenet tapasztalható.

Rugalmas állapot:



$$M \le M_{HR}$$

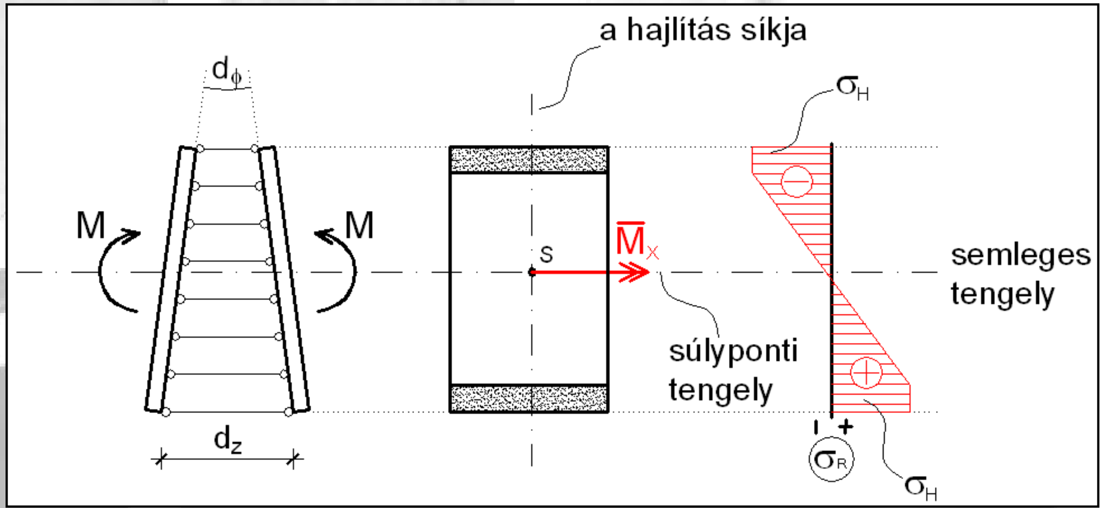
$$|\sigma_{max}| < \sigma_H$$

22. ábra. A rugalmas állapotú egyenes hajlításból kapott normálfeszültségi ábra alakja

Rugalmas – képlékeny állapot:

Terhelésnövekedés hatására az átmeneti állapotban a keresztmetszet egy része már képlékenyen, másik része még rugalmasan viselkedik. A feszültségek meghatározására speciális képleteket nem lehet felírni. A szélső szálak közelében a feszültségek nagysága egyenlő, mindenütt „σ_H" érték, ezért itt a normálfeszültségi ábra már téglalap alakú lesz.

A húzó– és nyomófeszültségek eredője egyenlő egymással. A belső feszültségrendszer nyomatéka egyenlő a külső nyomatékkal.



$$M_{HR} < M < M_{HK}$$

$$|\sigma_{max}| = \sigma_H$$

23. ábra. A rugalmas–képlékeny állapotú egyenes hajlításból kapott normálfeszültségi ábra alakja

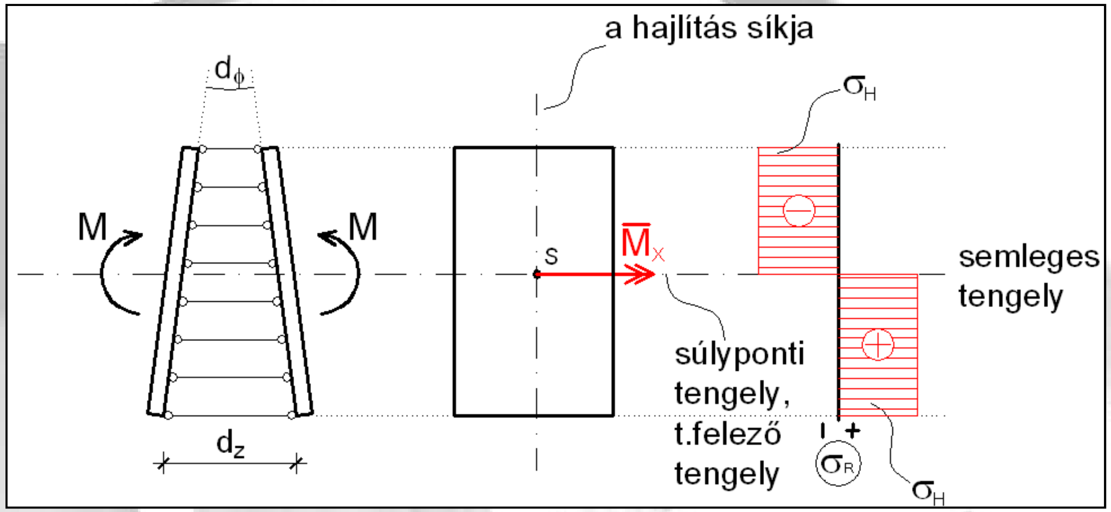
Képlékeny állapot:

További terhelésnövekedés hatására a tartó vizsgált keresztmetszete képlékeny állapotba kerül. A keresztmetszetben a hajlítónyomaték hatására úgynevezett képlékeny csukló alakul ki, itt nagy alakváltozás (elfordulás) jön létre (a rúd tengelyvonala megtörik). Ez a tartószerkezet teljes kimerülését jelenti.

A feszültségek nagysága egyenlő, mindenütt „σ_H" érték, ezért a normálfeszültségi ábra a teljes keresztmetszeten téglalap alakú lesz. A vetületi egyensúlyi egyenletből következően a keresztmetszet húzott és nyomott részét elválasztó semleges tengely egybeesik a területfelező tengellyel.

Kétszeresen szimmetrikus keresztmetszet esetében a súlyponti, a területfelező és a semleges tengely egybeesik (lásd *22−24. ábra*).

Nem kétszeresen szimmetrikus keresztmetszetek esetében a súlyponti tengely és a területfelező tengely csak speciális esetekben esik egybe.



24. ábra. Képlékeny állapotú egyenes hajlításból kapott normálfeszültségi ábra alakja

$$M = M_{HK}$$

$$|\sigma_{max}| = \sigma_H$$

A hajlított tartó képlékeny nyomatéki teherbírását több módon is meg lehet határozni:

1. A területfelezőre felírt statikai nyomatékok abszolútérték–összegéből és az anyag szilárdsági határértékéből számítva:

$$M_{HK} = \sigma_H \cdot \left(|S_{ny}| + |S_h| \right)$$

ahol: M_{HK} – képlékeny állapotú határnyomaték;

σ_H – az anyag szilárdsági határértéke;

S_{ny}, S_h – a nyomott és húzott keresztmetszetrész statikai nyomatéka a területfelező (semleges) tengelyre.

2. A félkeresztmetszet statikai nyomatékából és az anyag szilárdsági határértékéből számítva:

$$M_{HK} = 2 \cdot S_0 \cdot \sigma_H$$

ahol: M_{HK} – képlékeny állapotú határnyomaték;

σ_H – az anyag szilárdsági határértéke;

S_0 – a félkeresztmetszet statikai nyomatéka a teljes keresztmetszet súlyponti tengelyére.

3.3 Képlékeny tartalék

Ha a keresztmetszet rugalmas és képlékeny nyomatéki teherbírását összehasonlítjuk egymással, akkor megkapjuk a keresztmetszet képlékeny tartalékát vagy a többletteherbírását.

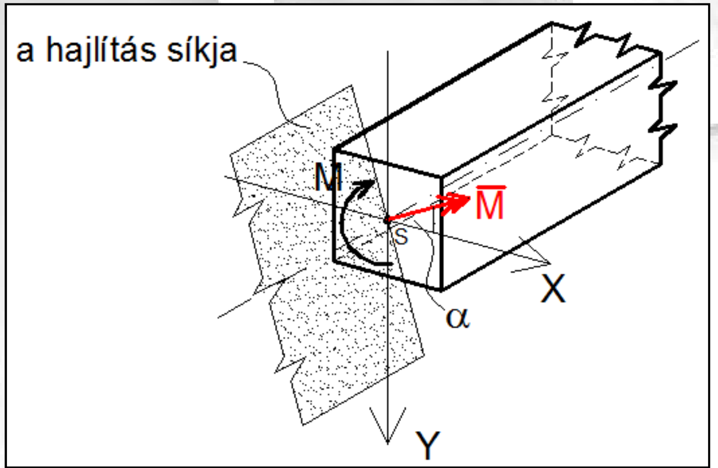
$$T = M_{HK} - M_{HR} \; [\mathrm{kNm}]$$

Százalékban kifejezve:

$$T = \frac{M_{HK} - M_{HR}}{M_{HR}} \cdot 100 \; [\%]$$

4. Ferde hajlítás

Ha egy rúdkeresztmetszetre olyan erőpár működik, amelynek vektora a keresztmetszet síkjában van, de nem esik egybe egyik súlyponti tehetetlenségi főiránnyal sem, akkor ferde hajlításról beszélünk. Ilyenkor a semleges tengely nem esik egybe a hajlítónyomaték vektorával, hanem azzal szöget zár be.



25. ábra. Ferde hajlítás

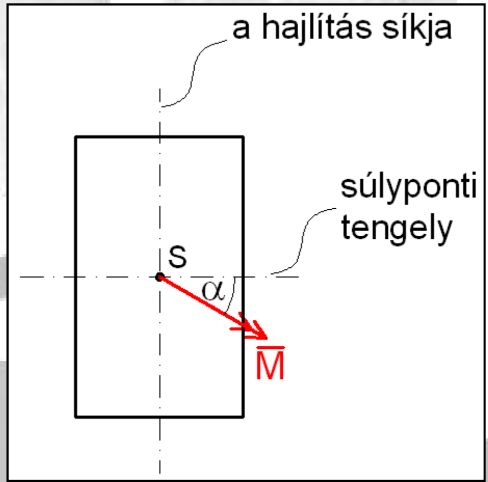
4.1 Rugalmas állapotban

Rugalmas állapotú keresztmetszet ferde hajlításánál csak azt a speciális, de gyakori esetet vizsgáljuk, amikor a keresztmetszet főtengelyei ismertek.

(Szimmetrikus keresztmetszet esetén a szimmetriatengely az egyik főtengely, a másik pedig erre merőleges.) Ennek megfelelően a vizsgálat tárgyát mindig legalább egyszeresen szimmetrikus keresztmetszetek képezik.

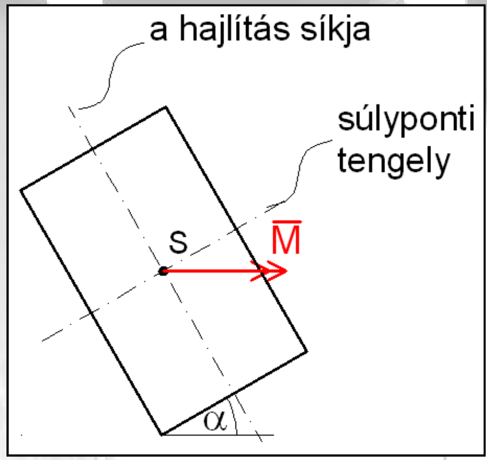
A feladatokban a keresztmetszet kétféle módon lehet megadva:

1. A keresztmetszet a „talpán” áll, azaz a tehetetlenségi főirányok (X, Y) vízszintesek és függőlegesek. Ebben az esetben a nyomatékvektor iránya valamely főtengelytől mért szög segítségével van megadva:



26. ábra. A nyomatékvektor irányának megadása I.

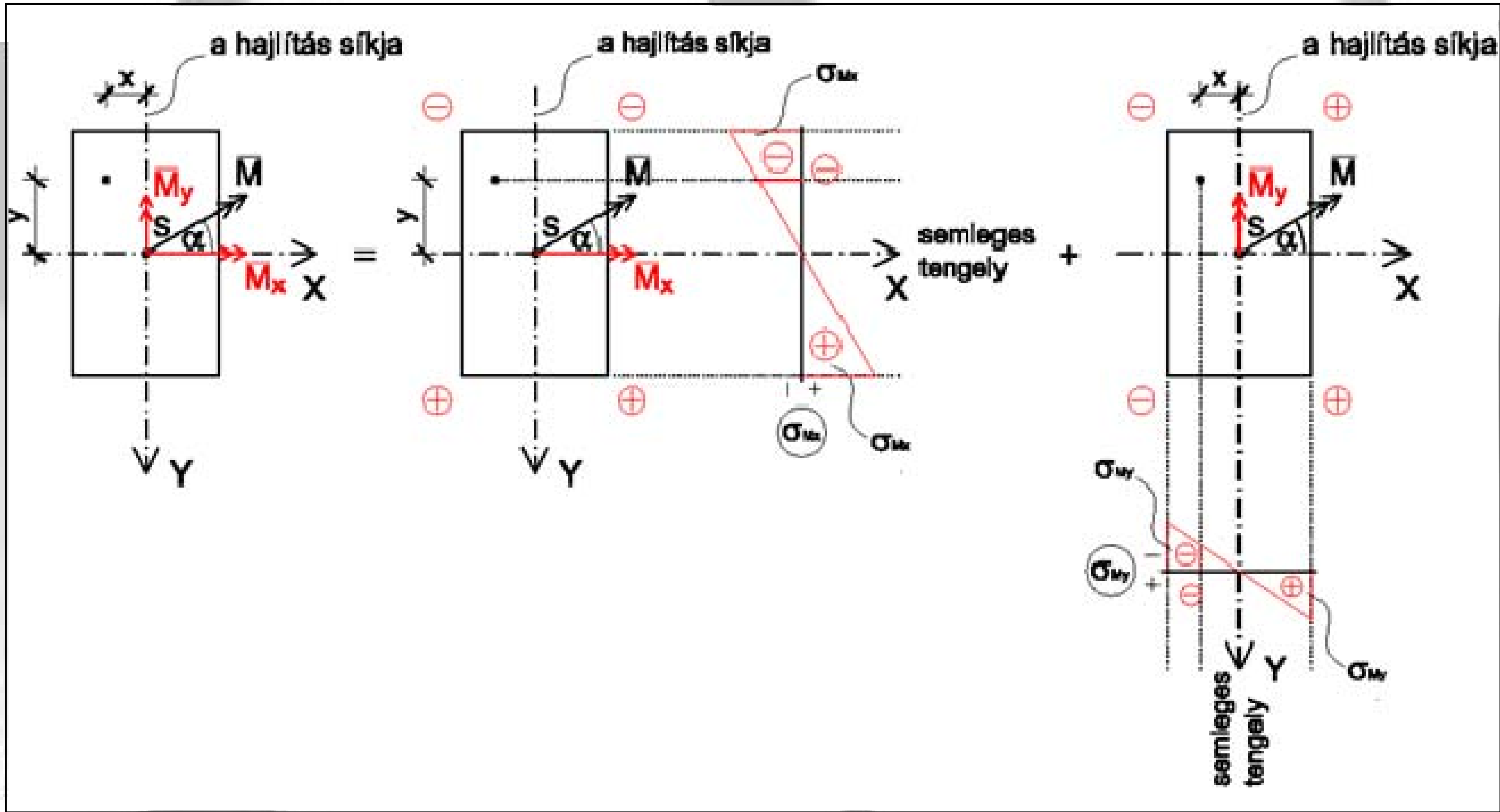
2. A keresztmetszet megadott szögérték alapján meg van döntve. A tehetetlenségi főirányok nem vízszintesek és függőlegesek. Ebben az esetben a nyomatékvektor iránya vízszintes vagy függőleges helyzetű:



27. ábra. A nyomatékvektor irányának megadása II.

A nyomatékvektor irányának kétféle megadása egyenértékű.

Az alakváltozások és a feszültségek eloszlása tulajdonképpen ugyanolyan, mint a tiszta, egyenes hajlítás esetében. A ferde hajlítást, illetve a normálfeszültségek kiszámítását két egyenes hajlításra vezethetjük vissza. A keletkező feszültségeket az egymásrahalmozás módszerével összegezni kell.



28. ábra. A nyomatékvektor felbontása összetevőire

A nyomatékvektor felbontása szögfüggvények segítségével lehetséges:

$$M_x = \cos\alpha \cdot M$$

$$M_y = \sin\alpha \cdot M$$

A keresztmetszet pontjaiban keletkező normálfeszültségek előjelének meghatározása külön−külön történik a tiszta, egyenes hajlításnál megfogalmazott balkézszabály szerint. Eltérés, hogy a vektor(ok) iránya az adott, így ehhez kell az előjeleket rögzíteni.

Célszerű a keresztmetszetet kétszer lerajzolni, s azon külön az „M_x” és külön az „M_y” nyomatékvektorból adódó előjeleket feltüntetni.

A ferdehajlításból keletkező normálfeszültség számítása általánosan:

$$\sigma = \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x$$

ahol: σ – a ferde hajlításból számított normálfeszültség;

M_x, M_y – az „*X*” és „*Y*” irányú nyomaték értéke;

I_x, I_y – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „*X*” és „*Y*” tengelyekre.

A semleges tengely helyzetének meghatározása

A semleges tengelynek legalább két pontját szükséges meghatározni. Rugalmas állapotú ferde hajlítás esetében a semleges tengely átmegy a keresztmetszet súlypontján. Tehát a keresztmetszet súlypontja a semleges tengely egyik pontja. A másik pont meghatározására több lehetőség is van.

1. Számítással:

A semleges tengely iránytangensének meghatározása:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{I_{max}}{I_{min}} \cdot \mathrm{tg}\alpha$$

ahol: I_{max} – a keresztmetszet maximális tehetetlenségi nyomatéka (inerciája);

I_{min} – a keresztmetszet minimális tehetetlenségi nyomatéka (inerciája).

vagy:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{M_y \cdot I_x}{M_x \cdot I_y}$$

ahol: M_x, M_y – az „*X*” és „*Y*” irányú nyomaték értéke;

I_x, I_y – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „*X*” és „*Y*” tengelyekre.

2. Szerkesztéssel:

A semleges tengely második pontját geometriai szerkesztéssel is meghatározhatjuk. A második pontot a keresztmetszet tetszőleges oldaléle mentén keletkező „σ” normálfeszültség ábra semleges pontjának, (ahol a feszültség értéke nulla) a keresztmetszet oldalélére való visszavetítésével kapjuk meg.

4.2 Képlékeny állapot

Képlékeny keresztmetszet esetén a számítás elve teljesen megegyezik a tiszta, egyenes hajlításnál leírtakkal. A számítás általában hosszadalmas. A feladatokban nem kell képlékeny állapotot számolni.

Felhasznált irodalom

ARNOLD ILDIKÓ, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER: *Mechanika 2. – szilárdságtan −*. Janus Pannonius Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Pécs, 1998.

DR. SALÁT GÉZA: *Szilárdságtani példatár.* Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Építőipari Kar Tartószerkezetek Tanszék, Pécs, 1974.

SZAKÁCS JÓZSEF, NAGY ZOLTÁN: *Mechanika. Módszertani útmutató és példatár II. évfolyam Magas− és Mélyépítő szakos levelezős hallgatók részére 2−3−4. konzultáció.* Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, é.n.