



PÉCSI TUDOMÁNYEGYETEM  
MŰSZAKI ÉS INFORMATIKAI KAR

# Mechanika II. (szilárdságtan)

## 4. előadás

Összetett hajlítás, külpontos húzás-nyomás  
húzószilárdsággal rendelkező anyagok esetén

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék



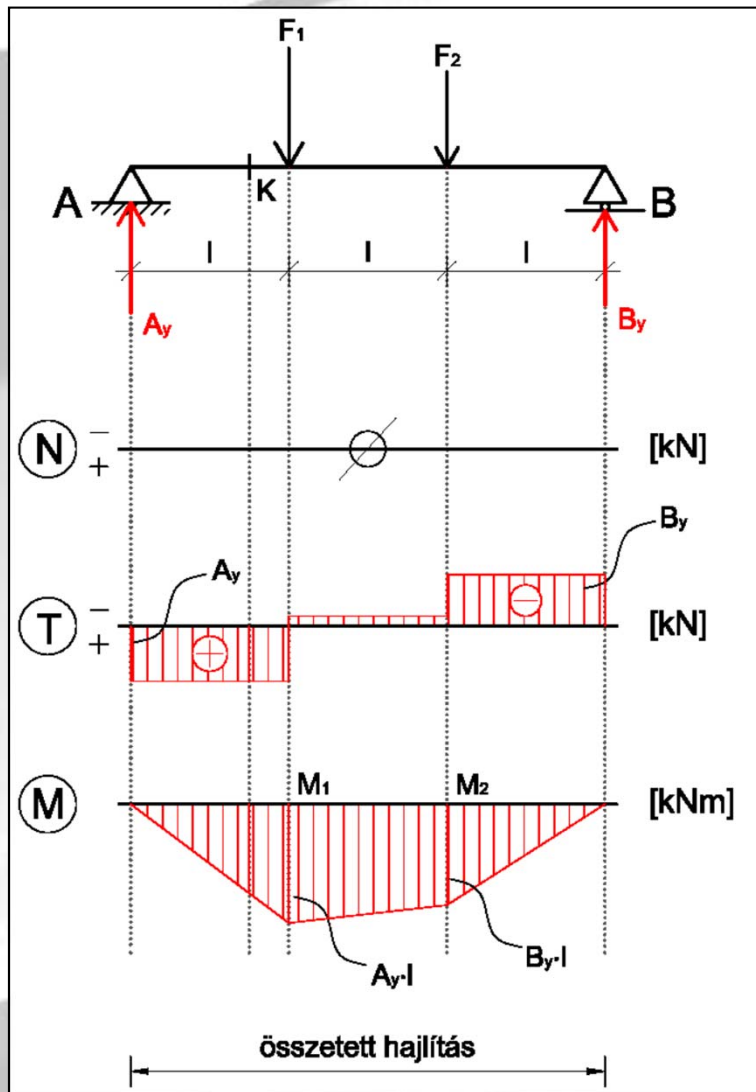
# 1. Összetett hajlítás

Ha egy rúd valamely szakaszán egyidejűleg többféle igénybevétel is működik, akkor összetett igénybevételről beszélünk.

Összetett igénybevétel esetén a rúd tetszőleges pontjában különféle feszültségek ébrednek. Ezek számításánál használhatók az egyszerű igénybevételeknél használt eljárások. Ha a rúdszakaszon egyszerre hajlítónyomaték és nyíróerő működik, akkor az igénybevétel összetett hajlítás, vagy más néven hajlítással egyidejű nyírás.

A gyakorlatban ez a leggyakoribb igénybevétel típus.

A hajlítónyomatékkal egyidejűleg működő nyíróerő a keresztmetszet síkjában nyírófeszültséget okoz. A nyírófeszültségek duális tulajdonsága következtében a gerenda vízszintes síkmetszetein ugyanakkora nyírófeszültségek keletkeznek. A nyírófeszültségek eloszlása a keresztmetszeten szélességi irányban egyenletes, míg magassági irányban nem egyenletes.



1. ábra. Összetett hajlítás keletkezése

## Egyszerűsítő feltevések:

- a keresztmetszetnek legalább egy szimmetriatengelye van,
- a terhelés síkja a szimmetriasíkkal egybeeső vagy arra merőleges.

A két feltevés értelmében tiszta, egyenes hajlítás (rugalmas állapotban) és nyírás kombinációját vizsgáljuk, minden egyéb esetben (nem szimmetrikus keresztmetszet, ferde hajlítás, képlékeny állapot) a megoldás bonyolult, ezért az általános esetet nem tárgyaljuk

## A hajlításból keletkező normálfeszültség számítása:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad [\text{kN/cm}^2]$$

ahol:  $\sigma$  – tiszta, egyenes hajlításból számított normálfeszültség;

$M_x$  – hajlítónyomaték;

$I_x$  – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „X” tengelyre;

$y$  – a hajlítás tengelyétől a keresztmetszet valamely pontjának távolsága.

## A nyírásból keletkező normálfeszültség számítása:

$$\tau = \frac{S \cdot T}{b \cdot I_x} \left[ \text{kN/cm}^2 \right]$$

ahol:  $\tau$  – nyírásból számított nyírófeszültség;


$S$  – a keresztmetszet vizsgált pontja alatti vagy feletti terület statikai nyomatéka a hajlítás tengelyére;

$b$  – a vizsgált pontban a keresztmetszet szélessége;

$I_x$  – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „X” tengelyre.

### Függőleges nyíróerő esetén:

- A keresztmetszet alsó és felső szélső szálaiban a nyírófeszültség „ $\tau$ ” értéke mindig nulla, mivel ezekhez a helyekhez tartozó statikai nyomaték „ $S$ ” értéke nulla (például, ha a felső szélső szálat vizsgáljuk, akkor értelemszerűen felette már nincs területrész, tehát nincs statikai nyomaték sem).

- 
- Egy adott keresztmetszetben a nyíróerő „ $T$ ” és a keresztmetszet inerciájának értéke „ $I_x$ ” állandó, a szélesség „ $b$ ” és a statikai nyomaték „ $S$ ” értéke általában változó, ezért az utóbbiak befolyásolják a nyírófeszültség nagyságának változását.
  - Ha a keresztmetszet oldalélei párhuzamos egyenesek, akkor a nyírófeszültség ábra másodfokú parabola lesz.
  - Ahol a keresztmetszet szélessége „ $b$ ” ugrásszerűen változik, ott a nyírófeszültségek nagysága is ugrásszerűen (a „ $b$ ” szélességgel fordított arányban) változik.

### **Nem szimmetrikus keresztmetszetek:**

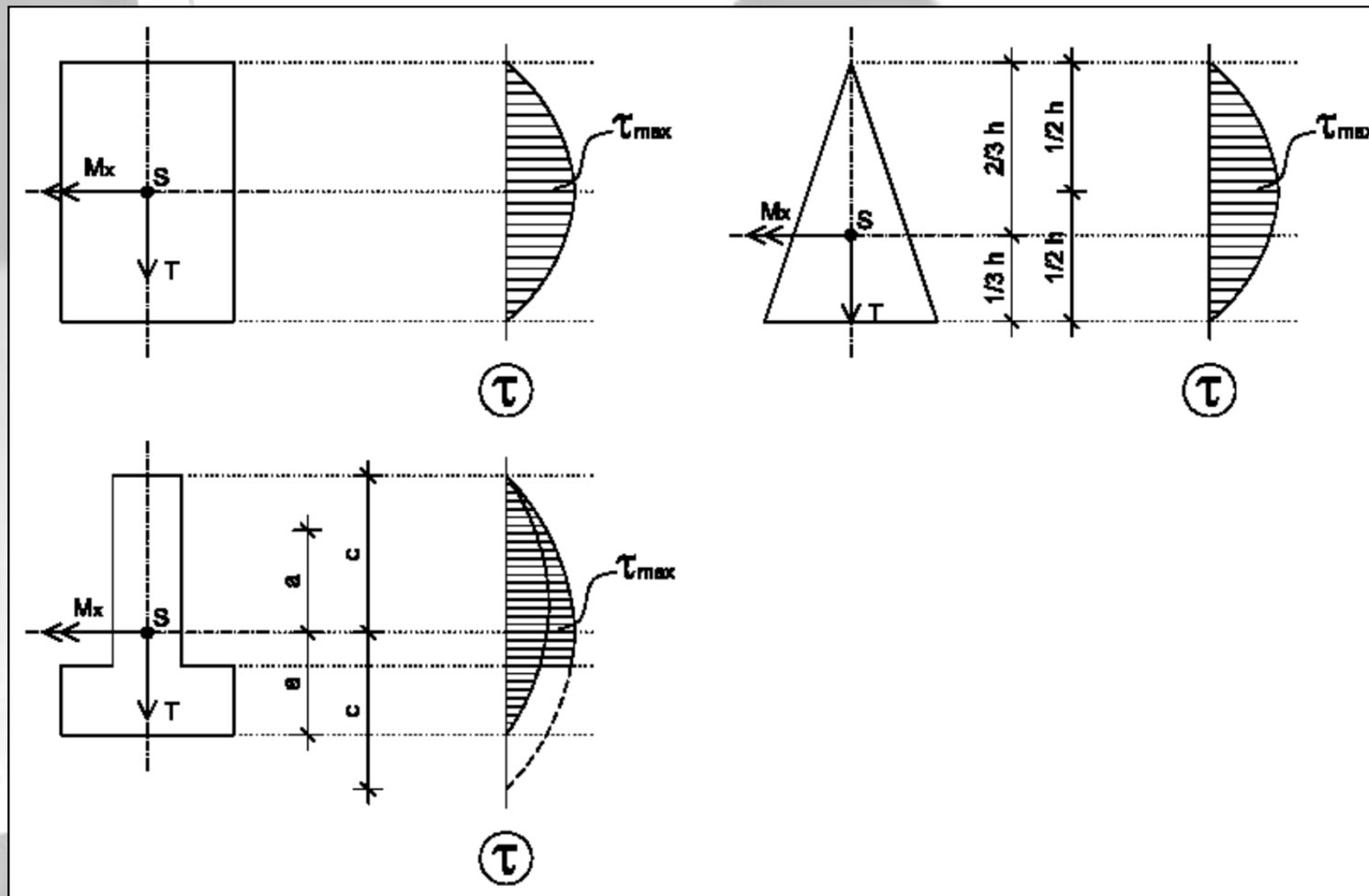
- Ilyen keresztmetszetek esetén a nyírófeszültségek eredője nem megy át a keresztmetszet súlypontján. A külső nyíróerők és a belső feszültségek eredője erőpárt alkot, amelynek következtében a rúdon csavaró-igénybevétel is keletkezik. A csavarás megakadályozható, ha a külső nyíróerő a keresztmetszet nyírási (csavarási) középpontján megy át. A nyírási középpont meghatározása általában körülményes.



## **Részben plasztifikálódott keresztmetszet:**

- A normálfeszültség hatására képlékeny állapotú keresztmetszetrész nyírófeszültséget nem képes felvenni.
- A hajlítónyomaték hatására teljesen plasztifikálódott a keresztmetszet (képlékeny csukló), ezért nyíróerőt szintén nem képes felvenni. A nyomatéki maximum helyén a nyíróerő értéke általában nulla.
- A részben plasztifikálódott keresztmetszetnél a képlékeny állapotú rész nem vesz fel nyíróerőt, a rugalmas állapotú rész hordja a teljes nyíróerőt. Ezen a részen a nyíróerők úgy oszlanak meg, mintha a rúd keresztmetszete a rugalmas állapotú résszel lenne egyenlő.

# Egyszerű keresztmetszetek nyírőfeszültség ábrái:



2. ábra. Egyszerű keresztmetszetek nyírőfeszültség ábrái

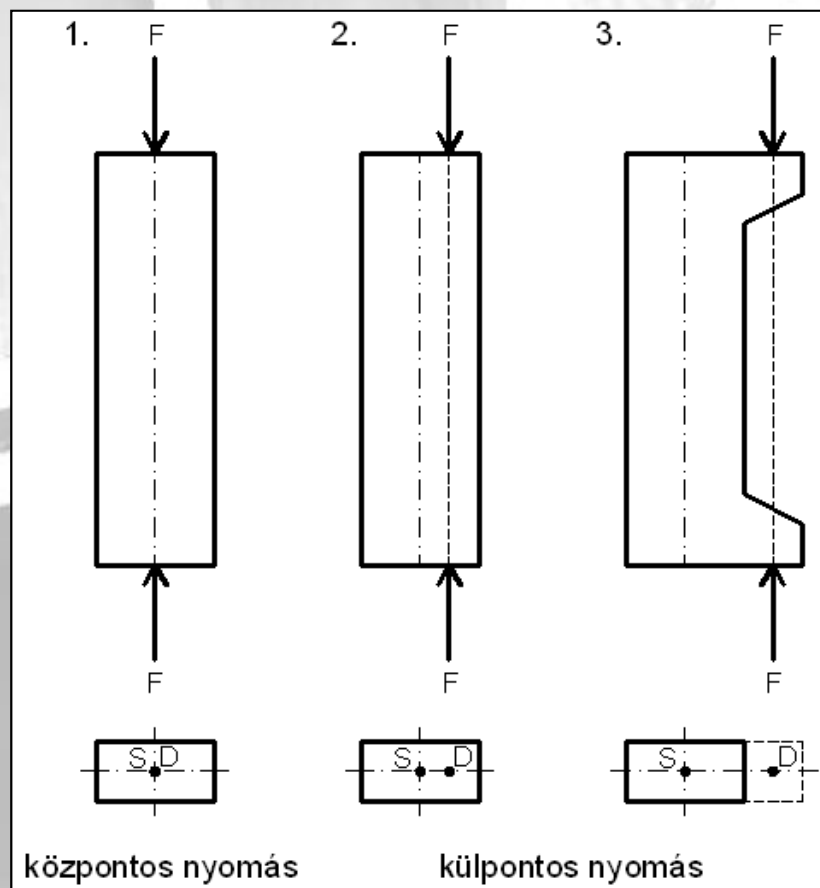




## 2. Egyszeres külpontosság

### 2.1 Külpontos húzó és nyomó igénybevétel

Külpontos húzásról illetve nyomásról beszélünk akkor, ha a keresztmetszetet terhelő erő a keresztmetszet síkjára merőleges (húzza vagy nyomja a keresztmetszetet), a rúd hossz tengelyével párhuzamos, de a dőféspont nem esik egybe a keresztmetszet súlypontjával.



3. ábra. A dőféspont helyzete

1. eset: A dőféspont egybeesik a keresztmetszet súlypontjával, az igénybevétel központos nyomás.
2. eset: A dőféspont a keresztmetszet határoló élei között van, az igénybevétel külpontos nyomás.
3. eset: A dőféspont a keresztmetszeten kívül van, az igénybevétel külpontos nyomás.

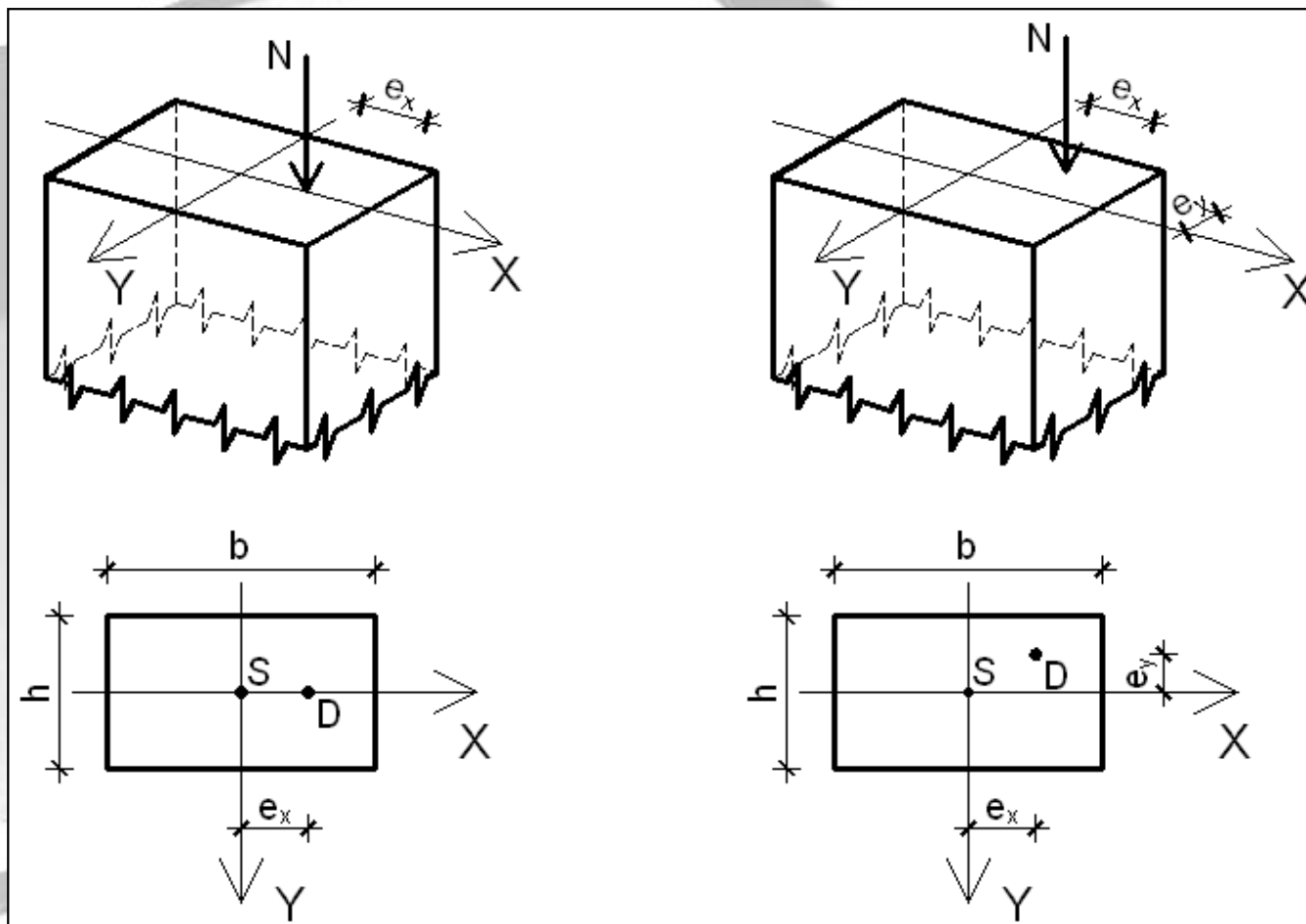
## **Egyszerűsítő feltevések:**

- a rúd egyenes tengelyű, szimmetrikus keresztmetszetű,
- a hossz méret a keresztmetszeti méreteknél lényegesen nagyobb,
- a rúd anyaga rugalmas, homogén és izotróp, mind húzó, mind nyomófeszültségek felvételére alkalmas,
- a rúd kihajlását nem vesszük figyelembe.

A szerkezeti anyagok egy részének húzó- és nyomószilárdsága egyforma nagy vagy közel azonos (fémek, műanyag, fa). A szerkezeti anyagok másik csoportja nyomásnak ellenáll, húzószilárdsággal igen minimálisan vagy egyáltalán nem rendelkezik (tégla- és kőfalazatok, beton, teherhordó talaj).

## **A dőléspont helye alapján két esetet különböztetünk meg:**

1. Egyszeres külpontosság: a terhelő erő dőléspontja rajta van az egyik főtengelyen,
2. Kétszeres külpontosság: a terhelő erő dőléspontja nincs rajta egyik főtengelyen sem.



4. ábra. Egyszeres és kétszeres külpontosság

## 2.2 Egyszeres külpontosság

Egyszeres külpontosságú, húzóerővel (lehetne nyomóerővel is) terhelt húzószilárdsággal rendelkező anyagú szerkezet rugalmas állapotban:

Minden összetett igénybevétel visszavezethető egyszerű igénybevételekre. Ez alapján a tárgyalt külpontos húzás létrehozható egy központos húzás és egy merőleges hajlítás összegeként.

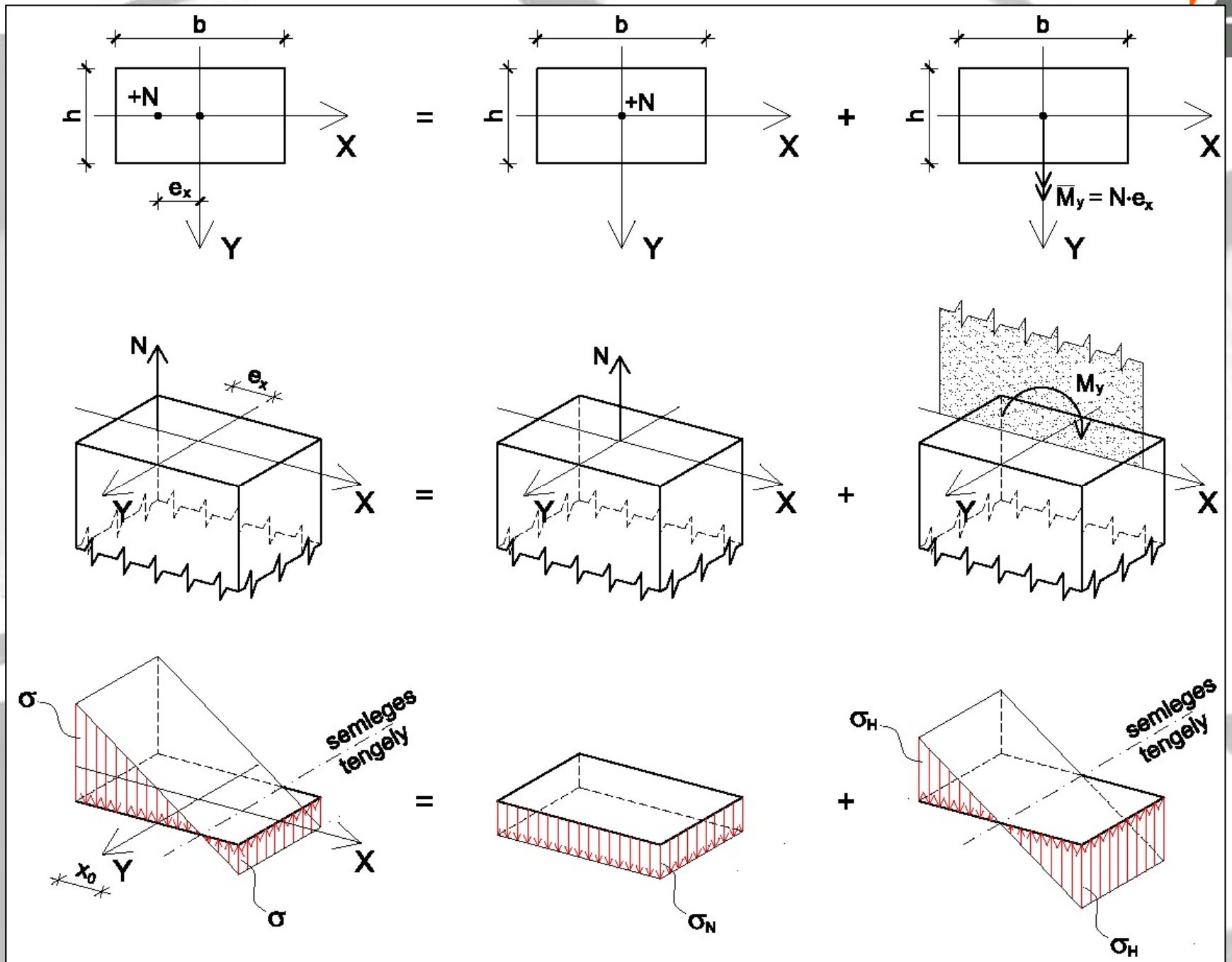
A hajlítónyomaték keletkezése:

$$M_y = N \cdot e_x$$

ahol:  $M_y$  – a hajlítónyomaték „Y” irányban;

$N$  – normálerő;

$e_x$  – az erő dőfpontja és a keresztmetszet súlypontja közötti távolság „X” irányban.



5. ábra. Egyszeres külpontosság felbontása egyszerű igénybevételekre

A normálerőből és hajlításból keletkező normál feszültség számítása általánosan:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad [\text{kN/cm}^2]$$

vagy

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad [\text{kN/cm}^2]$$

ahol:  $\sigma$  – a normálerőből és a tiszta egyenes hajlításból számított normál feszültség összege;

$N$  – normálerő;

$A$  – a keresztmetszet felülete;

$M_x, M_y$  – az „ $X$ ” és „ $Y$ ” irányú hajlítónyomaték értéke;

$I_x, I_y$  – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „ $X$ ” és „ $Y$ ” tengelyekre;

$x, y$  – a hajlítás tengelyétől a keresztmetszet valamely pontjának (vagy szélső szálának) távolsága.

A síkbeli tartók esetében mindig csak egyszeres külpontosság lehet!

## 2.3 Kétszeres külpontosság

Kétszeres külpontosságú, nyomóerővel (lehetne húzóerővel is) terhelt húzószilárdsággal rendelkező anyagú szerkezet rugalmas állapotban:

Minden összetett igénybevétel visszavezethető egyszerű igénybevételekre. Ez alapján a tárgyalt külpontos nyomás létrehozható egy központos nyomás és két különböző síkban működő merőleges hajlítás összegeként.

A hajlítónyomaték keletkezése:

$$M_x = N \cdot e_y$$

$$M_y = N \cdot e_x$$

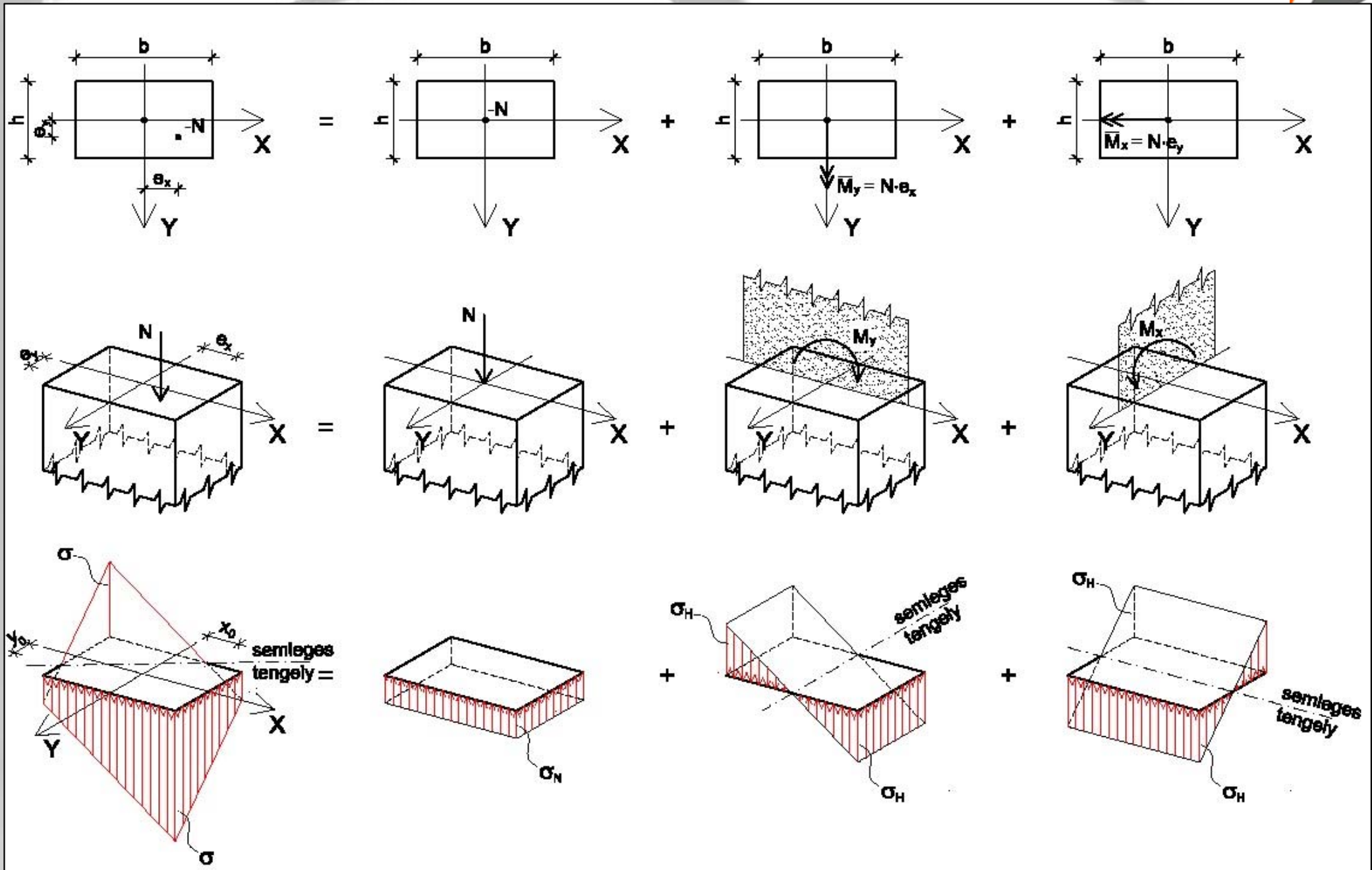
ahol:  $M_x$  – a hajlítónyomaték „X” irányban;

$M_y$  – a hajlítónyomaték „Y” irányban

$N$  – normálerő;

$e_x$  – az erő dőféspontja és a keresztmetszet súlypontja közötti távolság „X” irányban;

$e_y$  – az erő dőféspontja és a keresztmetszet súlypontja közötti távolság „Y” irányban.



6. ábra. Kétszeres külpontosság felbontása egyszerű igénybevételekre



A normálerőből és hajlításból keletkező normál feszültség számítása általánosan:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} \cdot y \pm \frac{M_y}{I_y} \cdot x \quad [\text{kN/cm}^2]$$

ahol:  $\sigma$  – a normálerőből és a tiszta egyenes hajlításból számított normál feszültség összege;

$N$  – normálerő;

$A$  – a keresztmetszet felülete;

$M_x, M_y$  – az „ $X$ ” és „ $Y$ ” irányú hajlítónyomaték értéke;

$I_x, I_y$  – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „ $X$ ” és „ $Y$ ” tengelyekre;

$x, y$  – a hajlítás tengelyétől a keresztmetszet valamely pontjának (vagy szélső szálának) távolsága.

## A semleges tengely helyzetének meghatározása

Kétszeres külpontosság esetén „ $x_0$ ” és „ $y_0$ ” a semleges tengely és a főtengely metszéspontjainak helyét adja meg. A negatív előjel arra utal, hogy a semleges tengely a dőfésponthoz képest a keresztmetszet ellenkező oldalán helyezkedik el.

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{e_x}$$
$$y_0 = -\frac{i_x^2}{e_y}$$

ahol:  $x_0, y_0$  – a keresztmetszet súlypontja és a semleges tengely közötti távolság;

$i_x^2, i_y^2$  – a keresztmetszet inerciasugarának négyzete;

$e_x, e_y$  – az erő dőfésponthoz és a keresztmetszet súlypontja közötti távolság.



Az inerciasugar négyzetének számítása:

A semleges tengely második pontját geometriai szerkesztéssel is meghatározhatjuk. A második pontot a keresztmetszet tetszőleges olda

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}$$

$$i_y^2 = \frac{I_y}{A}$$

ahol:  $i_x^2, i_y^2$  – a keresztmetszet inerciasugarának négyzete;

$I_x, I_y$  – a keresztmetszet tehetetlenségi nyomatéka (inerciája) a súlyponti „ $X$ ” és „ $Y$ ” tengelyekre;

$A$  – a keresztmetszet felülete.



## Felhasznált irodalom

**ARNOLD ILDIKÓ, HAJÓSNÉ TEMESI ESZTER:** *Mechanika 2. – szilárdságtan –*. Janus Pannonius Tudományegyetem Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Pécs, 1998.

**DR. SALÁT GÉZA:** *Szilárdságtani példatár*. Pollack Mihály Műszaki Főiskola, Építőipari Kar Tartószerkezetek Tanszék, Pécs, 1974.

**SZAKÁCS JÓZSEF, NAGY ZOLTÁN:** *Mechanika. Módszertani útmutató és példatár II. évfolyam Magas- és Mélyépítő szakos levelezős hallgatók részére 2–3–4. konzultáció*. Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, é.n.