



Mechanikai alapismeretek I. (statika)

2. előadás

Síkbeli tartók egyensúlyozása, reakcióerők meghatározása, rácsos tartók számítása csomóponti módszerrel és a hármas átmetszés módszerével

Szabó Imre Gábor

Pécsi Tudományegyetem Műszaki és Informatikai Kar

Építőmérnök Tanszék

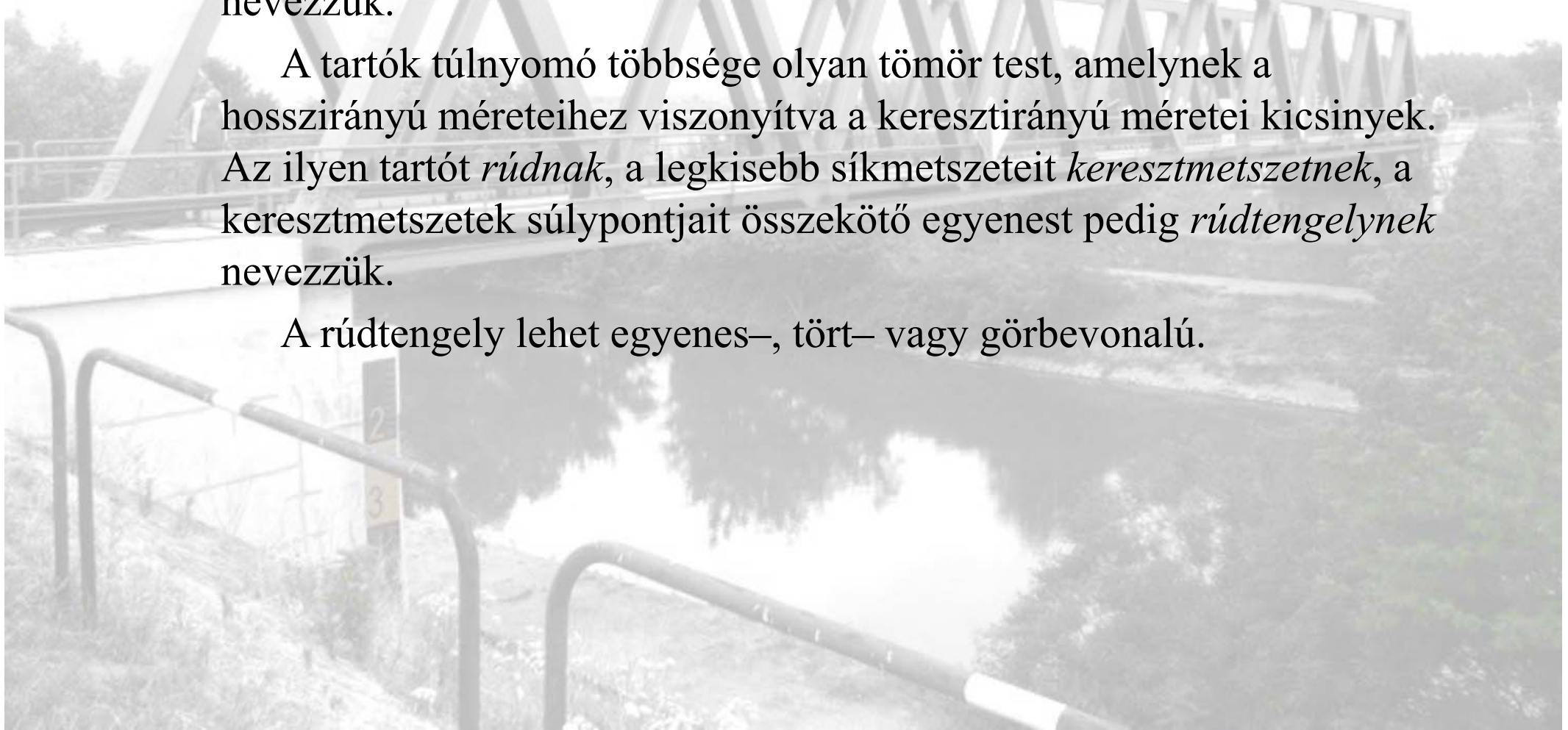
1. Síkbeli tartószerkezetek, tartószerkezetek statikája

1.1 Síkbeli tartószerkezetek

A teherhordásra szolgáló szerkezeteket *tartóknak*, a megtámasztásukra vagy helyzetük rögzítésére szolgáló berendezéseket *támaszoknak* (*kényszereknek*) nevezzük. Amennyiben az erők a tartó síkjában hatnak, akkor *síkbeli tartónak*, egyébként *térbeli tartónak* nevezzük.

A tartók túlnyomó többsége olyan tömör test, amelynek a hosszirányú méreteihez viszonyítva a keresztirányú méretei kicsinyek. Az ilyen tartót *rúdnak*, a legkisebb síkmetszeteit *keresztmetszetnek*, a keresztmetszetek súlypontjait összekötő egyenest pedig *rúdtengelynek* nevezzük.

A rúdtengely lehet egyenes–, tört– vagy görbevonalú.



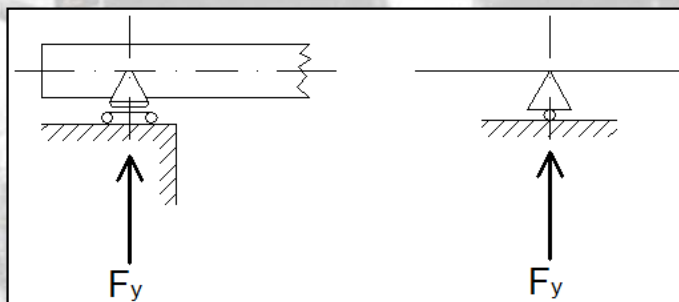
1.2 A tartók megtámasztási módjait statikai szempontból osztályozhatjuk

1.2.1 Gördülő vagy csúszó alátámasztás

Ebben az esetben a támaszerő (reakcióerő) helye és iránya meghatározott. A támaszerő iránya mindig merőleges az alátámasztás síkjára. Ez a megtámasztási mód csak egyetlen ismeretlent tartalmaz.



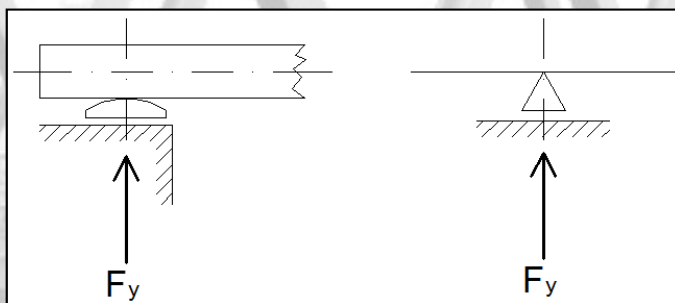
1. kép. Gördülő alátámasztás kialakítása [Szabó I. G. 2012]



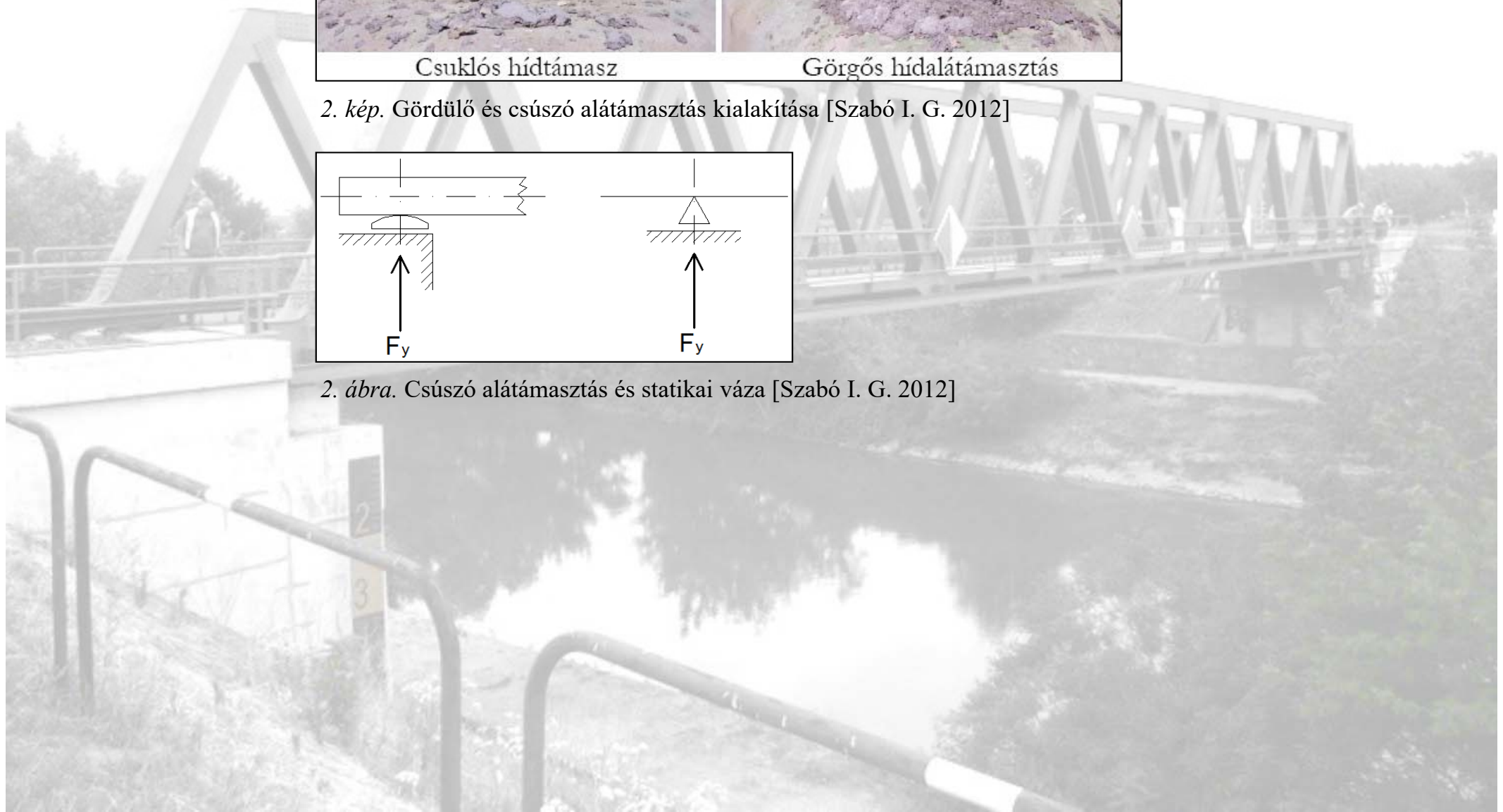
1. ábra. Gördülő alátámasztás és statikai váza [Szabó I. G. 2012]



2. kép. Gördülő és csúszó alátámasztás kialakítása [Szabó I. G. 2012]

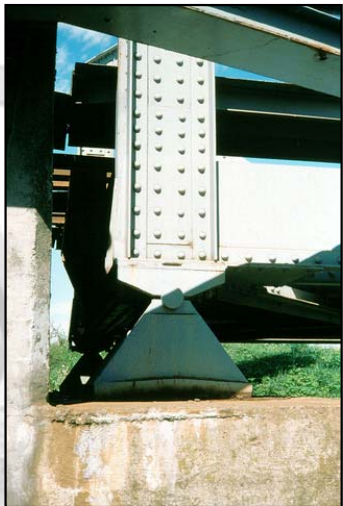


2. ábra. Csúszó alátámasztás és statikai váza [Szabó I. G. 2012]

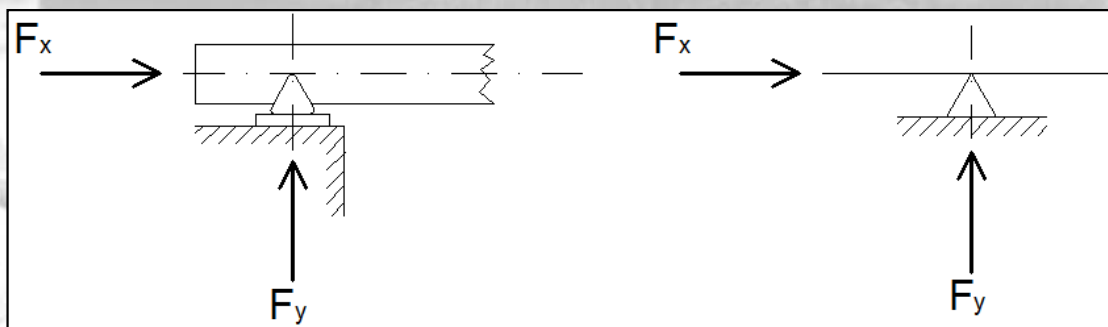


1.2.2 Álló–csuklós alátámasztás

Ebben az esetben a támaszerő helye ismert, azonban a nagysága és iránya ismeretlen. Ez a megtámasztási mód két ismeretlent tartalmaz.



3. kép. Álló–csuklós alátámasztás kialakítása [Szabó I. G. 2012]



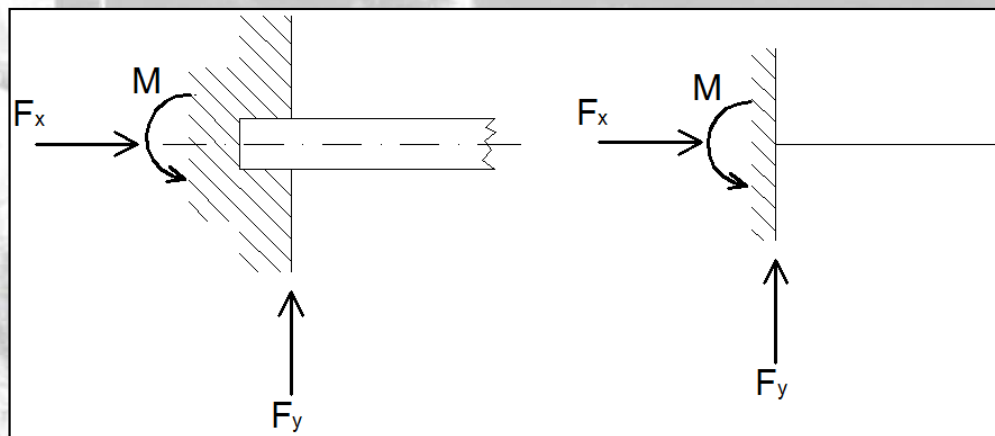
3. ábra. Álló–csuklós alátámasztás és statikai váza [Szabó I. G. 2012]

1.2.3 Befogott (konzolos) megtámasztás

Ebben az esetben a reakciók megakadályozzák a befogott tartóvég elmozdulását és elfordulását egyaránt. A tartóvég elfordulását a befogásnál keletkező nyomaték akadályozza meg. Az elmozdulást két reakcióerő gátolja. Ez a megtámasztási mód három ismeretlent tartalmaz. Fontos, hogy most először beszélhetünk a nyomaték „helyhez kötéséről”. Az ilyen nyomatékot *koncentrált nyomatéknak* nevezzük.



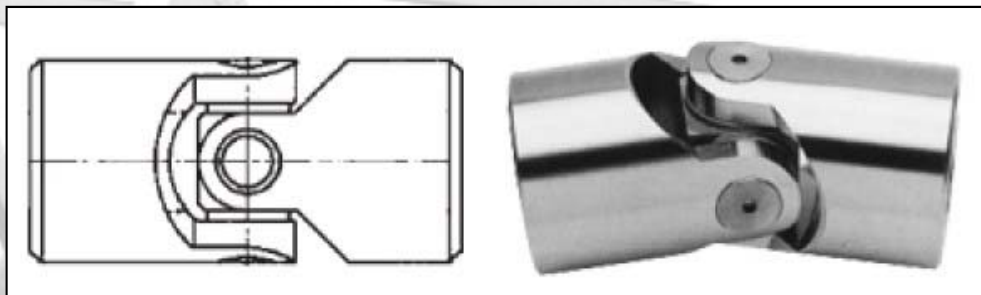
4. kép. Befogott (konzolos) megtámasztás kialakítása [Szabó I. G. 2012]



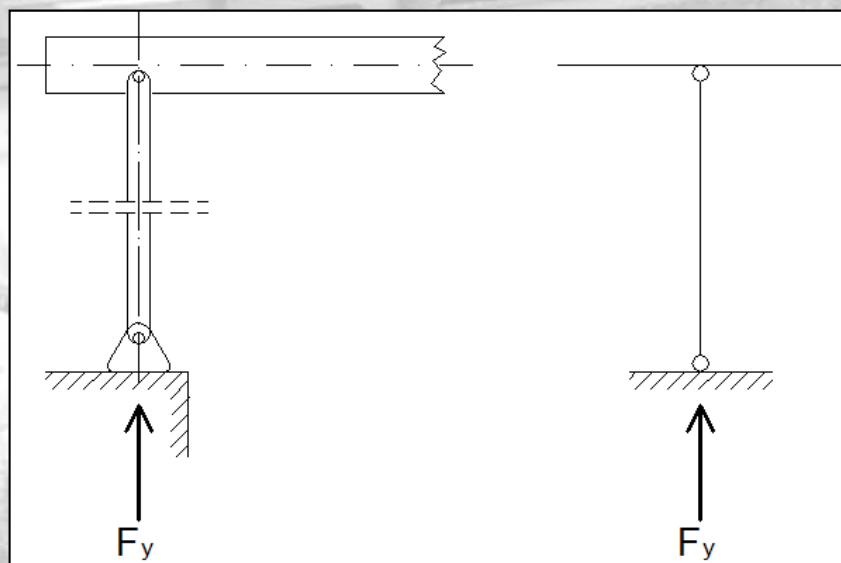
4. ábra. Befogott (konzolos) megtámasztás és statikai váza [Szabó I. G. 2012]

1.2.4 Támasztórúd (kapcsolórúd)

A támasztórúd egy mindkét végén csuklóval ellátott támasztószerkezet, melynek egyik vége a megtámasztott, másik vége pedig a megtámasztó testhez kapcsolódik. A támasztórúdban értelemszerűen csak tengelyirányú rúderők keletkezhetnek.



5. kép. Kapcsolórúd csuklójának egy lehetséges kialakítása [Szabó I. G. 2012]



5. ábra. Támasztórúd és statikai váza [Szabó I. G. 2012]



6. kép. Támasztórúd I.



7. kép. Támasztórúd II.

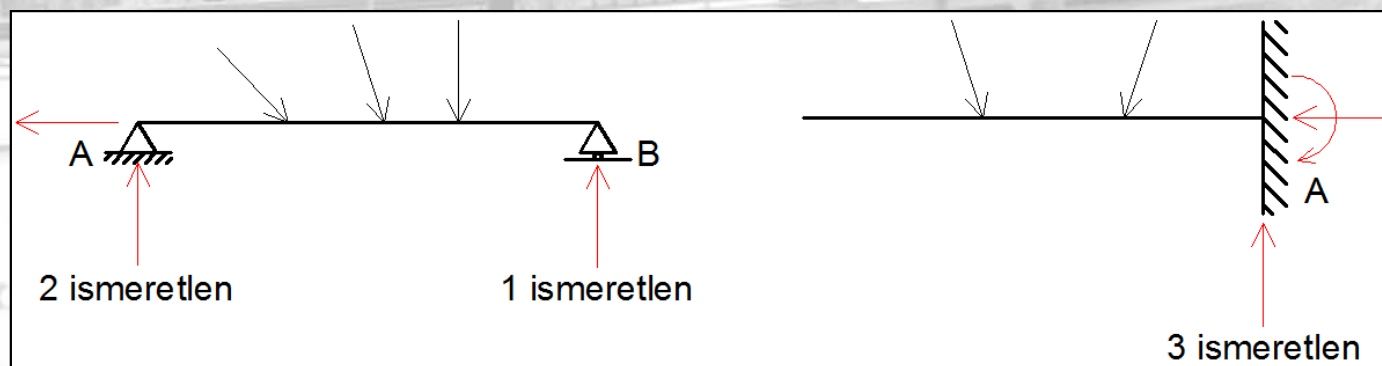
2. Tartószerkezetek statikai osztályozása

A tartószerkezeteket statikai szempontból határozott és határozatlan szerkezetekre oszthatjuk.

2.1 Statikailag határozott tartók

Statikailag *határozottnak* nevezünk egy tartószerkezetet akkor, ha az alátámasztások (ismeretlen reakciók) száma nem több mint három. A már korábban említett három alapegyenlet segítségével az összes ismeretlen kifejezhető.

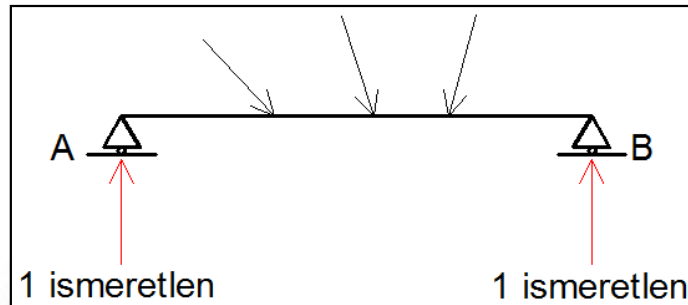
$$\sum M_i^A = 0; \sum F_{ix} = 0; \sum F_{iy} = 0$$



6. ábra. Statikailag határozott szerkezetek [Szabó I. G. 2012]

Ha a támaszerőt háromnál kevesebb számadat jellemzi, a támaszok nem biztosítják, hogy a tartó tetszőleges teher esetén helyben maradjon. Ekkor a tartó a helyéről képes elmozdulni, mozgatható, azaz labilis.

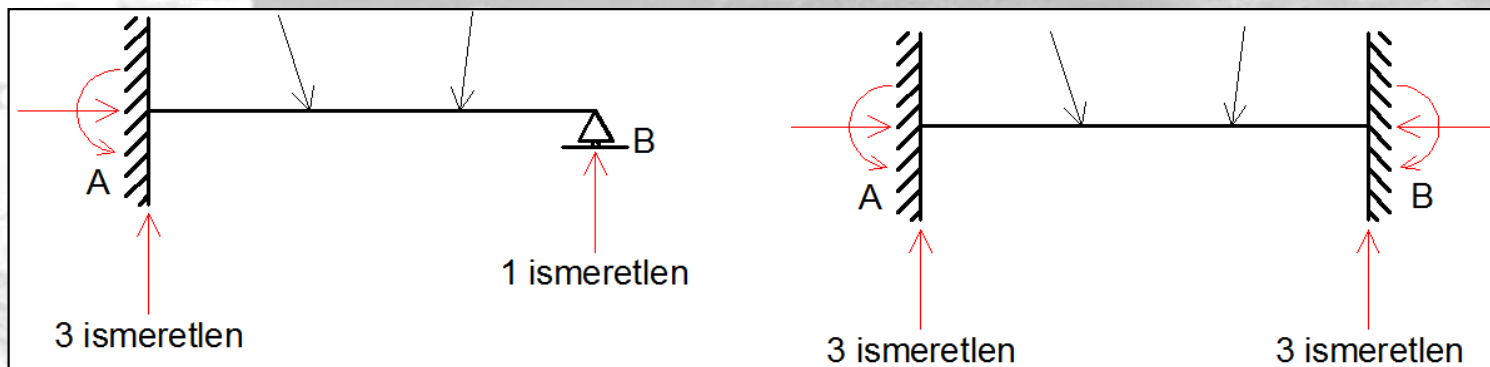
Egyensúly csak abban az esetben van, ha a tartóra ható terhek eredője függőleges.



7. ábra. Labilis tartószerkezet [Szabó I. G. 2012]

2.2 Statikailag határozatlan tartók

Statikailag *határozatlannak* nevezünk egy tartószerkezetet akkor, ha a támaszok együttvéve háromnál több ismeretlent tartalmaznak. Ekkor már a három alapegyenlet segítségével nem oldható meg a feladat, szükséges további új, úgynevezett alakváltozási egyenletek bevezetése.



8. ábra. Statikailag határozatlan szerkezetek [Szabó I. G. 2012]

3. Külső erők

A tartószerkezetekre ható terheket, valamint az ezek hatására az alátámasztásoknál fellépő támaszerőket (reakcióerőket) együttesen *külső erőknek* nevezzük.

3.1 Összpontosított (koncentrált) erő

A terhelő erők a tartó valamely kisebb felület részére, mondhatni egy pontjára fejtik ki hatásukat. Jelölésük azonos az eddigi erők jelölésével.

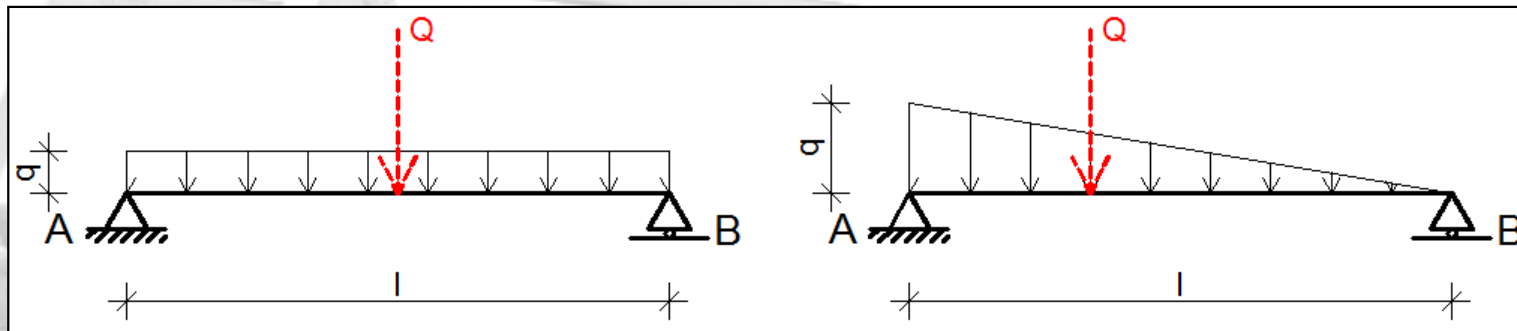
3.2 Megoszló erők

A tartószerkezetekre ható megoszló erők, vagy terhelések a gyakorlatban igen gyakoriak. Ilyen megoszló terhelés például az adott tartószerkezet önsúlya is. A megoszló terhelések – mint ahogy a név is mutatja – megosztják terhüket valamely nagyobb felületen vagy vonal mentén, attól függően, hogy térben vagy síkban helyezkednek el.

A megoszló terhelés nagysága a tartó hosszában lehet állandó, egyenletesen megoszló vagy változó. A síkbeli megoszló erőket a rúd tengelyvonalára rajzolt diagrammal ábrázoljuk.

A megoszló erők nagyságát a tartó hossz tengelyére – általában egy egységre, például 1 méterre vonatkozó erőértékkel – az úgynevezett fajlagos erőértékkel jellemezzük pl.: $q = 10 \text{ kN/m}$.

A számítások könnyítése céljából a megoszló erőket eredőjükkel helyettesíthetjük.



9. ábra. Megoszló terhelés ábrázolása és helyettesítése eredőjével [Szabó I. G. 2012]

A megoszló terhelés eredőjét nagy „Q”-val jelöljük.

Az eredő nagysága a terhelési diagram területével egyenlő, hatásvonala pedig a diagram súlypontján megy át.

Kiszámítása: egyenletesen megoszló teher esetén: $Q = q \cdot l$

változó nagyságú teher esetén: $Q = \frac{q \cdot l}{2}$

4. Síkbeli rácsos tartó

4.1 Síkbeli rácsos tartó fogalma

Rácsos tartóknak nevezzük azokat az összetett szerkezeteket, amelyeknek elemeit:

- egymáshoz csakis a két végén elhelyezett csuklók,
- a földhöz csuklók és/vagy görgők, támasztó rudak kapcsolják.

A rácsos tartók tehát csuklókból (csomópontokból) és belső rudakból állnak. A terheket mindig a csomópontokban működtetjük. Amennyiben a rácsrúdon működik a teher, akkor azt is redukáljuk valamely csomópontra.

4.2 Statikai határozottság

Amennyiben a rácsos tartóra csak a csomópontokban hat erő, akkor a rudakban csak két erő hathat, emiatt nem kell őket testnek kezelni (síkbán vannak), ezért csupán a rudakat összekötő csomópontokra kell egyensúlyi feltételeket felírni. A csomópontokra közös metszéspontú erőrendszer hat, tehát csomópontonként két egymástól független egyenlet írható fel.

A statikai határozottság szükséges (de nem elégséges) feltétele:

A független egyenletek száma: $e = 2c$

Ismeretlenek: a reakcióerők és a rúderők, melyek skaláris adattal adhatók meg: $i = k + r$

független egyenletek száma = ismeretlenek száma azaz $e = i$

$$2c = k + r$$

ahol: c – a csuklók száma;

r – a rudak száma;

k – a külső kényszerek fokszáma.

A statikai határozatlanság elégséges (de nem szükséges) feltétele:

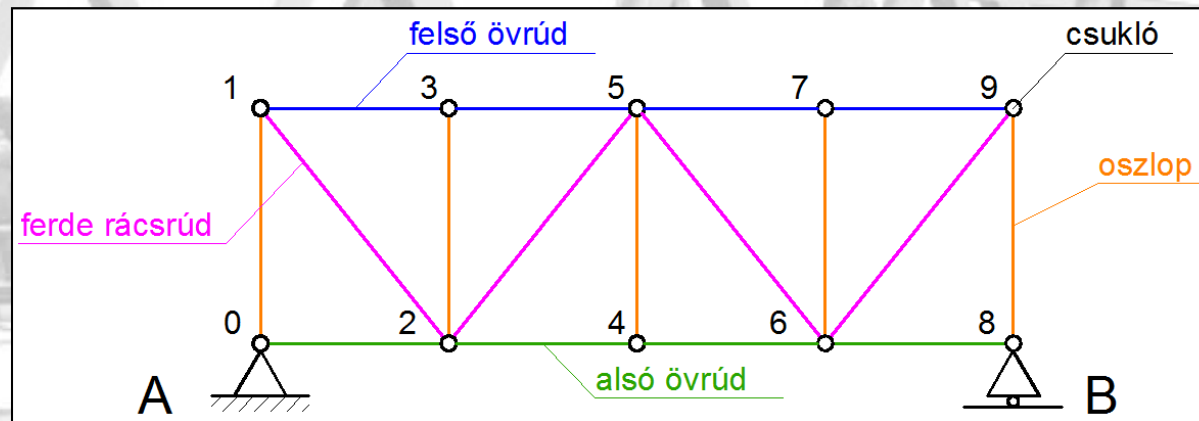
Egyenletek és ismeretlenek számának ismerete alapján:

$$2c < k + r$$

4.3 Síkbeli rácsos tartók kialakítása

A rudak elhelyezkedésük alapján speciális neveket is kaphatnak:

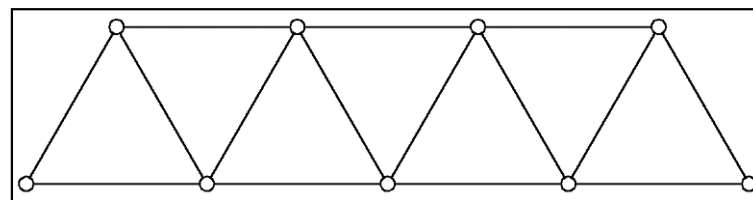
- ha egy függőleges rúd több rudat is keresztez, akkor ezek közül a legfelsőt *felső övrúdnak*, a legalsó *alsó övrúdnak* nevezzük,
- a közbenső ferde rudak a *rácsrudak*,
- a függőleges rudak az *oszlopok*, vagy *összekötő rudak*.



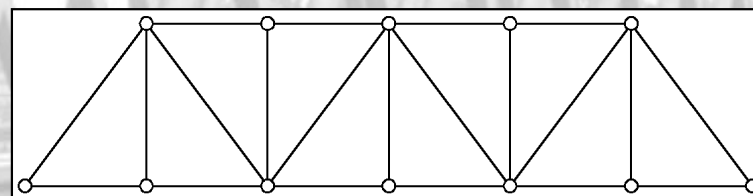
10. ábra. Síkbeli rácsos tartó kialakítása [Szabó I. G. 2012]

4.4 Síkbeli rácsos tartók hálózati megoldásai

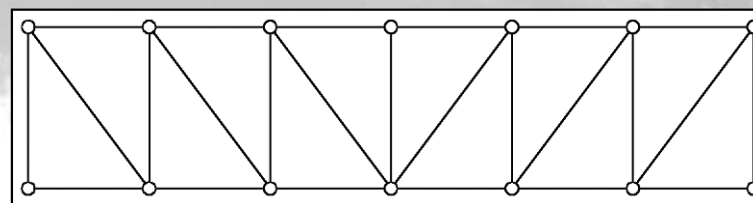
Az alkalmazandó hálózat megválasztása egyrészt a megoldandó feladat, másrészt pedig a használandó anyag és technológia függvényében történhet. Lentebb a legjellemzőbb hálózati megoldások képe, vázlatos ábrája és megnevezése látható.



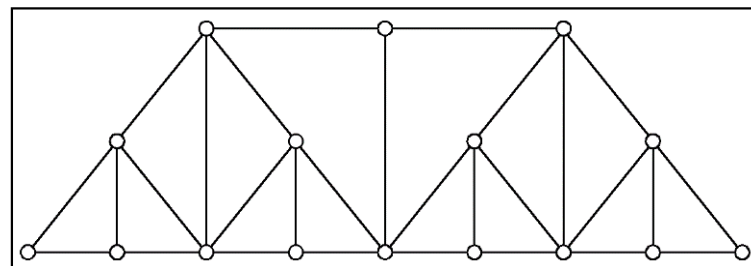
8. kép-11. ábra. Szimmetrikus rácsozás [Szabó I. G. 2012]



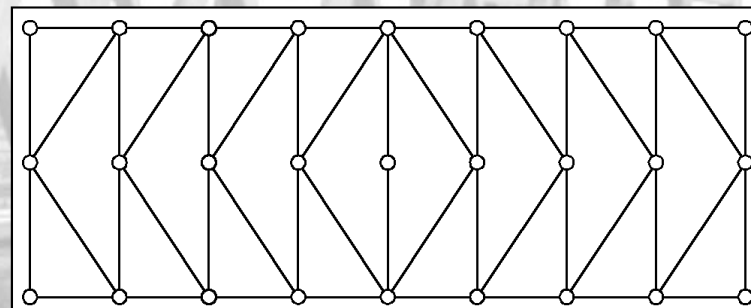
9. kép-12. ábra. Szimmetrikus rácsozás oszlopokkal [Szabó I. G. 2012]



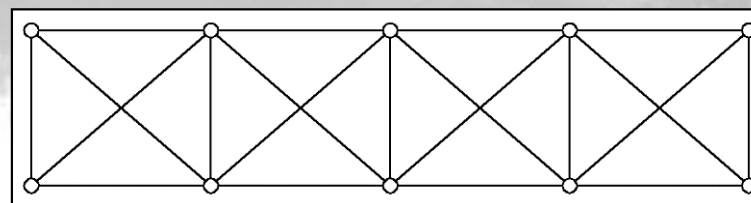
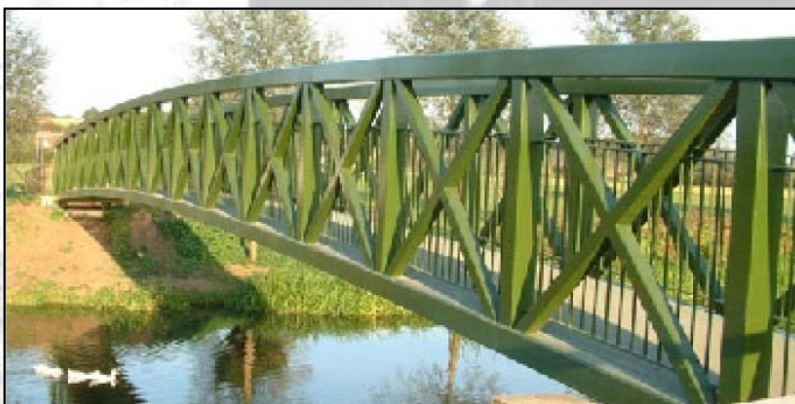
10. kép-13. ábra. Oszlopos rácsozás [Szabó I. G. 2012]



11. kép-14. ábra. Szimmetrikus rácsozás másodlagos elemekkel [Szabó I. G. 2012]



12. kép-15. ábra. „K” rácsozás [Szabó I. G. 2012]

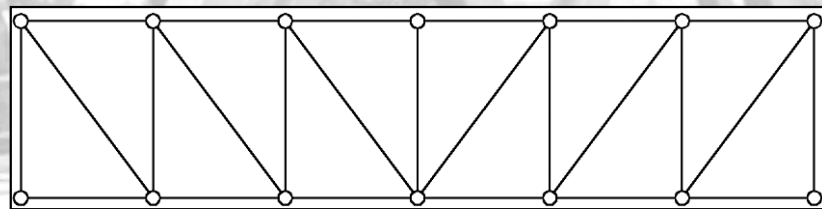


13. kép-16. ábra. „X” rácsozás [Szabó I. G. 2012]

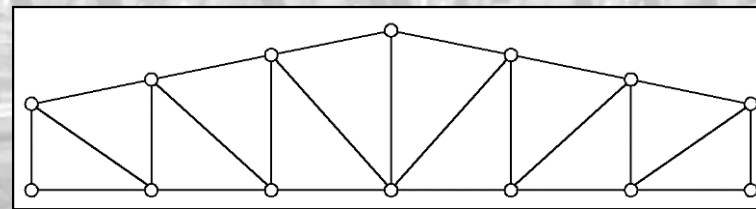
4.5 Síkbeli rácsos tartók alakja

Az alak megválasztásával kis mértékben befolyásolni lehet a belső erők, elsősorban az *övrüderők* nagyságát. Az alakot természetesen az alátámasztó szerkezet funkcionális követelményei és esztétikai szempontok határozzák meg. (Például csarnokszerkezetek esetében a rácsos főtartók felső övének dőlésével állítják be a tető hajlásszögét.)

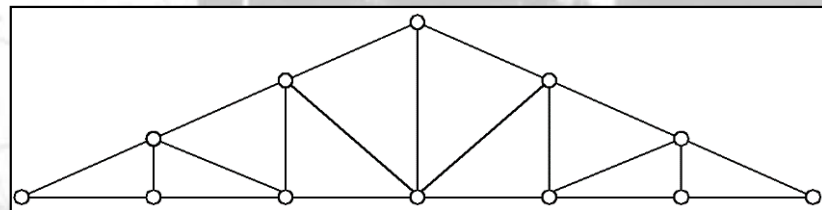
Alább láthatóak a leggyakrabban alkalmazott rácsos tartó–alakok:



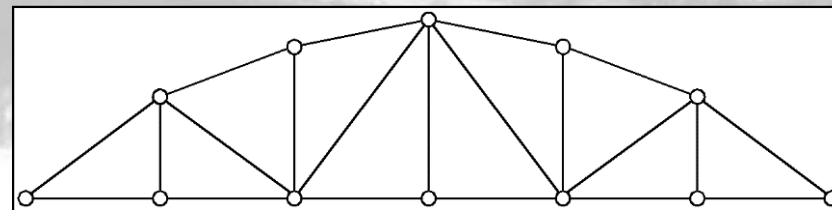
17. ábra. Párhuzamos övű rácsos tartó [Szabó I. G. 2012]



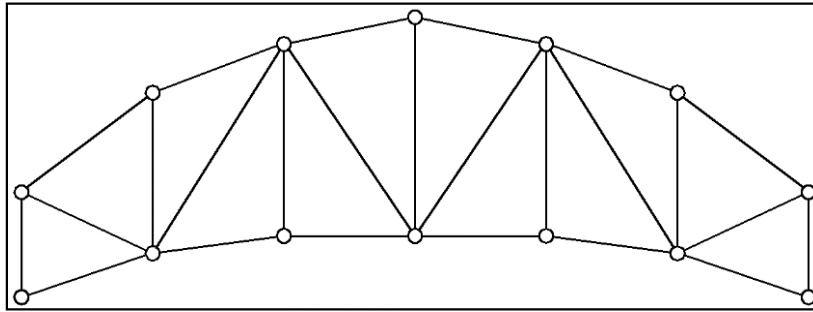
18. ábra. Kiévelt felső övű rácsos tartó [Szabó I. G. 2012]



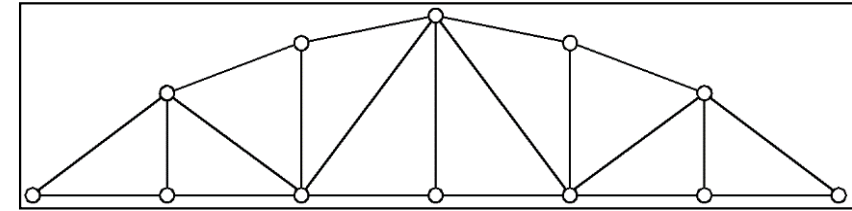
19. ábra. Háromszög alakú rácsos tartó [Szabó I. G. 2012]



20. ábra. Szegmens alakú rácsos tartó [Szabó I. G. 2012]



21. ábra. Csonka (sarló) alakú rácsos tartó
[Szabó I. G. 2012]



22. ábra. Lencse alakú rácsos tartó [Szabó I. G. 2012]

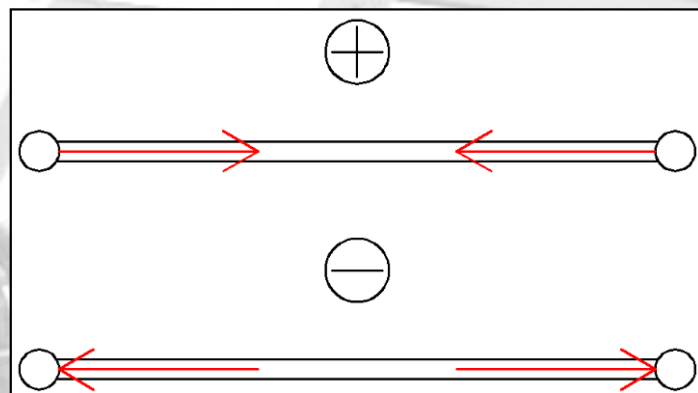
4.6 Statikailag határozott rácsos tartók rúderőinek meghatározása

Minden esetben a rácsos tartót, mint kéttámaszú, tömör tartót kell kezelni, azaz a reakcióerők számítása az eddig megismert módon történik a nyomatéki egyenlet és a vetületi egyenletek felhasználásával.

A rúderők pozitív (+) és negatív (–) előjeleket kaphatnak. A rúderő pozitív, ha húzza a **csomópontot**, negatív, ha nyomja a **csomópontot**. Fontos, hogy a húzás és nyomás nem a rúdtengelyre van vonatkoztatva, hanem egy adott csomópontra.

Azt a rudat, amelyikben nem ébred erő, *vakrúdnak* nevezzük.

Egy rúdban csak akkor keletkezik rúderő, ha a rúd mindkét végén terhelve van. A rúderő kiegyensúlyozza a rácsos tartó csomópontjait, oly módon, hogy a rúd mindkét végén ugyanolyan nagyságú, de ellenkező irányú erő működik, azaz mindkét egymás melletti csomópontot húzza, vagy nyomja a rúderő.

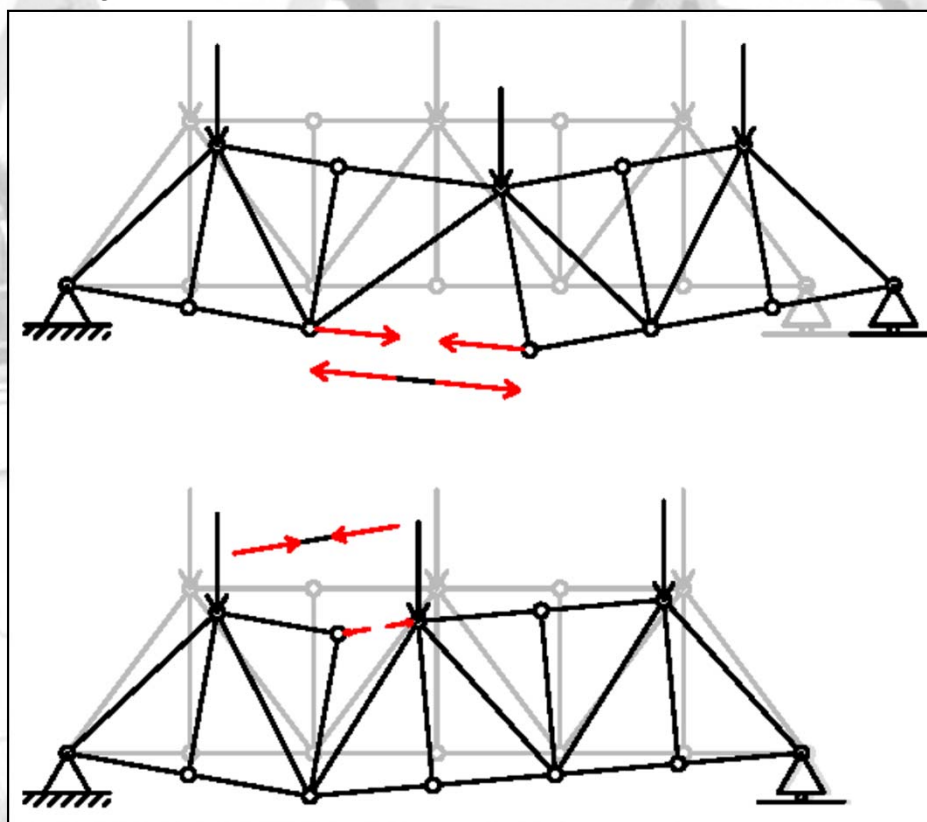


23. ábra. Húzó és nyomó rúderők iránya és előjele [Szabó I. G. 2012]

Gyakori hiba a rúderők előjelének, illetve irányának tévesztése. A helyes előjelet a megváltozott tartóalakból viszonylag egyszerűen ki lehet következtetni.

A következő ábrán egy, csak függőleges irányban lefelé ható erővel terhelt szimmetrikus rácsos tartó látható. Az erők hatására a görgős támasz igyekszik elmozdulni, illetve a tartó lehajlik, ezért az alsó övben húzás, a felső övben nyomás keletkezik.

Az alsó öv átvágott rúdja két végén lévő csomópont távolodik egymástól, tehát a rúdban húzóerő keletkezik, a rúd próbál megnyúlni, szélsőséges esetben el is szakadhat. A felső öv átvágott rúdja két végén lévő csomópont közeledik egymás felé, minek következtében a rúdban nyomóerő keletkezik, a rúd próbál összenyomódni, szélsőséges esetben kihajlás keletkezhet benne.



24. ábra. Húzó és nyomó rúderők iránya és előjele [Szabó I. G. 2012]

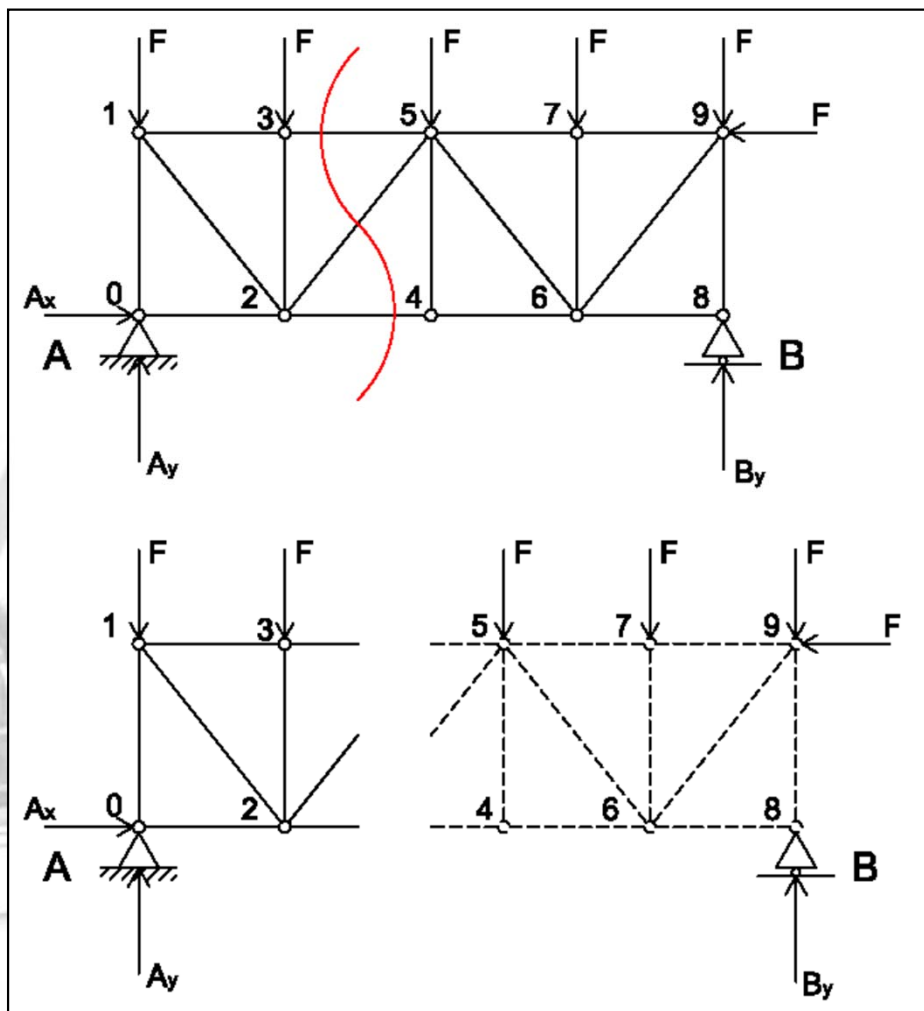
4.7 A rúderők meghatározására két módszer van

1. Csomóponti módszer

- A csomóponti módszer alkalmazása során minden egyes csukló (csomópont) közös metszéspontú síkbeli erőrendszernek tekintendő.
- Csak akkor alkalmazható, ha a csomópontban egy vagy két ismeretlen van. A két már korábban megismert vetületi egyenlet alkalmazásával az ismeretlenek meghatározhatók.
- A csomóponti módszer alkalmazása során a rácsos tartó minden egyes csomópontján lépcsőről–lépcsőre végig kell haladni. Csak abból a csomópontból lehet kiindulni, ahol az ismeretlenek száma nem több kettőnél.
- E módszer alkalmazása hosszadalmas, bonyolultabb szerkezetek esetén, amennyiben nincs szükség minden rúderő nagyságának ismeretére alkalmazása nem ajánlott.

2. Hármás átmetszés módszer

- Abban az esetben célszerű alkalmazni, ha nincs szükségünk minden rúderő ismeretére.
- Hármás átmetszés során „kettévágjuk” a tartót, s a két különálló részt külön kezeljük. A továbbiakban elegendő csak az egyik résszel foglalkozni, célszerű azzal, amelyik a kisebb, illetve kevesebb külső erőt tartalmaz. Ilyenkor mindkét részre és az egészre is teljesülnie kell a $\sum M_i = 0$; $\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$ egyenleteknek.
- A három átvágott rúderőt általában egy három ismeretlenes egyenletrendszerből tudjuk meghatározni. A három átvágott rúd nem lehet közös metszéspontú (sem a közeli, sem a végtelen távolságban: azaz nem lehetnek párhuzamosak). A három ismeretlenes egyenletrendszer három darab egy-egy ismeretlent tartalmazó egyenlet formájában is felírható. Mindegyik rúdhoz meg kell keresni a főpontját (a másik két rúd metszéspontját). Ha a hármás átmetszés két rúdja párhuzamos, metszéspontjuk a végtelenben van, erre a végtelenben lévő pontra felírt nyomatéki egyenlet a rudak irányára merőleges vetületi egyenletté alakul át.



25. ábra. Hármás átmetszés módszere [Szabó I. G. 2012]



Felhasznált irodalom

SIPTÁR TIBOR, MARSAY ISTVÁN: *Mechanika módszertani útmutató és példatár.* Pollack Mihály Műszaki Főiskola Építőipari Kar, Pécs, 1978.

SZABÓ IMRE GÁBOR: *Mechanika I. (statika). Példatár és módszertani útmutató.* Pécs, 2012.

